

35

OVER  
DE THEORIE DER TERUGKAATSING EN BREKING  
VAN HET LICHT.

ACADEMISCH PROEFSCHRIFT

DOOR

H. A. LORENTZ.



ARNHEM,  
K. VAN DER ZANDE.  
Firma STENFERT KROESE & VAN DER ZANDE.  
1875.

Diss Leiden

1875 nr 35

Diss. Leiden

1875 35

UNIVERSITEITSBIBLIOTHEEK LEIDEN

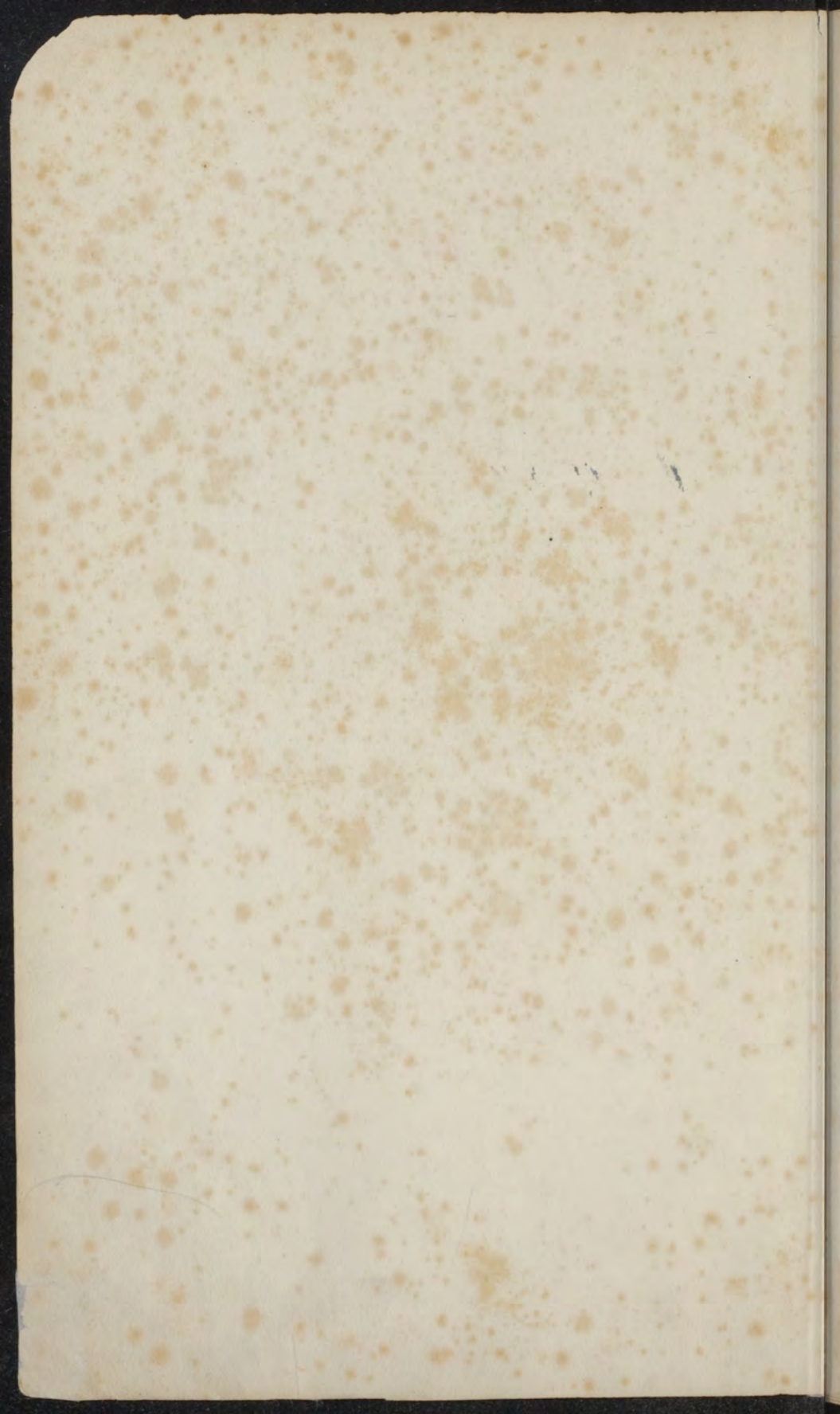


03434813

~~241~~

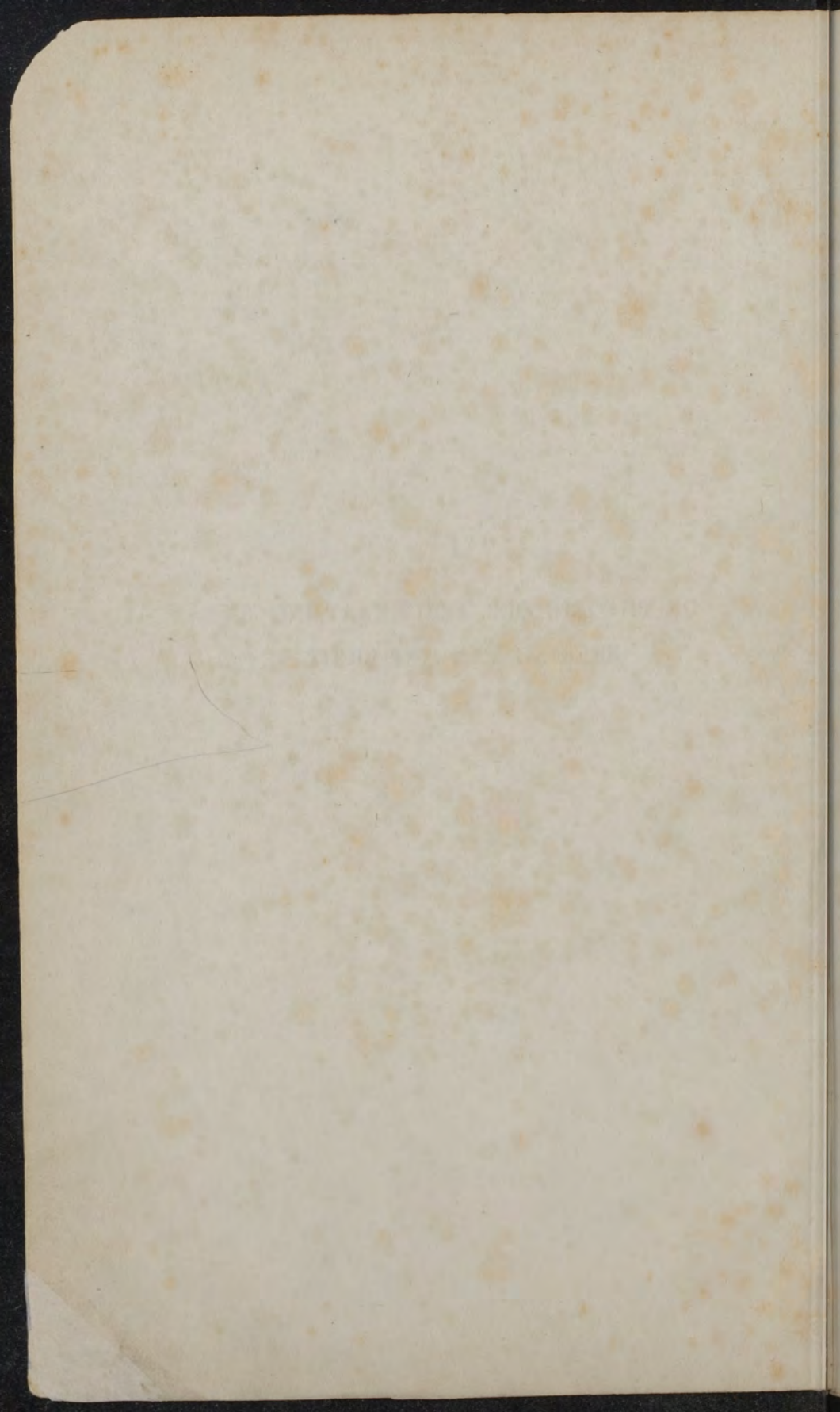
~~D. 24~~





OVER

DE THEORIE DER TERUGKAATSING EN  
BREKING VAN HET LICHT.



OVER  
DE THEORIE DER TERUGKAATSING EN BREKING VAN HET LICHT.

---

ACADEMISCH PROEFSCHRIFT,

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE,

AAN DE HOOGESCHOOL TE LEIDEN,

OP GEZAG VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS

MR. JOANNES THEODORUS BUIJS,

HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER RECHTSGELEERDHEID,

op Zaterdag, den 11<sup>den</sup> December 1875, des namiddags te 1 uur,

VOOR DE FACULTEIT TE VERDEDIGEN

DOOR

**HENDRIK ANTOON LORENTZ,**

GEBOREN TE ARNHEM.

---

ARNHEM,

K. VAN DER ZANDE.

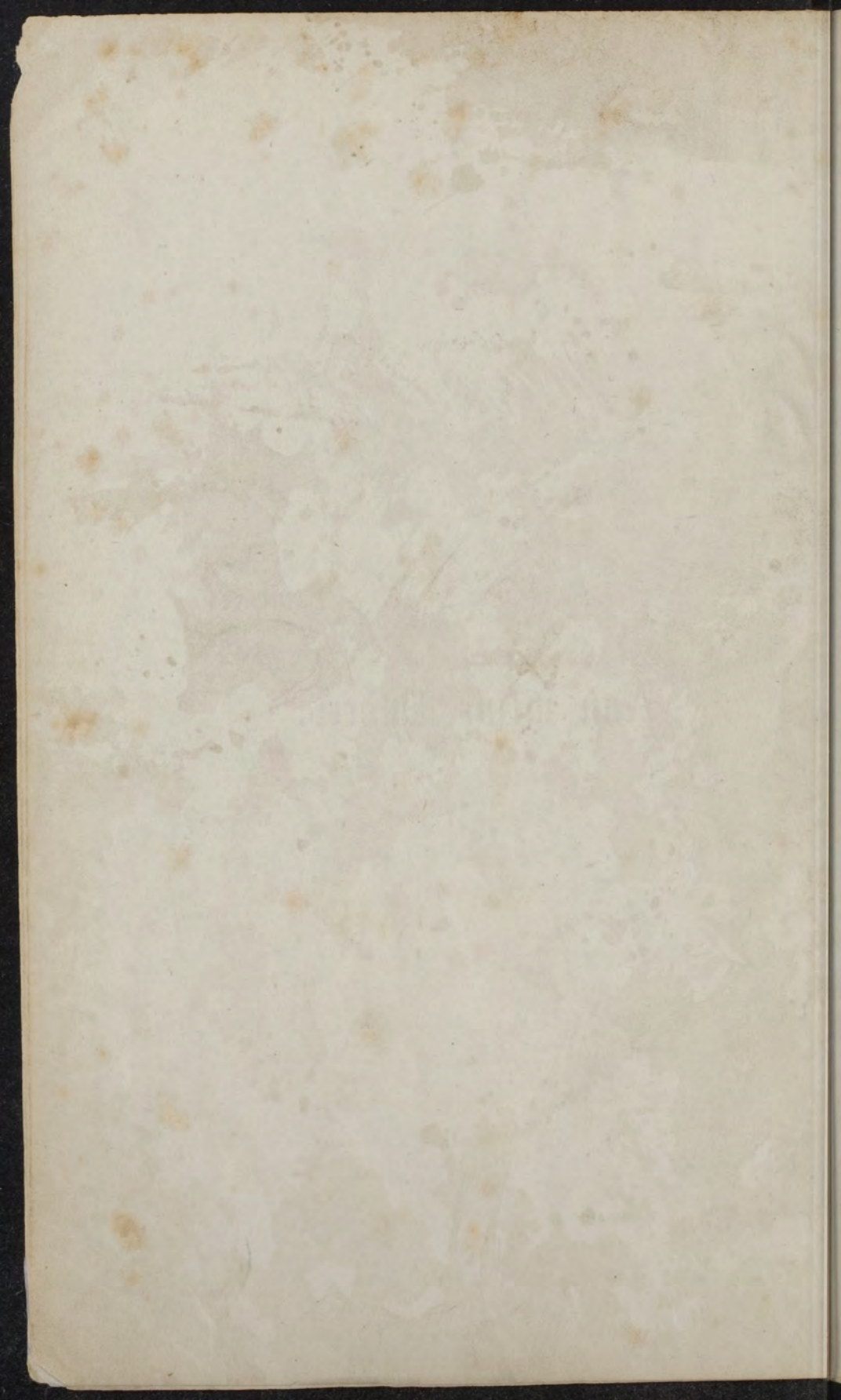
Firma STENFERT KROESE & VAN DER ZANDE.

1875.





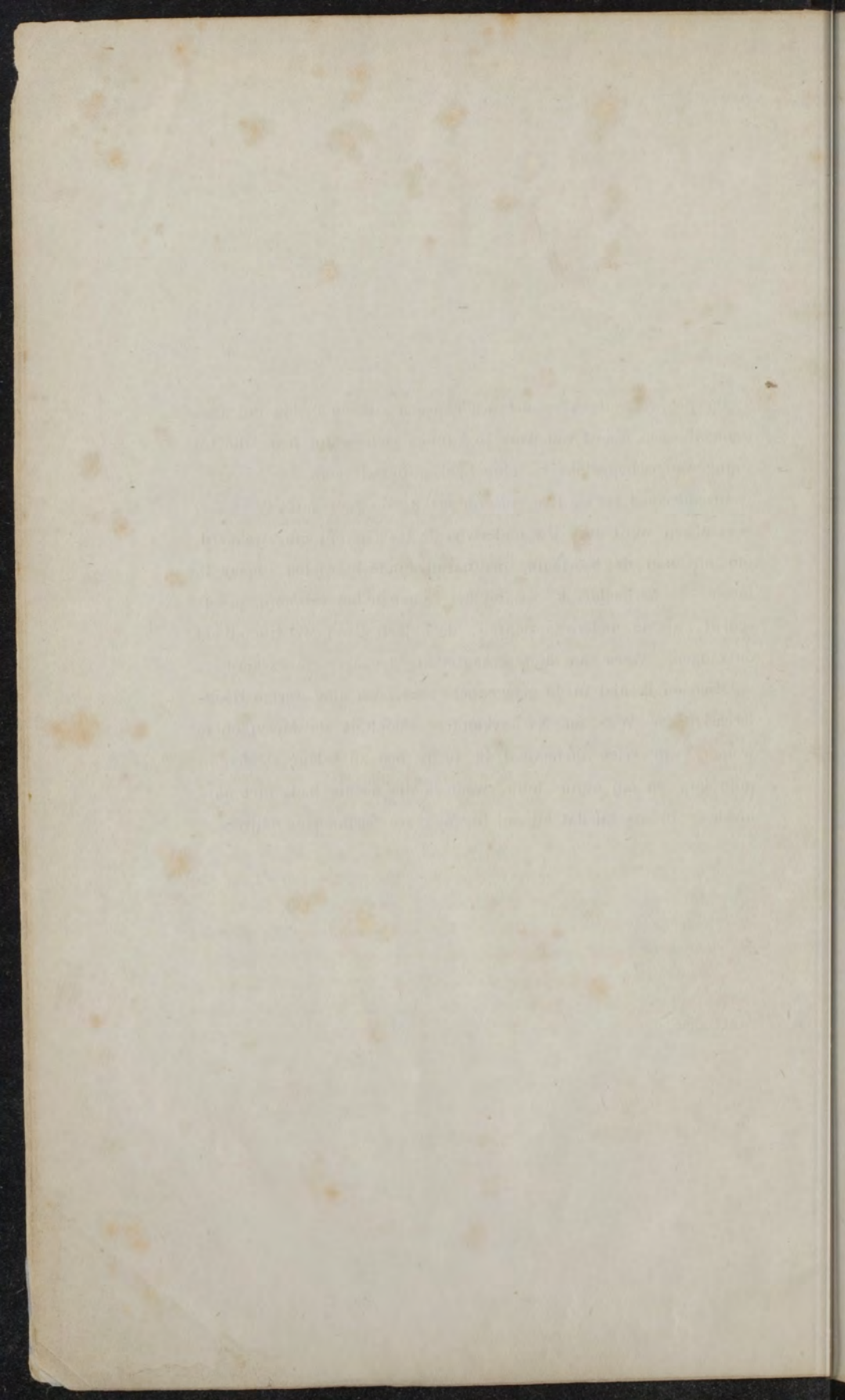
Aan mijne Ouders.



Bij het volbrengen mijner academische studiën is het mij aangenaam, een woord van dank te kunnen richten tot hen, die tot mijne wetenschappelijke vorming hebben bijgedragen.

Inzonderheid tot U, Hooggeleerde RIJKE, Hooggeschatte Promotor. Niet alleen werd door Uw onderwijs de lust in mij aangewakkerd, om mij aan de beoefening der natuurkunde te wijden, maar ik mocht ook herhaaldelijk, zoo bij het samenstellen van mijn proefschrift, als in andere opzichten, de blijken Uwer welwillendheid ontvangen. Wees van mijne erkentelijkheid daarvoor verzekerd.

Ofschoon ik niet in de gelegenheid was, van alle overige Hoogleeraren der Wis- en Natuurkundige Faculteit de lessen bij te wonen, van velen ondervond ik toch, hoe zij belang stelden in mijn lot, en mij hunne hulp, waar ik die noodig had, niet ontielden. Steeds zal dat bij mij in dankbare herinnering blijven.



## INLEIDING.

---

Bij een theoretisch onderzoek omtrent de bewegingsverschijnselen der electriciteit kwam MAXWELL 1) tot het merkwaardige resultaat, dat er een groote overeenkomst valt op te merken tusschen sommige electriche bewegingen en de aethertrillingen, die men aanneemt, om de lichtverschijnselen te verklaren. Hij vond namelijk, dat er in een diëlectrisch lichaam trillende bewegingen der electriciteit kunnen plaats hebben, die zich op dezelfde wijze en met dezelfde snelheid voortplanten als de lichttrillingen. De overeenstemming is zoo groot, dat zij MAXWELL aanleiding gaf tot de onderstelling, dat in werkelijkheid het licht zou bestaan uit dergelijke electriche trillingen, een hypothese, die hij voor enkele gevallen aan de ervaring toetste en daardoor tot op zekere hoogte bevestigd vond.

Onafhankelijk van MAXWELL en langs anderen weg is ook LORENZ 2) tot dergelijke resultaten gekomen. Later heeft HELMHOLTZ 3) bij de opstelling van de bewegingsvergelijkingen der electriciteit de meest algemeene uitdrukking, die men voor de induceerende werking van stroomelementen mag aannemen, ten grondslag gelegd, terwijl door MAXWELL en LORENZ bijzondere onderstellingen omtrent die werking waren gemaakt. HELMHOLTZ vond nu, dat ook bij die meer algemeene behandeling van het onderwerp het door MAXWELL verkregen

---

1) MAXWELL, Electricity and Magnetism, II p. 383. Phil. Transactions, 1865.

2) LORENZ, Pogg. Ann. Juni 1867.

3) HELMHOLTZ, Ueber die Bewegungsgleichungen der Electricität in ruhenden Leitern, Crelle's Journal. 72 (1870).

resultaat in hoofdzaak blijft bestaan. Tevens maakte hij opmerkzaam op een omstandigheid, die door MAXWELL niet is besproken. Hij zegt nl. 1) van de door dezen gevonden overeenkomst:

»Diese Analogie ist noch in einer andern sehr wichtigen Beziehung vorhanden, welche Herr MAXWELL nicht berührt hat. Man hat den mechanischen Zustand des Lichtäthers in durchsichtigen Medien bisher dem der festen elastischen Körper gleich gesetzt. Diese Annahme ergiebt aber für die Grenze zweier durchsichtiger Medien andere Grenzbedingungen, als man braucht, um die Refraction und Reflexion des Lichts an dieser Grenze zu erklären, so dass hier in der theoretischen Optik ein ungelöster Widerspruch bestanden hat. Die Theorie der electricischen Oscillationen ergiebt aber nicht bloss im Innern eines gleichartigen isolirenden Medium, sondern auch an der Grenze von zwei solchen Medien, dieselben Gesetze der Fortpflanzung, der Refraction und Reflexion der Wellen, wie wir sie beim Lichte thatsächlich finden, vorausgesetzt dass man entweder die magnetische oder die dielectricische Polarisationsfähigkeit beider Medien gleich und letztere sehr gross setzt. Von der bezeichneten Alternative hängt es ab, ob die electricischen oder magnetischen Oscillationen eines polarisirten Strahls in der Polarisations-ebene geschehen.»

Het was deze opmerking van HELMHOLTZ, die mij aanleiding gaf, te onderzoeken, in hoeverre de verschijnselen der terugkaatsing en breking van het licht aanleiding geven, om de theorie van MAXWELL boven de tot nu toe aangenomen undulatietheorie te verkiezen. Ik heb daartoe in het eerste hoofdstuk de moeilijkheden besproken, die de laatstgenoemde in dit opzicht oplevert. Na vervolgens in het tweede hoofdstuk de bewegingsvergelijkingen der electriciteit te hebben opgesteld, heb ik in de vier laatste hoofdstukken de hypothese van MAXWELL, of de electromagnetische theorie

1) HELMHOLTZ, t. a. p., p. 68, noot.

van het licht, beschouwd. Daarbij zijn achtereenvolgens de terugkaatsing en breking van het licht door niet-geleidende, isotrope stoffen, de optische eigenschappen der kristallen, de theorie der totale reflectie en eindelijk de terugkaatsing van het licht door metalen ter sprake gekomen.

Zooals uit de boven aangehaalde woorden van HELMHOLTZ blijkt, is een deel der resultaten, die ik verkregen heb, reeds vroeger door hem afgeleid. Het is mij echter niet bekend, dat hij meer dan het geciteerde over dit onderwerp heeft geschreven.

## EERSTE HOOFDSTUK.

---

### DE THEORIE VAN FRESNEL.

§ 1. De tot nog toe aangenomen undulatietheorie — die ik in 't vervolg kortheidshalve de theorie van FRESNEL zal noemen — rust, gelijk men weet, op de onderstelling, dat het licht bestaat uit trillingen van een veerkrachtige middenstof, den lichtaether, waaraan men, ten einde het bestaan van transversale trillingen te kunnen verklaren, soortgelijke eigenschappen moet toekennen als bij vaste lichamen worden waargenomen. Mocht nu al deze constitutie van den aether aan eenige bedenkingen onderhevig zijn, aan den anderen kant kon men op zoo vele overwinningen wijzen, door de theorie van FRESNEL op hare vroegere mededingster behaald, dat men zich geneigd gevoelde, haar boven allen twijfel verheven te achten. Toch geloof ik, dat men wel doet, toe te zien, in hoe verre haar die lofspraak toekomt en in hoe verre zij nog steunt op min waarschijnlijke onderstellingen.

Onder de verschijnselen, waaraan de undulatietheorie vooral hare overwinning heeft te danken, komt in de eerste plaats in aanmerking de interferentie van het licht, in de tweede plaats het bestaan van gepolariseerde lichtstralen. Uit de interferentieverschijnselen laat zich met de hoogste waarschijnlijkheid afleiden, dat het licht bestaat in een golvende voortplanting van trillingen, en het gepolariseerde licht bewijst ons vervolgens, dat die trillingen transversaal zijn. Dit is het hoofdbeginsel der theorie en de vaststelling daarvan wordt terecht als een der schoonste resultaten der



wetenschap aangemerkt. Maar men vergeet niet, dat wij aldus alleen het karakter der lichtbeweging hebben leeren kennen, zonder iets te weten omtrent de stof, die in dezen bewegingstoestand verkeert. Daar de ondervinding geleerd had, dat in veerkrachtige vaste lichamen dergelijke bewegingen kunnen plaats hebben, lag het zeker voor de hand, in het licht trillingen eener veerkrachtige stof te zien. Toch blijft dit een onderstelling en, vooral omdat zich daarnaast andere hypothesen laten opstellen, moeten andere dan de bovengenoemde verschijnselen omtrent hare geldigheid uitspraak doen.

Bijzonder geschikt zijn hiervoor de terugkaatsing en breking van 't licht. Wel kan de theorie ongedwongen een verklaring geven van de wetten, die de richting der teruggekaatste en gebroken stralen bepalen; minder volkomen is echter de berekening van de intensiteit dier stralen. De afleiding der bedoelde wetten steunt dan ook alleen op het hoofdbeginsel der theorie, niet op de bijzondere onderstelling, dat het licht in trillingen van een veerkrachtig medium bestaat. Bij de berekening der intensiteit daarentegen moet wel degelijk die onderstelling ten grondslag worden gelegd, daar men anders onmogelijk de noodige voorwaarden voor de grens van twee middenstoffen kan verkrijgen.

Een kort overzicht van de pogingen, die men heeft aangewend, om uit de theorie van FRESNEL de omstandigheden, die zich bij de terugkaatsing voordoen, af te leiden, zal ons de leemten doen kennen, die er op dit gebied bestaan. Wij zullen ons daarbij steeds tot homogene, doorschijnende lichamen bepalen.

§ 2. Bij de eerste theorieën omtrent de reflectie ging men uit van de meening, dat in doorschijnende lichamen alleen de aether een rol speelde bij de lichtverschijnselen, terwijl de daartusschen liggende moleculen van de gewone stof werkeloos zouden blijven. Volgens deze beschouwingwijze waren dus de aethertrillingen onmiddellijk te vergelijken met de trillingen van een elastisch vast lichaam, waarop geen uitwendige krachten worden uitgeoefend. Om na te gaan, welke voorwaarden aan het grensvlak van twee middenstoffen moeten gelden, stellen wij ons een dergelijk veerkrachtig lichaam voor, waarvan de constitutie overal doorlopend is, behalve aan eenig oppervlak, waar zij plotseling een sprong maakt. Dit oppervlak kan men dan beschouwen als het grensvlak van twee verschillende, maar met elkander verbonden stoffen; ge-

makshalve nemen wij aan, dat het plat is en tot  $yz$ -vlak van een rechthoekig coördinatenstelsel wordt genomen. Verdeelen wij dan het lichaam door vlakken, loodrecht op de assen, in elementen, die de gedaante van een rechthoekig parallelepipedum hebben, dan is het gemakkelijk, de bewegingsvergelijkingen voor eenig element op te sporen. Wij sluiten daarbij voorloopig die elementen uit, die gedeeltelijk in het eene, gedeeltelijk in het andere medium zijn gelegen.

Hebben de deeltjes van het lichaam op den tijd  $t$  zekere verplaatsingen, waarvan wij de componenten  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  zullen noemen, terwijl de coördinaten door  $x$ ,  $y$ ,  $z$  worden voorgesteld, dan treden, ten gevolge van de relatieve plaatsverandering der deeltjes, de elastische krachten op. Dien ten gevolge werken er op de zijvlakken van een element zekere drukkingen en deze moeten, met de uitwendige krachten, die op het element werken, een resultante opleveren, gelijk aan zijne massa, vermenigvuldigd met de versnelling. Ligt nu het element  $dx dy dz$  met een der hoekpunten in het punt  $P(x, y, z)$  en met het daar tegenover staande in het punt  $(x + dx, y + dy, z + dz)$ , dan schrijven wij voor de componenten der drukking, die op het door  $P$  gaande zijvlak  $dy dz$  wordt uitgeoefend,

$$X_x dy dz, Y_x dy dz, Z_x dy dz,$$

zoodat de letters  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  de richting der componenten aangeven, de kleine index daarentegen de normaal van het zijvlak, waarop de drukking werkt. Schrijft men evenzoo voor de drukking, op het tegenoverstaande zijvlak uitgeoefend,

$$-X'_x dy dz, -Y'_x dy dz, -Z'_x dy dz,$$

dan leveren deze beide drukkingen als resultante op

$$-(X'_x - X_x) dy dz, -(Y'_x - Y_x) dy dz, -(Z'_x - Z_x) dy dz.$$

Evenzoo kan men met de drukkingen op de overige zijvlakken te werk gaan en vervolgens de componenten opstellen der geheele kracht, die op het element werkt. Zal men nu met geene andere dan eindige bewegingen te doen hebben, dan moet deze kracht oneindig klein zijn en van dezelfde orde als de massa van het element, dus van de orde  $dx dy dz$ . Dan blijkt het dus, dat  $X'_x - X_x$ ,  $Y'_x - Y_x$ ,  $Z'_x - Z_x$  oneindig kleinen van de orde  $dx$  moeten zijn; m. a. w.  $X_x$ ,  $Y_x$ ,  $Z_x$  moeten doorlopend en overal eindig zijn. Dit geldt voor elk medium en wel, daar wij ook elementen kunnen beschouwen, waarvan één zijvlak in het grens-

vlak ligt, tot aan dat grensvlak: ook daar moeten dus de componenten der drukkingen eindige waarden hebben.

Onderstelt men nu, dat de verplaatsingen der deeltjes zeer klein zijn ten opzichte van hun onderlingen afstand, dan kan men bewijzen, dat de componenten der drukkingen lineaire en homogene functiën zijn van de eerste differentiaalquotienten van  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  naar de coördinaten. Zullen daarbij de drukkingen overal eindige waarden hebben, dan moeten die differentiaalquotienten eindig,  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  doorlopend zijn. Aangezien nu die voorwaarde ook aan het grensvlak moet vervuld zijn, moeten ook daar de verplaatsingen  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  doorlopend zijn.

Maar, nu dit eens bewezen is, bestaat er geenerlei bezwaar meer, de boven gegeven beschouwing ook toe te passen op een element, dat gedeeltelijk in 't eene, gedeeltelijk in 't andere medium ligt. Daar de drukkingen op de tegenover elkander staande zijvlakken  $dydz$  dan weer oneindig weinig moeten verschillen, besluiten we dat, bij den overgang van het eene tot het andere medium, ook  $X_x$ ,  $Y_x$ ,  $Z_x$  doorlopend moeten zijn. Onderscheiden wij derhalve de grootheden, die op de twee middenstoffen betrekking hebben, door de indices 1 en 2, dan gelden aan het grensvlak de zes voorwaarden

$$\xi_1 = \xi_2, \eta_1 = \eta_2, \zeta_1 = \zeta_2, \dots \dots \dots (1)$$

$$(X_x)_1 = (X_x)_2, (Y_x)_1 = (Y_x)_2, (Z_x)_1 = (Z_x)_2 \dots \dots (2)$$

§ 3. Schrijven wij thans

$$X'_x - X_x = \frac{\partial X_x}{\partial x} dx$$

enz., dan kunnen wij voor de componenten der totale, op het element  $dx dy dz$  werkende kracht tamelijk eenvoudige uitdrukkingen vinden. Door deze vervolgens gelijk te stellen aan de massa van het element, vermenigvuldigd met de versnellingen

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2},$$

verkrijgen we de volgende bewegingsvergelijkingen

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \mathbf{X} + \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} &= 0, \\ \rho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \mathbf{Y} + \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} &= 0, \\ \rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - \mathbf{Z} + \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

waarin  $\rho$  de dichtheid voorstelt, terwijl

$$\mathbf{X} dx dy dz, \mathbf{Y} dx dy dz, \mathbf{Z} dx dy dz$$

de componenten zijn van de uitwendige kracht, op het element  $dx dy dz$  werkende.

Is elk der twee middenstoffen homogeen en isotroop, dan heeft men voor de componenten der drukkingen de volgende waarden

$$\left. \begin{aligned} X_x &= -2K \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} + \theta P \right), \\ Y_y &= -2K \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} + \theta P \right), \\ Z_z &= -2K \left( \frac{\partial \zeta}{\partial z} + \theta P \right), \\ Y_z = Z_y &= -K \left( \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right), \\ Z_x = X_z &= -K \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \right), \\ X_y = Y_x &= -K \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right). \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

Hierbij is  $P = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}$  gesteld, terwijl  $K$  en  $\theta$  constanten zijn, die van den aard van het medium afhangen. Dit zijn de coëfficiënten der elasticiteit.

Door deze waarden in (3) over te brengen en

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

te stellen, vindt men, voor het geval dat er geen uitwendige krachten werken, de bewegingsvergelijkingen in den volgenden zeer eenvoudigen vorm

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= K \Delta \xi + K(1 + 2\theta) \frac{\partial P}{\partial x}, \\ \rho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} &= K \Delta \eta + K(1 + 2\theta) \frac{\partial P}{\partial y}, \\ \rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} &= K \Delta \zeta + K(1 + 2\theta) \frac{\partial P}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5).$$

Men kan hieruit vervolgens afleiden, dat zich in het lichaam transversale en longitudinale trillingen kunnen voortplanten, en dat de voortplantingssnelheden  $v$  en  $V$  daarvan gegeven worden door

$$v^2 = \frac{K}{\rho}, \quad V^2 = 2(1 + \theta) \frac{K}{\rho} \dots \dots \dots (6).$$

Zijn dus  $K$ ,  $\theta$  en  $\rho$  de constanten, die betrekking hebben op den aether, in een doorschijnend lichaam aanwezig, dan stelt de grootheid  $v$ , die door (6) gegeven is, de voortplantingssnelheid van het licht voor.

§ 4. Wij zijn nu in staat, het vraagstuk der terugkaatsing en breking van het licht te behandelen. Daarbij stellen wij eens voor al vast, dat het eerste medium, waarin wij den invallenden lichtbundel hebben, zich aan de negatieve zijde van het  $y z$ -vlak bevindt en dat de grootheden, die op de twee middenstoffen betrekking hebben, door de indices 1 en 2 worden onderscheiden. Verder zullen wij steeds aannemen, dat de invallende, en dus ook de teruggekaatste en gebroken lichtbundel tot golf-front een plat vlak heeft, dat loodrecht op het  $x z$ -vlak staat, zoodat dit laatste het invalsvlak is. Wij stellen eindelijk de amplitudo van het invallende licht = 1 en zoeken door middel van de grensvoorwaarden, die wij boven opstelden, de amplitudines der teruggekaatste en gebroken trillingen. Zoodanig men weet, is het voldoende, dit onderzoek te doen voor de twee gevallen, dat de trillingen overal loodrecht op, of overal in het invalsvlak geschieden. Wij zullen ons voorloopig tot het eerste geval bepalen.

Alsdan zijn van de verplaatsingen  $\xi$  en  $\zeta = 0$ , terwijl  $\eta$  alleen van  $x$  en  $z$ , niet van  $y$  afhangt. Daaruit kan men afleiden, dat aan alle grensvoorwaarden van zelve voldaan is, behalve aan

$$\eta_1 = \eta_2 \quad \text{en} \quad (Y_x)_1 = (Y_x)_2.$$

Uit de omstandigheid, dat aan deze voorwaarden op elk oogenblik en aan elk punt van het grensvlak voldaan moet zijn, kan men tot de wetten der terugkaatsing en breking besluiten; tevens volgt daaruit, dat in het grensvlak de phase der drie lichtbundels dezelfde moet zijn. Nemen wij korthedshalve die omstandigheden aan, dan kunnen wij voor het invallende licht schrijven

$$\eta_1 = \cos \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{x}{v_1} \cos \alpha_1 - \frac{z}{v_1} \sin \alpha_1 + p \right),$$

waarbij  $T$  de oscillatietijd,  $\alpha_1$  de invalshoek is. Evenzoo wordt het teruggekaatste licht voorgesteld door

$$\eta_1'' = a_1 \cos \frac{2\pi}{T} \left( t + \frac{x}{v_1} \cos \alpha_1 - \frac{z}{v_1} \sin \alpha_1 + p \right)$$

en eindelijk, als  $\alpha_2$  de hoek van breking is, het gebroken licht door

$$\eta_2 = a_2 \cos \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{x}{v_2} \cos \alpha_2 - \frac{z}{v_2} \sin \alpha_2 + p \right).$$

Volgens de wet der breking is hierbij

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Neemt men in aanmerking, dat de geheele beweging in het eerste medium gegeven wordt door

$$\eta_1 = \eta_1' + \eta_1'',$$

dan vindt men gemakkelijk uit de twee grensvoorwaarden

$$\eta_1 = \eta_2 \quad \text{en} \quad (Y_x)_1 = (Y_x)_2$$

de beide vergelijkingen

$$1 + a_1 = a_2$$

$$\text{en} \quad \frac{K_1}{v_1} \cos \alpha_1 (1 - a_1) = \frac{K_2}{v_2} \cos \alpha_2 a_2.$$

Hieruit kunnen de onbekende amplitudines worden berekend en men vindt aldus voor het teruggekaatste licht

$$a_1 = \frac{\frac{K_1}{v_1} \cos \alpha_1 - \frac{K_2}{v_2} \cos \alpha_2}{\frac{K_1}{v_1} \cos \alpha_1 + \frac{K_2}{v_2} \cos \alpha_2} \dots \dots \dots (7).$$

§ 5. Daar bij gepolariseerd licht de trillingen of loodrecht op, of in het polarisatievlak plaats hebben, is het invallende licht, zooals wij dit boven hebben aangenomen, of in het invalsvlak, of loodrecht daarop gepolariseerd. Voor deze beide gevallen volgt echter uit de ervaring voor de amplitudo van het teruggekaatste licht

$$a_1 = \pm \frac{\sin (\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin (\alpha_1 + \alpha_2)} \dots \dots \dots (8).$$

$$\text{en} \quad a_1 = \pm \frac{\text{tg} (\alpha_1 - \alpha_2)}{\text{tg} (\alpha_1 + \alpha_2)}, \dots \dots \dots (9).$$

welke waarden stellig op zeer weinig na de juiste zijn. De formule (7) zal dus volkomen of bijna met een dezer uitdrukkingen moeten overstemmen, zal zij niet met de waarnemingen in strijd zijn. In haar algemeenen vorm vertoont zij echter die overeenstem-

ming volstrekt niet en wij zien ons dus reeds hier genoodzaakt, nieuwe onderstellingen in te voeren. Twee hypothesen laten zich nu opstellen, waarvan de eene (7) tot den vorm (8), de andere tot (9) terug brengt.

Wil men namelijk (7) tot (8) terug brengen, dan moet

$$\frac{\frac{K_1}{v_1} \cos \alpha_1 - \frac{K_2}{v_2} \cos \alpha_2}{\frac{K_1}{v_1} \cos \alpha_1 + \frac{K_2}{v_2} \cos \alpha_2} = \pm \frac{\sin (\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin (\alpha_1 + \alpha_2)} = \pm \frac{v_1 \cos \alpha_2 - v_2 \cos \alpha_1}{v_1 \cos \alpha_2 + v_2 \cos \alpha_1}$$

zijn. Gold hier 't bovenste teeken, dan zou men moeten hebben

$$\frac{K_1}{v_1} \cos \alpha_1 : \frac{K_2}{v_2} \cos \alpha_2 = v_1 \cos \alpha_2 : v_2 \cos \alpha_1,$$

wat niet voor elken invalshoek mogelijk is, daar  $K$  en  $v$  constant zijn.

Neemt men daarentegen het onderste teeken, dan moet

$$\frac{K_1}{v_1} \cos \alpha_1 : \frac{K_2}{v_2} \cos \alpha_2 = v_2 \cos \alpha_1 : v_1 \cos \alpha_2$$

zijn, en hieraan is voor elken invalshoek voldaan, als men

$$K_1 = K_2$$

stelt.

Alleen dus door de onderstelling te maken, dat de elasticiteit in de twee middenstoffen de zelfde is, en haar verschil alleen in een verschillende dichtheid te zoeken, kan men (7) tot (8) herleiden. Dit is de hypothese van FRESNEL en men moet daarbij aannemen, dat bij gepolariseerd licht de trillingsrichting loodrecht op het polarisatievlak staat.

Wil men daarentegen (7) tot (9) reduceeren, dan moet men stellen

$$\frac{\frac{K_1}{v_1} \cos \alpha_1 - \frac{K_2}{v_2} \cos \alpha_2}{\frac{K_1}{v_1} \cos \alpha_1 + \frac{K_2}{v_2} \cos \alpha_2} = \pm \frac{\operatorname{tg} (\alpha_1 - \alpha_2)}{\operatorname{tg} (\alpha_1 + \alpha_2)} = \pm \frac{v_1 \cos \alpha_1 - v_2 \cos \alpha_2}{v_1 \cos \alpha_1 + v_2 \cos \alpha_2}.$$

Hier zou de keus van het onderste teeken tot een betrekking voeren, die niet voor alle waarden van  $\alpha_1$  kan gelden. Wij nemen dus het bovenste teeken; dan volgt uit onze vergelijking

$$\frac{K_1}{v_1} \cos \alpha_1 : \frac{K_2}{v_2} \cos \alpha_2 = v_1 \cos \alpha_1 : v_2 \cos \alpha_2,$$

en hieraan is steeds voldaan, als men heeft

$$\frac{K_1}{v_1^2} = \frac{K_2}{v_2^2},$$

of, daar  $v_1^2 = \frac{K_1}{\rho_1}$  en  $v_2^2 = \frac{K_2}{\rho_2}$  is,

$$\rho_1 = \rho_2.$$

Men moet derhalve de dichtheden gelijk stellen, om (7) tot (9) te transformeeren. Deze onderstelling is van NEUMANN afkomstig en daarbij ligt de trillingsrichting in het polarisatievlak.

Het blijkt tevens, dat alleen bij een van deze bijzondere onderstellingen de formule (7) met de ervaring strookt en dat het niet mogelijk is, een verklaring der terugkaatsing van het licht te geven, wanneer aan de beide middenstoffen zoowel een verschillende dichtheid, als een verschillende elasticiteit wordt toegeschreven.

Van de beide hier besproken onderstellingen moet echter die van FRESNEL worden verworpen, daar zij lijnrecht in strijd is met het gedrag der kristallen. Want om dit te verklaren is het noodig aan te nemen, dat in kristallen de elasticiteit voor verschillende richtingen aanmerkelijk verschillend is, en hoe zal men dit rijmen met de omstandigheid, dat bij alle isotrope lichamen de elasticiteit van den aether geheel of bijna de zelfde waarde heeft? Wat de theorie van NEUMANN betreft, voor haar bestaat een dergelijk bezwaar niet. Wel schijnt de hypothese zelve eenigszins vreemd, daar men zich toch moeilijk in twee isotrope middenstoffen een verschillende elasticiteit des aethers kan voorstellen, verbonden met absoluut gelijke dichtheid, maar men kan de zaak zoo opvatten, dat de verschillen in dichtheid slechts zeer klein behoeven te zijn, om een aanmerkelijk verschil in elasticiteit ten gevolge te hebben. Bij een eerste benadering zou men dan die kleine verschillen in dichtheid kunnen verwaarloozen op een dergelijke wijze, als men bij vloeistoffen de samendrukbaarheid ter zijde mag stellen.

§ 6. Nu wij aldus gezien hebben, dat er, wanneer men den aether geheel gelijk stelt met een elastisch vast lichaam, waarop geene uitwendige krachten werken, zeer bijzondere onderstellingen noodig zijn, om tot een juiste theorie te geraken, behoeft het ons niet te verwonderen, dat men getracht heeft, zich de lichtverschijnselen op eenigszins andere wijze voor te stellen.

Inderdaad is de aether in het algemeen niet vrij, maar liggen tusschen de aetherdeeltjes de moleculen der gewone stof verspreid



en' het ligt voor de hand, ook aan deze bij de lichtverschijnselen een rol toe te kennen. Het is vooral CAUCHY 1) geweest, die, bij zijne beschouwingen omtrent de theorie van het licht, de onderlinge werking van dit dubbel stelsel moleculen ten grondslag heeft gelegd.

Trachten wij na te gaan, welken invloed deze onderstelling op de lichtbeweging in het algemeen en op de terugkaatsing in het bijzonder moet hebben.

Daarbij zullen we, wat bij een eerste benadering geoorloofd is, afzien van de omstandigheid, dat men den aether in een lichaam nu, strikt genomen, niet meer als homogeen mag beschouwen. Door het behouden der homogeneïteit zullen wij geen merkbare fouten begaan, zoo lang op elke molecule een groot aantal andere werken en zoo lang de onderlinge afstand der op elkaar werkende deeltjes zeer klein is, ten opzichte van de golflengte.

Voor de elastische krachten tusschen de aetherdeeltjes onderling geldt dan nog alles, wat wij in §§ 2 en 3 gezegd hebben. Maar wij moeten daar nu bijvoegen de krachten, die door de moleculen van het tweede stelsel worden uitgeoefend. Om hiervoor een uitdrukking te vinden zij  $m'_k$  een dezer moleculen, werkende op het aetherdeeltje  $m$ ; wij denken ons daarbij de verschillende moleculen  $m'$ , die in de nabijheid van  $m$  liggen, door de indices  $k$  onderscheiden. Laat, in den evenwichtsstand,  $x, y, z$  de coördinaten van  $m$ ,  $x_k, y_k, z_k$  die van  $m'_k$ , eindelijk  $r_k$  hun onderlinge afstand zijn. Stellen wij

$$x_k - x = \mathbf{x}_k, y_k - y = \mathbf{y}_k, z_k - z = \mathbf{z}_k,$$

dan is derhalve

$$r_k^2 = \mathbf{x}_k^2 + \mathbf{y}_k^2 + \mathbf{z}_k^2.$$

Noemen wij verder, even als vroeger, de verplaatsingen der aetherdeeltjes  $\xi, \eta, \zeta$ , daarentegen die van de tusschenliggende moleculen  $\xi', \eta', \zeta'$ , dan zijn, ten gevolge van die verplaatsingen,  $\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k, \mathbf{z}_k$  toegenomen met

$$\xi'_k - \xi, \eta'_k - \eta, \zeta'_k - \zeta$$

Daardoor hebben ook de componenten van de kracht, door  $m'_k$  op  $m$  uitgeoefend, zekere aangroeiingen ondergaan. Ten einde de geheele kracht te vinden, op  $m$  werkende, is het voldoende, alleen

1) Men zie b. v. CAUCHY, Mémoire sur les vibrations d'un double système de molécules. Comptes rendus, 1849.

die aangroeiingen te nemen en over al de werkende moleculen van het tweede stelsel te sommeeren, daar er toch, wanneer de verplaatsingen 0 zijn, evenwicht bestaat.

Zij nu

$$r_k F(r_k)$$

de kracht, waarmede  $m'_k$   $m$  aantrekt, dus de componenten daarvan

$$\mathbf{x}_k F(r_k), \mathbf{y}_k F(r_k), \mathbf{z}_k F(r_k),$$

dan is de aangroeiing der eerste

$$X_k = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_k} \left( \mathbf{x}_k F(r_k) \right) (\xi'_k - \xi) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_k} \left( \mathbf{x}_k F(r_k) \right) (\eta'_k - \eta) + \\ + \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}_k} \left( \mathbf{x}_k F(r_k) \right) (\zeta'_k - \zeta),$$

waarbij ondersteld is, dat de verplaatsingen der deeltjes zeer klein zijn ten opzichte van hun onderlingen afstand.

Door vervolgens naar  $k$  te sommeeren verkrijgt men voor de totale kracht, door de deeltjes van het tweede stelsel, in de richting der  $x$ -as, op  $m$  uitgeoefend,

$$X = \sum X_k.$$

Eenvoudiger uitdrukkingen verkrijgt men door in aanmerking te nemen, dat voor alle werkende moleculen  $\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k, \mathbf{z}_k$  zeer klein zijn. Beschouwt men nl.  $\xi'_k, \eta'_k, \zeta'_k$  als functiën der coördinaten en verstaat men onder  $\xi', \eta', \zeta'$  de waarden, die zij hebben in het punt  $x, y, z$ , dan geeft ons de reeks van TAYLOR

$$\xi'_k - \xi = \xi' - \xi + \frac{\partial \xi'}{\partial x} \mathbf{x}_k + \frac{\partial \xi'}{\partial y} \mathbf{y}_k + \frac{\partial \xi'}{\partial z} \mathbf{z}_k + \\ + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \xi'}{\partial x^2} \mathbf{x}_k^2 + \frac{\partial^2 \xi'}{\partial y^2} \mathbf{y}_k^2 + \frac{\partial^2 \xi'}{\partial z^2} \mathbf{z}_k^2 + 2 \frac{\partial^2 \xi'}{\partial y \partial x} \mathbf{y}_k \mathbf{x}_k + \right. \\ \left. + 2 \frac{\partial^2 \xi'}{\partial z \partial x} \mathbf{z}_k \mathbf{x}_k + 2 \frac{\partial^2 \xi'}{\partial x \partial y} \mathbf{x}_k \mathbf{y}_k \right),$$

wanneer wij de hogere machten van  $\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k, \mathbf{z}_k$  verwaarloozen.

Eenzoo kan men waarden voor  $\eta'_k - \eta, \zeta'_k - \zeta$  opstellen. Brengt men deze vervolgens in de uitdrukking voor  $X_k$  over, dan vallen bij het sommeeren, ten gevolge van de homogeniteit, de eerste differentiaalquotienten van  $\xi', \eta', \zeta'$  weg. Waren nu al de moleculen aan elkander gelijk, zoodat zij slechts één stelsel uitmaakten, dan zou ook  $\xi' = \xi$  zijn en zouden bij het sommeeren alleen termen overblijven, die de tweede differentiaalquotienten van  $\xi', \eta', \zeta'$  bevatten. Het is echter het natuurlijkst, in ons geval aan te nemen, dat de aetheratomen veel kleinere massa hebben dan de daar-

tusschen liggende deeltjes en dat dien ten gevolge  $\xi'$ ,  $\eta'$ ,  $\zeta'$  klein zijn ten opzichte van  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ . Het gevolg daarvan is, dat men juist die termen met de tweede differentiaalquotienten mag verwaarloozen, zoolang de uitdrukkingen als

$$\frac{\partial^2 \xi'}{\partial x^2} \mathbf{x}_k^2$$

zeer klein zijn ten opzichte van  $\xi'$  en dus ook ten opzichte van  $\xi' - \xi$ . Dat is echter bij een voortplanting van trillingen het geval, mits de afstand, waarop twee moleculen op elkander werken, zeer klein is, vergeleken met de golflengte.

Dit aannemende en dus de termen met de tweede differentiaalquotienten weg latende, verkrijgen wij ten slotte

$$X = (\xi' - \xi) \Sigma \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_k} (\mathbf{x}_k F(r_k)) + (\eta' - \eta) \Sigma \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_k} (\mathbf{x}_k F(r_k)) + (\zeta' - \zeta) \Sigma \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}_k} (\mathbf{x}_k F(r_k)),$$

of, als wij de differentiatie uitvoeren en in aanmerking nemen, dat ons medium homogeen en isotroop is,

$$X = \Sigma \left\{ F(r_k) + \mathbf{x}_k^2 \frac{F'(r_k)}{r_k} \right\} (\xi' - \xi).$$

Zijn er, in het element  $dx dy dz$ ,  $p dx dy dz$  aetherdeeltjes aanwezig en is de kracht, door het tweede stel moleculen op dit element uitgeoefend,

$$\mathbf{X} dx dy dz, \quad \mathbf{Y} dx dy dz, \quad \mathbf{Z} dx dy dz,$$

dan is

$$\mathbf{X}_x = p \Sigma \left\{ F(r_k) + \mathbf{x}_k^2 \frac{F'(r_k)}{r_k} \right\} (\xi' - \xi) = A (\xi' - \xi)$$

en evenzoo

$$\mathbf{Y} = A (\eta' - \eta), \quad \mathbf{Z} = A (\zeta' - \zeta),$$

waarbij  $A$  een constante is, die van den aard van het lichaam afhangt. De bewegingsvergelijkingen van den aether worden eindelijk, daar de laatste krachten als uitwendige zijn te beschouwen,

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - A (\xi' - \xi) &= K \Delta \xi + K(1 + 2\theta) \frac{\partial P}{\partial x}, \\ \rho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - A (\eta' - \eta) &= K \Delta \eta + K(1 + 2\theta) \frac{\partial P}{\partial y}, \\ \rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - A (\zeta' - \zeta) &= K \Delta \zeta + K(1 + 2\theta) \frac{\partial P}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \dots (10)$$

Op dezelfde wijze kan men de bewegingsvergelijkingen van het tweede stelsel moleculen verkrijgen. Men vindt daarvoor

$$\left. \begin{aligned} \varrho' \frac{\partial^2 \xi'}{\partial t^2} - A(\xi - \xi') &= K' \Delta \xi + K'(1 + 2\theta) \frac{\partial P'}{\partial x}, \\ \varrho' \frac{\partial^2 \eta'}{\partial t^2} - A(\eta - \eta') &= K' \Delta \eta' + K'(1 + 2\theta) \frac{\partial P'}{\partial y}, \\ \varrho' \frac{\partial^2 \zeta'}{\partial t^2} - A(\zeta - \zeta') &= K' \Delta \zeta' + K'(1 + 2\theta) \frac{\partial P'}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \dots (11)$$

Hierbij hebben  $\varrho'$ ,  $K'$ ,  $\theta'$  betrekking op deze deeltjes, op zich zelve beschouwd, terwijl uit de gelijkheid der werking en terugwerking tusschen de twee stelsels volgt, dat  $A$  in (10) en (11) dezelfde waarde moet hebben.

De aldus verkregen vergelijkingen zijn voldoende, om de 6 grootheden  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ ,  $\xi'$ ,  $\eta'$ ,  $\zeta'$  als functiën van  $x$ ,  $y$ ,  $z$  en  $t$  te bepalen. Men kan er uit afleiden, dat alle moleculen gemeenschappelijk aan een voortplanting van trillingen kunnen deelnemen, en dat de voortplantingssnelheden van transversale en longitudinale trillingen gegeven worden door de vergelijkingen

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{K}{v^2} - \varrho + A \left( \frac{T}{2\pi} \right)^2 \right\} \left\{ \frac{K'}{v^2} - \varrho' + A \left( \frac{T}{2\pi} \right)^2 \right\} &= A^2 \left( \frac{T}{2\pi} \right)^4, \dots (12) \\ \left\{ \frac{2K(1+\theta)}{V^2} - \varrho + A \left( \frac{T}{2\pi} \right)^2 \right\} \left\{ \frac{2K'(1+\theta')}{V^2} - \varrho' + A \left( \frac{T}{2\pi} \right)^2 \right\} &= \\ &= A^2 \left( \frac{T}{2\pi} \right)^4. \dots (13) \end{aligned}$$

Het meest voor de hand ligt de onderstelling, die ook CAUCHY zeer waarschijnlijk acht, dat de massa der moleculen van het tweede stelsel die der aetherdeeltjes zoo zeer overtreft, dat men de beweging der eerste mag verwaarloozen en ze dus als vaste aantrekkingsmiddelpunten beschouwen. Dan kan men in (10)  $\xi'$ ,  $\eta'$ ,  $\zeta' = 0$  stellen en zijn deze vergelijkingen ter bepaling van  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  voldoende. Men vindt dan voor de voortplantingssnelheden

$$v^2 = \frac{K}{\varrho - A \left( \frac{T}{2\pi} \right)^2}, \dots (14)$$

$$V^2 = \frac{2K(1+\theta)}{\varrho - A \left( \frac{T}{2\pi} \right)^2}, \dots (15)$$

§ 7. Om na te gaan, wat er bij de beschouwingswijze, die wij

nu hebben leeren kennen, van de verklaring der terugkaatsing wordt, dienen wij vooreerst de voorwaarden te kennen, waaraan voldaan moet zijn aan de grens van twee middenstoffen, die beide in het algemeen aether en een tweede stel moleculen kunnen bevatten. CAUCHY 1) zegt hieromtrent het volgende:

»Pour trouver les conditions auxquelles devront satisfaire, sur la surface de séparation des deux corps, les trois déplacements d'une molécule d'éther, mesurés parallèlement aux axes coordonnés, il suffira de considérer les molécules d'éther comprises dans les deux corps comme formant un système unique de molécules, et d'admettre que, dans le mouvement de ce système, les déplacements moléculaires, et leurs dérivées prises par rapport à l'abscisse  $x$ , ou du moins celles de ces dérivées que ne déterminent pas les équations différentielles des mouvements infiniment petits, varient par degrés insensibles avec cette même abscisse.»

Dat men, zooals CAUCHY zegt, den aether in de beide middenstoffen als één geheel kan beschouwen, is zeker in zoo verre waar, dat men zich aan de grens den aether der twee media als vast verbonden moet voorstellen, maar dit neemt niet weg, dat daar zijne eigenschappen een sprong kunnen maken. Dan heeft men echter geen recht tot de bewering, dat alle grootheden, die de beweging bepalen, aan de bedoelde grens doorlopend zullen zijn; ja, men zal zelfs niet al die grootheden doorlopend mogen stellen, zonder voorwaarden te krijgen, die met elkander in strijd zijn. CAUCHY eischt dan ook niet de doorlopendheid van die differentiaalquotienten (nl. de tweede en hoogere), die door de differentiaalvergelijkingen bepaald worden. Het wordt echter niet recht duidelijk, waarom die differentiaalquotienten niet doorlopend behoeven te zijn, de eerste daarentegen wel. Deze omstandigheden maken het, dunkt me, niet overbodig, te onderzoeken, of men de grensvoorwaarden van CAUCHY moet en of men ze mag aannemen.

---

1) CAUCHY, Mémoire sur les conditions relatives aux limites des corps. Comptes rendus, 1848.

Wanneer men in het algemeen verschillende eigenschappen aan den aether der beide lichamen toekent en bovendien in beide ook de tusschenliggende moleculen aan de beweging laat deelnemen, is het opstellen der grensvergelijkingen geen gemakkelijke zaak. Want men heeft dan niet alleen met de voorwaarden voor den aether, maar bovendien met die voor de gewone stof te doen, en hoe zijn in dit opzicht de twee middenstoffen met elkander verbonden? Slechts dan wordt de zaak eenvoudiger, wanneer men de, reeds in de vorige § aangewezen, onderstelling maakt, dat de tusschenliggende moleculen in rust zijn; dan toch heeft men alleen voor den aether grensvoorwaarden op te stellen. Men kan dan verder de krachten, door de gewone stofdeeltjes uitgeoefend, als uitwendige krachten, op den aether werkende, beschouwen. Al werken echter dergelijke krachten, de voorwaarden (1) en (2) van § 2 blijven nog geldig, zooals uit de afleiding dier vergelijkingen blijkt. Voor de terugkaatsing van licht, waarvan de trillingen loodrecht op het invalsvlak plaats hebben, blijft derhalve het onderzoek van § 4 onveranderd bestaan, dus ook de vergelijking (7), waartoe het ons bracht. Ook hier hebben wij dus slechts na te gaan, hoe men (7) tot (8), of (9) zal reduceeren.

Om (7) tot (9) terug te brengen is weer, even als in § 5, noodig, dat

$$\frac{K_1}{v_1^2} = \frac{K_2}{v_2^2}$$

is; hier wordt die voorwaarde, daar de voortplantingssnelheid door (14) gegeven is,

$$q_1 - A_1 \left( \frac{T}{2\pi} \right)^2 = q_2 - A_2 \left( \frac{T}{2\pi} \right)^2,$$

een zeer gekunstelde betrekking, tenzij  $q_1 = q_2$  en  $A_1 = A_2$  ware. Was echter  $A$  voor alle lichamen even groot, dan zou  $A = 0$  moeten zijn en zou dus nergens een merkbare inwerking van de gewone stof op den aether mogen worden aangenomen. Dan waren wij teruggevoerd tot de eenvoudige hypothese van NEUMANN.

Wil men daarentegen (7) tot (8) herleiden, dan is, blijkens § 5, slechts noodig, dat

$$K_1 = K_2$$

wordt gesteld. Voor den aether, op zich zelve beschouwd, moet dus de elasticiteitscoëfficiënt  $K$  overal dezelfde waarde hebben. Om-

trent de trillingsrichting heeft men zich daarbij aan de onderstelling van FRESNEL te houden. Maar de aldus verkregen theorie is niet meer, zooals de oorspronkelijke beschouwingswijze van FRESNEL, met de verschijnselen der dubbele breking in strijd. Immers, al moeten wij, consequent blijvende, nu ook in kristallen aan  $K$  voor alle richtingen dezelfde waarde toekennen, de constante  $A$  kan nu van de voortplantingsrichting afhankelijk zijn en dit zal steeds het geval moeten zijn, zoodra de verdeeling van de gewone stofdeeltjes niet meer isotroop is.

Neemt men eens aan, dat  $K$  overal even groot is, dan dient men dit ook voor  $\theta$  te onderstellen. Alsdan gaan echter de grensvoorwaarden (1) en (2) over in de volgende:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 = \xi_2, \eta_1 = \eta_2, \zeta_1 = \zeta_2, \dots \dots \dots \\ \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_1 = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_2, \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)_1 = \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)_2, \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)_1 = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)_2, \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots (16).$$

zoodat wij dan juist de voorwaarden verkrijgen, die door CAUCHY zijn gebezigd.

Voor wij verder gaan moet ik nog op een bezwaar wijzen, waaraan de theorie der laatste §§ onderhevig is.

Hetzij men de vergelijkingen (12) en (13), of (14) en (15) kiese, het blijkt, dat de voortplantingssnelheid niet meer onafhankelijk is van den trillingstijd. Dit zou een dispersie ten gevolge hebben, niet, zooals de werkelijk waargenomen kleurschifting, met het karakter van een bijkomende omstandigheid, maar een dispersie, die reeds bij een eerste benadering optreedt en dus al licht te groot zou worden. Bovendien kan het gebeuren, dat de door de formules aangewezen dispersie een omgekeerde is. Immers, wij kunnen alleen dan een eenigszins zekere theorie der terugkaatsing verkrijgen, wanneer wij de gewone stofdeeltjes in rust laten en dus voor de voortplantingssnelheid de uitdrukking (14) kiezen. Daar wij verder overal voor den aether, op zich zelve genomen, dezelfde elasticiteit moeten hebben, is 't het natuurlijkst, ook overal de dichtheid gelijk te stellen, zoodat twee middenstoffen alleen in de waarde van  $A$  van elkander kunnen verschillen. Daar nu de ondervinding leert, dat  $v$  in de luchtledige ruimte, dus voor  $A=0$ , het grootst is, moet in alle andere lichamen  $A$  negatief worden genomen. Dan wordt echter  $v$  des te kleiner, naarmate  $T$  grooter wordt, wat op een omgekeerde kleurschifting wijst.

§ 8. Stuit men reeds op bezwaren, wanneer men het eerste en

eenvoudigste geval der terugkaatsing beschouwt, nieuwe moeilijkheden rijzen er op, wanneer men tot het geval overgaat, dat de trillingsrichting in het invalsvlak ligt. Daar alsdan alleen  $\eta = 0$  is, is slechts aan twee van de zes grensvoorwaarden van zelve voldaan, zoodat men vier vergelijkingen overhoudt. Gaat men nu met FRESNEL en NEUMANN, van de onderstelling uit, dat er alleen een teruggekaatste en een gebroken lichtbundel met transversale trillingen ontstaan, dan heeft men in de amplitudines daarvan twee onbekenden en het blijkt dan, dat deze niet zoo kunnen bepaald worden, dat aan de vier vergelijkingen voldaan is. Daarom alleen reeds moeten de eenvoudige theorieën van FRESNEL en NEUMANN worden verworpen; beiden begingen toch de fout, dat zij niet alle voorwaarden van het vraagstuk in rekening brachten.

CAUCHY zag het eerst de noodzakelijkheid in, de zaak anders op te vatten. Hij nam in aanmerking, dat er in dit geval, behalve de twee bovengenoemde lichtbundels, ook nog teruggekaatste en gebroken longitudinale trillingen ontstaan. De amplitudines daarvan zijn dan twee nieuwe onbekenden, zoodat het aantal der onbekenden aan dat der vergelijkingen gelijk is geworden. Wij zullen in korte trekken de oplossing aangeven, ons daarbij aan de theorie van CAUCHY houdende en dus de voorwaarden (16) kiezende.

Voor de invallende lichttrillingen schrijven wij daartoe

$$\left. \begin{aligned} \xi'_1 &= -\sin \alpha_1 \cos \psi'_1, \\ \zeta'_1 &= \cos \alpha_1 \cos \psi'_1, \end{aligned} \right\} \psi'_1 = \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{x}{v_1} \cos \alpha_1 - \frac{z}{v_1} \sin \alpha_1 + p \right),$$

voor de teruggekaatste transversale trillingen

$$\left. \begin{aligned} \xi''_1 &= -a_1 \sin \alpha_1 \cos \psi''_1, \\ \zeta''_1 &= -a_1 \cos \alpha_1 \cos \psi''_1, \end{aligned} \right\} \psi''_1 = \frac{2\pi}{T} \left( t + \frac{x}{v_1} \cos \alpha_1 - \frac{z}{v_1} \sin \alpha_1 + p \right),$$

en voor de teruggekaatste longitudinale trillingen

$$\left. \begin{aligned} \xi'''_1 &= -b_1 \cos \beta_1 \cos \psi'''_1, \\ \zeta'''_1 &= b_1 \sin \beta_1 \cos \psi'''_1, \end{aligned} \right\} \psi'''_1 = \frac{2\pi}{T} \left( t + \frac{x}{v_1} \cos \beta_1 - \frac{z}{v_1} \sin \beta_1 + p \right),$$

waarbij de hoek van terugkaatsing voor deze trillingen  $\beta_1$  is genoemd.

Evenzoo kunnen wij de gebroken stralen voorstellen; voor de transversale trillingen hebben wij dan

$$\left. \begin{aligned} \xi_2 &= -a_2 \sin \alpha_2 \cos \psi_2, \\ \zeta_2 &= a_2 \cos \alpha_2 \cos \psi_2, \end{aligned} \right\} \psi_2 = \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{x}{v_2} \cos \alpha_2 - \frac{z}{v_2} \sin \alpha_2 + p \right),$$

en voor de longitudinale

$$\left. \begin{aligned} \xi'_2 &= b_2 \cos \beta_2 \cos \psi'_2, \\ \zeta'_2 &= b_2 \sin \beta_2 \sin \psi'_2, \end{aligned} \right\} \psi'_2 = \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{x}{v_2} \cos \beta_2 - \frac{z}{v_2} \sin \beta_2 + p \right).$$



Volgens de wetten der terugkaatsing en breking — die men ook hier uit de grensvoorwaarden kon afleiden — is

$$\frac{\sin \alpha_1}{v_1} = \frac{\sin \alpha_2}{v_2} = \frac{\sin \beta_1}{V_1} = \frac{\sin \beta_2}{V_2}, \dots (17)$$

zoodat aan de grens der twee lichamen

$$\psi_1' = \psi_1'' = \psi_1''' = \psi_2 = \psi_2'$$

is. Door dit in aanmerking te nemen, vindt men gemakkelijk uit de grensvoorwaarden de volgende vergelijkingen ter bepaling der vier onbekenden  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$ ,  $b_2$

$$(1 + a_1) \sin \alpha_1 + b_1 \cos \beta_1 = a_2 \sin \alpha_2 - b_2 \cos \beta_2,$$

$$(1 - a_1) \cos \alpha_1 + b_1 \sin \beta_1 = a_2 \cos \alpha_2 + b_2 \sin \beta_2,$$

$$(1 - a_1) \cos \alpha_1 - b_1 \frac{\cos^2 \beta_1}{\sin \beta_1} = a_2 \cos \alpha_2 - b_2 \frac{\cos^2 \beta_2}{\sin \beta_2},$$

$$(1 + a_1) \frac{\cos^2 \alpha_1}{\sin \alpha_1} - b_1 \cos \beta_1 = a_2 \frac{\cos^2 \alpha_2}{\sin \alpha_2} + b_2 \cos \beta_2.$$

Hieruit verkrijgt men voor het teruggekaatste licht de vrij eenvoudige uitdrukking

$$a_1 = \frac{\cot(\alpha_1 + \alpha_2) + q}{\cot(\alpha_1 - \alpha_2) - q}, \dots (18)$$

waarbij  $q = -\operatorname{tg}(\beta_1 - \beta_2)$  is.

§ 9. De ondervinding leert, dat bij alle doorschijnende stoffen, op zeer weinig na, de vergelijking (9) geldig is en derhalve  $a_1$  onafhankelijk is van de voortplantingssnelheden der longitudinale trillingen. Dit is alleen dan mogelijk, wanneer  $q$  zeer klein is en men zal derhalve omtrent de longitudinale trillingen zoodanige hypothesen dienen te maken, dat dit het geval wordt. Daar komt nog een andere omstandigheid bij. Men heeft nooit op eenige wijze het bestaan van een teruggekaast en gebroken golfstelsel met longitudinale trillingen bemerkt, hetzij rechtstreeks, hetzij daardoor, dat een deel der intensiteit van het invallende licht niet in het teruggekaatste en gebroken licht is weer te vinden. Derhalve moet nog worden aangenomen, dat de longitudinale trillingen geen eigenlijken straal kunnen vormen. Dit is mogelijk, zoodra de waarden van  $\beta_1$  en  $\beta_2$ , die door (17) worden opgeleverd, onbestaanbaar zijn. Men vindt dan, in plaats van de golfstelsels met longitudinale trillingen, een bewegingstoestand, waarbij de amplitudo, bij toe-

nemenden afstand van het grensvlak, zeer snel afneemt. Tevens verkrijgt dan  $q$  een onbestaanbare waarde en men kan daaruit afleiden, dat het teruggekaatste licht een bepaalde phaseverandering ondergaan heeft. Steeds moet echter bij doorschijnende stoffen  $q$  zeer klein worden.

Men heeft twee wegen gevolgd, om  $\beta_1$  en  $\beta_2$  onbestaanbare waarden te doen aannemen. De eerste bestaat hierin, dat de voortplantingssnelheden der longitudinale trillingen ondersteld worden, zeer groot te zijn. Men vindt dan, door de tweede en hoogere machten van  $\frac{V_1^2}{V_1^2}$  en  $\frac{V_1^2}{V_2^2}$  te verwaarloozen, na eenige herleiding

$$q = i \frac{V_1^2 - V_2^2}{V_1^2 + V_2^2},$$

en zal hierbij  $q$  zeer klein worden, dan moeten ook  $V_1$  en  $V_2$  zeer weinig verschillen. Er is, voor zoover ik weet, nooit eenige grond voor aangegeven, aan de theorie ontleend, waarom dit zoo zijn moet. Integendeel, wanneer wij voor de voortplantingssnelheden de uitdrukkingen (14) en (15) nemen, die wij als de meest waarschijnlijke leerden kennen, dan is

$$\frac{V_1}{V_1} = \frac{V_2}{V_2},$$

daar  $\theta_1 = \theta_2$  gesteld is.

Daaruit volgt echter, als  $n$  de brekingsindex is,

$$q = i \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1},$$

welke waarde veel te groot is.

Men kan dit bezwaar ontgaan door voor de voortplantingssnelheden niet (14) en (15), maar b. v. (12) en (13) te nemen. Dan wordt echter vooreerst, zooals wij in § 7 opmerkten, de geheele theorie der terugkausing twijfelachtig en men zal toch nog bijzondere bijonderstellingen moeten maken, om  $V_1$  en  $V_2$  bijna gelijk te doen zijn.

In de tweede plaats heeft men aangenomen, dat zich in het algemeen longitudinale trillingen slechts kunnen voortplanten met voortdurend kleiner wordende amplitudo; ook dit voert tot dergelijke resultaten, als de vorige onderstelling. Men kan dat verschijnsel opvatten als een absorptie der longitudinale trillingen. Maar, hetzij die absorptie voortspruit uit een onvolkomen elasticiteit van

den aether op zich zelve, of uit de medewerking van de moleculen der gewone stof, steeds blijft het een raadsel, hoe zij in alle lichamen bestaan zou, die voor transversale trillingen volkomen (of bijna) doorschijnend zijn.

Men kan ook nog zonder absorptie tot een bewegingstoestand van den aether komen, zooals men dien hier noodig heeft, wanneer men aanneemt, dat de voor  $V^2$  uit de theorie afgeleide waarde negatief wordt. Daar dit ook in de luchtledige ruimte 't geval zou moeten zijn, waarvoor de vergelijkingen (6) gelden, zou dan  $1 + \theta$ , dus ook  $\theta$  negatief moeten zijn. Stelt men de uitdrukking voor  $\theta$  op, afgeleid uit de beschouwing der moleculaire krachten van den aether, dan is het niet onmiddellijk in te zien, of  $\theta$  al of niet negatief mag genomen worden. Maar men kan aantoonen, dat bij een negatieve waarde van  $1 + \theta$  het evenwicht van den aether labiel zou zijn, wat zeker niemand zou willen aannemen.

Ik heb hier slechts in hoofdtrekken den weg aangegeven, dien men heeft ingeslagen, om de vergelijking (18) op zeer weinig na met (9) te doen overeenstemmen. 1) Ik zal de pogingen, die men heeft aangewend, om hiertoe te geraken, door een geleidelijken overgang van het eene medium tot het andere aan te nemen, geheel voorbijgaan. Want, gesteld al, dat men op eenige wijze hierin geslaagd was, en dus voor isotrope stoffen een voldoende theorie der terugkaatsing had gevestigd, dan kan men nog bewijzen, dat deze in strijd is met de waarnemingen, die men omtrent de terugkaatsing van het licht door kristallen verricht heeft.

§ 10. Het is niet noodig, hier in een uitvoerige beschouwing te treden van de lichtbeweging in kristallen. Genoeg zij het, in herinnering te brengen, hoe het bij eenassige kristallen met de trillingsrichting gesteld is, wanneer men aanneemt, dat bij gepolariseerd licht trillingsvlak en polarisatievlak loodrecht op elkaar staan. Dan ligt, zoowel bij een gewonen, als bij een buitengewonen lichtstraal, de trillingsrichting in het golffront; bovendien ligt zij bij den laatsten in het vlak, dat door de voortplantingsrichting en de optische as gebracht wordt, bij den gewonen straal daarentegen loodrecht op dat vlak.

Laten wij nu licht terugkaatsen door het platte grensvlak van

1) Voor een meer uitvoerige beschouwing van de in deze § besproken onderwerpen zie men BEER, Pogg. Ann. 91, 92; EISENLOHR, Pogg. Ann. 104; v. LANG, Einleitung in die theor. Phys., p. 264; LUNDQUIST, Pogg. Ann., 152.

een eenassig kristal en dat wel zoo, dat de optische as in het invalsvlak ligt. Nemen wij daarbij aan, dat de trillingen van het invallende licht in het invalsvlak geschieden, dan kan er geen gewone straal tot stand komen, wel de buitengewone straal, wiens trillingsrichting ook in het invalsvlak ligt. Bovendien zal ook hier een teruggekaatst en gebroken golfstelsel met longitudinale trillingen ontstaan en het is duidelijk, dat in ons geval voor het laatste de normaal op het golfvront en de daarmee samenvallende trillingsrichting in het invalsvlak zullen liggen.

Verder is het naar de beschouwing van § 7 duidelijk, dat men ook nu nog de vergelijkingen (16) als grensvoorwaarden moet kiezen, daar men toch, consequent blijvende, dient aan te nemen, dat in het kristal de elasticiteit van den aether op zich zelve beschouwd voor alle richtingen gelijk is aan de waarde, die zij in eenig isotroop medium heeft. Trouwens, op welken grond men ook tot de bedoelde vergelijkingen moge besluiten, daar zij geen grootheden bevatten, die van den aard van het medium afhangen, ligt het voor de hand, ze ook op de terugkaatsing door kristallen toe te passen. Het is dan ook zeker de bedoeling van CAUCHY geweest, dat zijne voorwaarden ook aan de grens van een isotroop medium en een kristal moeten gelden. Na dit vastgesteld te hebben, kunnen wij gemakkelijk de intensiteit van het teruggekaatste licht berekenen. Noemen wij  $\alpha_2$  den hoek, dien de voortplantingsrichting (nl. de normaal op het golfvront) van den buitengewonen lichtstraal met de normaal op het grensvlak maakt, en is  $\beta_2$  de overeenkomstige hoek voor de longitudinale trillingen in het kristal, dan gelden alle vergelijkingen van § 8 onveranderd en wordt dus de gesteldheid van het teruggekaatste licht nog door (18) gegeven. Maakt men nu bij isotrope stoffen zoodanige onderstellingen, dat  $\eta$  zeer klein wordt en dus op weinig na de formule (9) geldt, dan dient men hetzelfde bij de terugkaatsing door een kristal te doen, zoodat ook daarvoor als eerste benadering de betrekking

$$a_1 = \frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2)}{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

moet gelden.

Vraagt men naar den polarisatiehoek, den invalshoek dus, waarbij  $a_1 = 0$  wordt, dan moet daarvoor

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 90^\circ$$

zijn.

Zij nu  $L$  de hoek, dien de optische as met de normaal op het grensvlak maakt, dan is de hoek tusschen de optische as en de normaal der gebroken golven

$$L - \alpha_2.$$

Zijn  $\omega$  en  $\varepsilon$  de hoofdbrekingsindices, dan is, volgens de wet der breking, 1)

$$\sin^2 \alpha_2 = \sin^2 \alpha_1 \left[ \frac{1}{\varepsilon^2} + \left( \frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\varepsilon^2} \right) \cos^2 (L - \alpha_2) \right].$$

Zal derhalve  $\alpha_1 + \alpha_2 = 90^\circ$  zijn, dan moet men hebben

$$\operatorname{tg}^2 \alpha_2 = \frac{1}{\varepsilon^2} + \left( \frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\varepsilon^2} \right) \cos^2 (L - \alpha_2). \quad . \quad . \quad (19).$$

Uit de constanten van het kristal en den hoek  $L$  kan men, door middel van deze vergelijking,  $\alpha_2$  berekenen; het complement daarvan is dan de gezochte polarisatiehoek.

Nu heeft SEEBECK in een aantal gevallen zeer nauwkeurig den polarisatiehoek gemeten, zoodat men 't middel heeft, de vergelijking (19) met de waarnemingen te vergelijken. Nemen wij het bijzondere geval, dat de optische as in het grensvlak ligt, dan is  $L = 90^\circ$  en wordt de vergelijking (19)

$$\operatorname{tg}^2 \alpha_2 = \frac{1}{\varepsilon^2} + \left( \frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\varepsilon^2} \right) \sin^2 \alpha_2.$$

Bij den overgang uit lucht in kalkspaat is (voor de streep  $D$  van het spectrum)  $\omega = 1,6585$ ,  $\varepsilon = 1,4864$ ; ik vind daaruit, door de bovenstaande vergelijking,  $\alpha_2 = 33^\circ 8'$ , dus voor den polarisatiehoek

$$56^\circ 52',$$

terwijl de proeven van SEEBECK in dit geval

$$54^\circ 2'$$

gaven 2). Er bestaat derhalve een afwijking van  $2^\circ 50'$ , veel grooter dan met de nauwkeurigheid van SEEBECK's bepalingen is overeen te brengen. Die nauwkeurigheid is ook hierdoor bevestigd, dat de door SEEBECK gegeven waarden in alle gevallen zeer goed overeenstemmen met andere formules voor de terugkaatsing door kristallen,

1) Men zie b. v. BEER, Einleitung in die höhere Optik, p. 268.

2) BILLET, Traité d'opt. phys. II p. 173.

die door NEUMANN zijn gegeven. Deze formules geven in het hier behandelde geval 1) voor den polarisatiehoek  $53^{\circ} 58' 40''$ , wat slechts ruim 3' van de waarneming afwijkt. En in alle andere gevallen is hier de overeenstemming even voldoende. De proeven van SEEBECK leveren dus het bewijs, dat de formules van NEUMANN juist zijn, dat daarentegen de theorie van CAUCHY met de waarnemingen in strijd is.

§ 11. En zoo zijn wij teruggekomen op de beschouwingwijze van NEUMANN met de daaraan verbonden onderstelling omtrent de trillingsrichting. Niemand buiten hem is het gelukt, ook voor de terugkaatsing van het licht door kristallen juiste formules op te stellen. Bewijst dit echter, dat de geheele theorie van NEUMANN de juiste is? Zeker niet, wanneer het blijkt, dat die theorie, consequent volgehouden, niet meer tot ware uitkomsten voert. Beschouwt men nu de terugkaatsing van licht, waarvan de trillingen in het invalsvlak plaats hebben, bij isotrope stoffen, dan moet men, ook als men de theorie van NEUMANN aanneemt, zorgen, dat aan de vier grensvoorwaarden, die men in dit geval heeft, voldaan wordt. Dit is alleen mogelijk, wanneer men ook hier, even als CAUCHY dit deed, longitudinale trillingen invoert. Daardoor verkrijgt men zeer samengestelde uitdrukkingen en het is mij niet gelukt, door eenige onderstelling omtrent de longitudinale trillingen daaruit de formule (8) af te leiden, die in dit geval zou moeten gelden.

Het komt mij voor, dat NEUMANN alleen door eenige grensvoorwaarden (nl. de vergelijkingen (2)) buiten beschouwing te laten er in geslaagd is, tot juiste resultaten te komen. Dat dit mogelijk is, wanneer men, tot op zekere hoogte, de voorwaarden van het vraagstuk willekeurig stelt, behoeft ons niet te verwonderen. Evenmin, dat een dergelijke keus, wanneer zij voor isotrope stoffen tot juiste uitkomsten voert, dit ook bij de kristallen kan doen. Daarmede wordt echter de grondslag, waarvan men uitging, maar waaraan men zich niet voortdurend gehouden heeft, niet bewezen waar te zijn.

De beschouwingen van dit hoofdstuk — hoe onvolledig ook — zijn genoegzaam, om ons te doen zien, dat men er nog nooit in geslaagd is, een voldoende verklaring der terugkaatsing van het licht te geven, wanneer men uitging van de meening, dat dit in

1) BILLET, t. a. p. II p. 176.

trillingen eener veerkrachtige stof zou bestaan. Bijna zou ik durven beweren, dat deze meening tot geen bevredigende verklaring kan voeren; stellig kan zij het niet, zonder vele gekunstelde bijzonderstellingen. In elk geval is men volkomen gerechtigd te beproeven, of men langs anderen weg tot betere resultaten kan komen en elke theorie, die minder zwaarigheden oplevert, zal, al is ze misschien nog slechts in ruwe trekken te geven, onze aandacht ten volle waardig zijn.

## TWEEDE HOOFDSTUK.

---

### DE BEWEGINGSVERGELIJKINGEN DER ELECTRICITEIT.

§ 1. Even als de tot nog toe aangenomen undulatietheorie steunt op de leer der beweging van een elastisch lichaam, zijn bij de door MAXWELL gegeven beschouwingen de bewegingsverschijnselen der electriciteit ten grondslag gelegd. Voor wij derhalve zijne hypothese kunnen leeren kennen, is het noodzakelijk, vele zaken uit de leer van de electriciteit en het magnetisme in herinnering te brengen. Ik zal trachten, dit zoo beknopt mogelijk te doen, en daarbij vooral de verschillende onderstellingen, die wij moeten maken, duidelijk zoeken aan te wijzen. Alleen langs dien weg toch mag men verwachten, een gegrond oordeel te kunnen vellen over de waarde der verkregen resultaten.

Bij de afleiding van de bewegingsvergelijkingen der electriciteit zal ik grootendeels HELMHOLTZ volgen. Even als deze natuurkundige zal ik daarbij uitgaan van de onmiddellijke werking op een afstand: aldus toch hebben wij het voordeel, dat aan de theorie de meest rechtstreeksche opvatting der feiten ten grondslag ligt. Ik wil daarmee echter niet, zooals men dit soms gedaan heeft, die *actio in distans* als een onwankelbaar dogma beschouwen; veel-  
eer zijn de verkregen differentiaalvergelijkingen, niet die werking, het eigenlijke uitgangspunt der theorie. Ik acht het niet onwaarschijnlijk, dat men, wanneer eens die vergelijkingen in haar meest waarschijnlijken vorm zijn opgesteld en in een groot aantal gevallen aan de ervaring zijn getoetst, er in zal kunnen slagen, ze ook uit de beschouwing van moleculaire krachten af te leiden.



Wij zullen in het vervolg het electrostatische maatstelsel kiezen. Onder een eenheid electriciteit verstaan wij dus een hoeveelheid, die, wanneer ze in een punt is opgehoopt, op een andere, even groote hoeveelheid, in een tweede punt aanwezig, een kracht = 1 uitoefent, wanneer de afstand = 1 is. De electriche potentiaal-functie, die wij door  $\varphi$  zullen voorstellen, wordt, zooals men weet, gegeven door

$$\varphi = \Sigma \frac{e}{r},$$

waarbij  $e$  een hoeveelheid electriciteit is, op een afstand  $r$  van het punt, waarvoor men de potentiaalfunctie zoekt.

Onder electromotorische kracht verstaan wij de kracht, uitgeoefend op een eenheid positieve electriciteit. Wij zullen haar door  $F$ , hare componenten volgens drie onderling loodrechte assen door  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  voorstellen. Wanneer zij alleen afhangt van een electrostatische verdeling, dan is

$$X = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \dots \dots (1)$$

Door de hier gegeven bepalingen worden de potentiaalfunctie en de electromotorische kracht van zelve in absolute maat gegeven.

Allereerst zullen wij nagaan, wat er gebeurt, wanneer een electromotorische kracht op een of ander lichaam werkt. Daarbij onderscheiden wij twee hoofdgevallen: het lichaam kan vooreerst een volkomen isolator of diëlectrisch lichaam, in de tweede plaats een goede geleider der electriciteit zijn.

Alleen in sommige gevallen heeft de waarneming de werking eener electromotorische kracht geheel doen kennen. Bij de toepassing der verkregen resultaten op andere gevallen zullen wij ons dus genoodzaakt zien, bepaalde onderstellingen in te voeren.

§ 2. De werking van een electromotorische kracht op een diëlectrisch lichaam openbaart zich vooreerst bij de influentieverschijnselen. FARADAY ontdekte, dat de aard der aanwezige niet-geleiders hierop van invloed is.

Ik zal niet in een uitvoerige beschouwing treden over hetgeen door verschillende natuurkundigen tegen de juistheid van deze bewering is aangevoerd, daar de laatste onderzoekingen<sup>1)</sup>, naar 't

1) Behalve de onderzoekingen van BOLTZMANN, die later ter sprake komen, zie men hieromtrent BRONGERSMA, Over den invloed der middenstof bij de electrostatische inductie.

mij voorkomt, den strijd ten gunste van FARADAY hebben beslist. Genoeg zij het, een korte uiteenzetting te geven van den aard en de theoretische verklaring van het verschijnsei.

Verbeelden wij ons een condensator, bestaande uit twee geleiders, waarvan de eene den anderen geheel omgeeft, en die door een isoleerende stof van elkander zijn gescheiden, dan is, bij lading hiervan, zooals men weet, de hoeveelheid electriciteit, op een der geleiders aanwezig, evenredig aan hun potentiaalverschil. Is dit  $= 1$ , dan noemt men de bedoelde hoeveelheid electriciteit de capaciteit van den condensator. Zij hangt vooreerst van vorm, grootte en onderlinge plaatsing der geleiders af, maar bovendien — en dit is FARADAY'S ontdekking — van den aard der isoleerende stof. Hebben wij twee condensatoren, alleen hierin verschillende, dat bij den een lucht, bij den anderen een andere middenstof voorkomt, dan is de capaciteit van den tweeden een zeker aantal  $K$  malen grooter dan die van den eersten. Het getal  $K$  hangt alleen van den aard der bedoelde middenstof af en zal in het vervolg het *specifiek induceerend vermogen* daarvan genoemd worden. Voor alle vaste en vloeibare middenstoffen, die men onderzocht heeft, is het grooter dan 1. De juiste waarde van  $K$  is echter — uit de proeven van GIBSON en BARCLAY en uit die van BOLTZMANN — nog slechts voor enkele dezer stoffen met voldoende nauwkeurigheid bekend.

Wat de gassen betreft, deze gedragen zich, als isolatoren, op bijna dezelfde wijze als de luchtledige ruimte. Intusschen is het BOLTZMANN gelukt aan te toonen, dat ook hier — vergeleken met het luchtledige —  $K$  iets grooter dan 1 is, en zelfs het bedrag er van voor eenige gassen te meten.

Men kan den hier geschetsten invloed van een diëlectrisch lichaam verklaren door aan te nemen, dat, wanneer op zulk een lichaam een electromotorische kracht werkt, in de kleinste deeltjes er van de beide electriciteiten worden gescheiden, zoodat zij aan de eene zijde positief, aan de andere negatief electrisch worden. Wij nemen daarbij aan, dat zich een of andere kracht tegen dat scheiden der electriciteiten verzet, zoodat, bij een bepaalde electromotorische kracht, de electrische verdeling een bepaalde grootte niet te boven gaat, terwijl zij geheel ophoudt, zoodra de uitwendige oorzaak verdwijnt, die haar te voorschijn riep. Wij zullen het hier beschreven verschijnsei *diëlectrische polarisatie* noemen en er vooreerst de wiskundige uitdrukking voor opstellen.

Denken wij ons daartoe het dielectrisch medium door vlakken, loodrecht op de coördinaatassen, in elementen verdeeld en beschouwen wij wat er binnen zulk een element  $dx dy dz$ , geplaatst aan het punt  $P$ , ligt. Ten gevolge der electricische verdeeling hebben wij in sommige punten een hoeveelheid vrije positieve, in andere vrije negatieve electriciteit. Ligt nu in een punt, met de coördinaten  $x, y, z$ , een hoeveelheid electriciteit  $e$ , dan vormen wij de drie sommen

$$\Sigma ex, \quad \Sigma ey, \quad \Sigma ez,$$

berekend over al de in het element aanwezige electriciteit. Zijn die sommen

$$\xi dx dy dz, \quad \eta dx dy dz, \quad \zeta dx dy dz,$$

dan kan men gemakkelijk bewijzen — daar toch  $\Sigma e = 0$  is — dat  $\xi, \eta, \zeta$  zijn te beschouwen als de componenten van een lijn, die in richting en grootte volkomen onafhankelijk is van het gekozen assenstelsel en alleen van de electricische verdeeling afhangt. Die lijn zal ons dienen, om de richting en grootte van de dielectrische polarisatie in het punt  $P$  voor te stellen en wij zullen  $\xi, \eta, \zeta$  de *componenten* dier polarisatie noemen.

Daar het coördinatenstelsel geheel willekeurig is, kunnen wij als oorsprong ook een der hoekpunten van het element nemen. Noemen wij dan de coördinaten van een punt binnen het element  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ , welke grootheden nu oneindig klein zijn, dan kunnen wij schrijven

$$\xi dx dy dz = \Sigma e \mathbf{x}, \quad \eta dx dy dz = \Sigma e \mathbf{y}, \quad \zeta dx dy dz = \Sigma e \mathbf{z}. \quad (2)$$

Het is verder noodig, dat er geen dubbelzinnigheid overblijve omtrent de beteekenis, die men heeft te hechten aan de uitdrukking *electromotorische kracht* voor een punt  $O$ , in het inwendige van een lichaam met dielectrische polarisatie gelegen. Wij stellen daaromtrent het volgende vast. Vooreerst denken wij ons een deel van dit lichaam om  $O$  weg, en wel zoo, dat dit deel den vorm van een omwentelingscilinder heeft, waarbij  $O$  op het midden der as ligt, terwijl de laatste dezelfde richting heeft als de dielectrische polarisatie in  $O$ . Dan is de electromotorische kracht  $F$  in  $O$  ondubbelzinnig aan te geven. Laten wij vervolgens de afmetingen van den cilinder hoe langer hoe kleiner worden, maar zoo dat de straal  $r$  oneindig klein blijft ten opzichte van de lengte

$l$ , dan zal de grens, waartoe  $F$  nadert, de *electromotorische kracht in het punt O* worden genoemd 1).

Den waargenomen invloed der isoleerende middenstoffen kan men nu verklaren door te stellen, dat de diëlectrische polarisatie bij isotrope lichamen dezelfde richting heeft als de electromotorische kracht en evenredig daaraan is, zoodat men mag stellen

$$\xi = \varepsilon X, \eta = \varepsilon Y, \zeta = \varepsilon Z \dots \dots \dots (3)$$

Daarbij heeft  $\varepsilon$ , de *constante der diëlectrische polarisatie*, een waarde, die van den aard der stof afhangt.

Wij maken ten slotte de orderstelling, dat het besproken verschijnsel ook voorkomt in den aether, die de luchtledige ruimte vult, zoodat wij met een volstrekt algemeene eigenschap der niet-geleiders te doen hebben. Zooals wij zullen zien, komt men daardoor niet met bekende feiten in strijd.

§ 3. Denken wij ons dan nu een isoleerend lichaam, begrensd door het oppervlak  $S$ , en stellen we ons daarin op een of andere wijze de moleculen electrisch gepolariseerd voor, zoodat  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  willekeurige functiën der coördinaten zijn, die wij alleen doorlopend

1) De theorie der diëlectrische polarisatie komt geheel overeen met die der magnetische verdeeling. Even als daar, voor het inwendige van een magnetische stof, een nadere bepaling van de magnetiseerende kracht noodig is, is dat hier met de electromotorische kracht het geval. Men heeft echter op die omstandigheid niet gelet en stilzwijgend de definitie van den tekst gekozen. Zij komt overeen met de *polaire definitie der magnetiseerende kracht* van THOMSON.

Hadden wij een anderen vorm voor de holte om O gekozen, b.v. een bol, of een nauwe spleet, loodrecht op de richting der diëlectrische polarisatie, dan zou men andere uitdrukkingen voor de electromotorische kracht verkrijgen. Dit neemt echter niets weg van de geldigheid der verkregen resultaten. Want, zooals wij zullen zien, bewijzen de proeven dat men, de opvatting der electromotorische kracht, die wij kozen, ten grondslag leggende, de vergelijkingen (3) mag laten gelden. Door ons dus aan die opvatting te houden, steunen wij op de waargenomen feiten.

Ik doe nog opmerken, dat men, bij een andere bepaling der electromotorische kracht, tot dezelfde vergelijkingen komt, maar in plaats van  $\varepsilon$  komt dan een andere constante.

Men vergelijke THOMSON, Papers on Electrostatics and Magnetism, §§ 479, 517 (en het bijvoegsel bij de laatste §). MAXWELL, Electricity and Magnetism, §§ 395—400.

onderstellen. Om de werking naar buiten te beoordeelen, hebben wij slechts de potentiaalfunctie  $\varphi$  in eenig punt  $O(x, y, z)$  buiten  $S$  te zoeken, voor zooverre zij van den gepolariseerden toestand afhangt. Bepalen wij ons vooreerst tot het element  $dx dy dz$  van het lichaam, met een der hoekpunten in 't punt  $(x, y, z)$  gelegen. Is  $\varphi'$  de potentiaalfunctie van de eenheid electriciteit in dat hoekpunt geplaatst, zoodat  $\varphi'$  een functie van  $x, y$  en  $z$  is, dan is de potentiaalfunctie van een hoeveelheid  $e$ , geplaatst in 't punt  $(x + \mathbf{x}, y + \mathbf{y}, z + \mathbf{z})$ , daar  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  en  $\mathbf{z}$  oneindig klein zijn,

$$e \left( \varphi' + \mathbf{x} \frac{\partial \varphi'}{\partial x} + \mathbf{y} \frac{\partial \varphi'}{\partial y} + \mathbf{z} \frac{\partial \varphi'}{\partial z} \right).$$

Sommeeren wij nu vooreerst over al de electriciteit, in het element aanwezig, en nemen wij daarbij in aanmerking, dat  $\Sigma e = 0$  is, dan komt er, als wij nog (2) gebruiken,

$$\left( \xi \frac{\partial \varphi'}{\partial x} + \eta \frac{\partial \varphi'}{\partial y} + \zeta \frac{\partial \varphi'}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

Hieruit volgt voor de gezochte waarde van de potentiaalfunctie

$$\varphi = \iiint \left( \xi \frac{\partial \varphi'}{\partial x} + \eta \frac{\partial \varphi'}{\partial y} + \zeta \frac{\partial \varphi'}{\partial z} \right) dx dy dz,$$

waarbij de integratie over het geheele isoleerende lichaam moet uitgestrekt worden. Deze uitdrukking laat zich op een bekende wijze transformeeren. Het eerste deel er van, nl.

$$\iiint \xi \frac{\partial \varphi'}{\partial x} dx dy dz,$$

kunnen wij door gedeeltelijke integratie naar  $x$  herleiden tot den vorm

$$\iint a \xi \varphi' dS - \iiint \frac{\partial \xi}{\partial x} \varphi' dx dy dz,$$

waarbij de eerste integraal over het grensvlak  $S$  moet genomen worden, terwijl  $a$  de cosinus van den hoek is, dien de naar buiten getrokken normaal aan dit oppervlak met de  $x$ -as vormt. Bepalen wij, op dezelfde wijze, den stand dier normaal ten opzichte der  $y$ - en  $z$ -as door de grootheden  $b$  en  $c$ , en behandelen wij de twee andere deelen van  $\varphi$  even als het eerste, dan verkrijgen we ten slotte

$$\varphi = \iint (a \xi + b \eta + c \zeta) \varphi' dS - \iiint \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) \varphi' dx dy dz.$$

In woorden overgebracht levert ons deze vergelijking de volgende stelling:

Voor een punt, buiten het diëlectrische lichaam gelegen, heeft de potentiaalfunctie, welke het gevolg is van een electriche polarisatie, dezelfde waarde, alsof zij voortsproot uit een gewone electriche lading, waarbij de dichtheid  $\varrho_1$  der electriciteit in het inwendige van het lichaam en de vlaktedichtheid  $\sigma_1$  aan het grensvlak gegeven worden door

$$\varrho_1 = - \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right),$$

$$\sigma_1 = a \xi + b \eta + c \zeta.$$

Daaruit volgt echter, dat wij, wat de werking naar buiten betreft, den gepolariseerden toestand door deze verdeeling der electriciteit kunnen vervangen.

Beschouwen wij thans de electromotorische kracht voor een punt  $O$ , binnen het lichaam gelegen. Daartoe denken wij ons eerst om dat punt de, in de vorige § beschreven, cilindrische holte. Dan ligt  $O$  buiten het lichaam en geldt dus de gevonden stelling. Daarbij komt dan in aanmerking vooreerst de lading met de dichtheid  $\varrho_1$ , ten tweede de lading met de dichtheid  $\sigma_1$  over het buitenoppervlak van ons lichaam, eindelijk een dergelijke lading over grond- en bovenvlak van de holte. Wordt nu de straal  $r$  daarvan oneindig klein, dan is de hoeveelheid electriciteit, op een dezer vlakken aanwezig, oneindig klein van de orde  $r^2$ , en dus de daardoor in  $O$  uitgeoefende electromotorische kracht een grootheid van de orde  $\left(\frac{r}{l}\right)^2$ . Wij laten echter den straal der holte oneindig klein blijven ten opzichte van de lengte; de laatste grootheid nadert derhalve tot 0.

Hieruit volgt, dat wij ten slotte alleen met de beide eerstgenoemde ladingen te doen hebben, zoodat wij kunnen stellen, dat ook, wat de electromotorische kracht in een punt in het inwendige betreft, de diëlectrische polarisatie door de boven aangegeven electriche lading mag vervangen worden.

§ 4. Men kan het verkregen resultaat toepassen, om de wijzigingen te vinden, die nu aan eenige vergelijkingen moeten worden aangebracht, bij welke afleiding men den invloed der niet-geleiders buiten rekening heeft gelaten. Wij beschouwen daarbij alleen het

geval, dat men aan eenige geleiders een lading heeft gegeven. Zooals men weet, wordt dan in de leer der electrostatica bewezen,

a. dat  $\varphi$  overal doorlopend, voor elken geleider constant en op oneindigen afstand 0 is;

b. dat  $\varphi$  voor elk punt van de ruimte tusschen de geleiders voldoet aan de vergelijking

$$\Delta \varphi = 0; \dots \dots \dots (4)$$

en eindelijk

c. dat aan het oppervlak van elken geleider de voorwaarde

$$a \frac{\partial \varphi}{\partial x} + b \frac{\partial \varphi}{\partial y} + c \frac{\partial \varphi}{\partial z} + 4 \pi \sigma = 0 \dots \dots \dots (5).$$

vervuld is, waarbij onder de differentiaalquotienten de waarden verstaan worden, die zij onmiddellijk buiten het oppervlak hebben.

Deze voorwaarden bevatten op ondubbelzinnige wijze de oplossing van alle vraagstukken omtrent de verdeeling der electriciteit op een stelsel geleiders. Is b. v. de potentiaal functie voor elken geleider gegeven, dan is er slechts ééne waarde van  $\varphi$  te vinden, die aan a en b voldoet, en men kan vervolgens uit (5) de waarde van  $\sigma$  aan elk punt afleiden.

Verbeelden wij ons nu, dat in de ruimte tusschen en om de geleiders eenige diëlectrische lichamen aanwezig zijn, dan zal de totale waarde van  $\varphi$  niet meer alleen afhangen van de electriciteit, op de geleiders aanwezig, maar bovendien van de electricische lading, die men voor de polarisatie in de plaats mag stellen.

Gemakkelijk overtuigt men zich, dat de voorwaarden a nog gelden. Uit de vergelijking van poisson kunnen wij verder, voor een punt binnen een diëlectrisch lichaam gelegen, de betrekking

$$\Delta \varphi - 4 \pi \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) = 0$$

afleiden. Immers wij hebben, blijkens de vorige §, in dat punt een lading met de dichtheid

$$- \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right).$$

Neemt men (1) en (3) in aanmerking, dan wordt bovenstaande vergelijking

$$(1 + 4 \pi \epsilon) \Delta \varphi = 0 \text{ of } \Delta \varphi = 0.$$

Ook de tweede voorwaarde blijft dus onveranderd. De derde

echter niet. Want aan het oppervlak van een conductor is niet meer alleen de electriciteit, daarop aanwezig, in rekening te brengen, maar bovendien de electriche verdeling met de dichtheid  $\sigma_1$ , aan de grens van het omringende medium. Wij moeten dus in (5) in plaats van  $\sigma$  stellen  $\sigma + \sigma_1$ ; daar echter

$$\sigma_1 = - (a \xi + b \eta + c \zeta) = \varepsilon \left( a \frac{\partial \varphi}{\partial x} + b \frac{\partial \varphi}{\partial y} + c \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)$$

wordt, gaat (5) over in

$$(1 + 4 \pi \varepsilon) \left( a \frac{\partial \varphi}{\partial x} + b \frac{\partial \varphi}{\partial y} + c \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + 4 \pi \sigma = 0 \dots \dots (6)$$

Wanneer er verschillende diëlectrische lichamen aanwezig zijn moeten wij nog een vergelijking opstellen voor het grensvlak van twee dergelijke stoffen. Wij onderscheiden daarbij steeds de twee stoffen door de indices 1 en 2 en trekken de normaal aan het scheidingsvlak naar de met 2 gemerkte zijde. Dan hebben wij, ten gevolge der diëlectrische polarisatie, aan het grensvlak een vlaktelading met de dichtheid

$$\sigma' = a (\xi_1 - \xi_2) + b (\eta_1 - \eta_2) + c (\zeta_1 - \zeta_2),$$

en hieruit volgt voor dit oppervlak de vergelijking

$$a (\xi_1 - \xi_2) + b (\eta_1 - \eta_2) + c (\zeta_1 - \zeta_2) = \frac{1}{4 \pi} \left[ a \left\{ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_1 - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_2 \right\} + b \left\{ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_1 - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_2 \right\} + c \left\{ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_1 - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_2 \right\} \right],$$

welke ons later van dienst zal zijn. Neemt men (1) en (3) in aanmerking, dan gaat zij over in

$$(1 + 4 \pi \varepsilon_1) \left\{ a \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_1 + b \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_1 + c \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_1 \right\} = (1 + 4 \pi \varepsilon_2) \left\{ a \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_2 + b \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_2 + c \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_2 \right\} \dots \dots (7)$$

§ 5. Beschouwen wij nader het geval, dat men overal hetzelfde medium tusschen de geleiders heeft, dan hebben wij slechts met de voorwaarden  $a$  en  $b$  en met de vergelijking (6) te doen. Gesteld nu, dat wij twee stelsels geleiders hebben, meetkundig volkomen aan elkander gelijk, maar dat bij het eene lucht met de constante  $\varepsilon_0$ , bij het tweede een ander medium, met de constante  $\varepsilon$ , voorkomt. Wij geven aan de stelsels zekere ladingen, zoodat de potentiaal functie voor elken conductor een bepaalde en wel voor beide



stelsels gelijke waarde heeft; het is de vraag, de hoeveelheid electriciteit, op een geleider aanwezig, te zoeken. Daartoe kan men eerst uit de voorwaarden  $a$  en  $b$  de potentiaalfunctie zoeken, vervolgens uit (6) de waarde van  $\sigma$ . Daar echter de eerste voorwaarden voor beide stelsels volkomen dezelfde zijn, is dit ook met  $\varphi$  het geval; uit (6) volgt dan echter voor  $\sigma$  niet dezelfde waarde. Daar toch  $\varepsilon$  verschillend is, zal men in het tweede stelsel overal een waarde van  $\sigma$  vinden, die

$$\frac{1 + 4 \pi \varepsilon}{1 + 4 \pi \varepsilon_0}$$

maal grooter is dan in het eerste; diensgevolge zijn ook alle hoeveelheden electriciteit in het tweede stelsel evenveel malen grooter.

Hiermede is aangetoond, dat de hypothese der diëlectrische polarisatie de proeven van FARADAY met condensatoren verklaren kan. Immers deze proeven maken slechts een bijzonder geval uit van het boven behandelde. Wel heeft men bij de condensatoren niet de ruimte, die het buitenbekleedsel omringt, maar alleen de ruimte tusschen de geleiders met verschillende stoffen gevuld, maar, wanneer de potentiaalfunctie voor het buitenbekleedsel 0 is, kan dit geenerlei verschil maken, daar dan in de omringende ruimte geen electromotorische kracht werkt.

Uit bovenstaande beschouwingen volgt nu tevens, dat het verband tusschen de grootheid  $K$ , die men uit de condensatorproeven kan afleiden, en de constante  $\varepsilon$  gegeven wordt door

$$K = \frac{1 + 4 \pi \varepsilon}{1 + 4 \pi \varepsilon_0} \dots \dots \dots (8).$$

Verder heeft BOLTZMANN 1) aangetoond, dat ook dan, wanneer de ruimte tusschen de geleiders niet geheel door hetzelfde diëlectrische lichaam wordt ingenomen, de invloed, door de isolatoren op de influentieverschijnselen uitgeoefend, door de boven gegeven vergelijkingen met juistheid bepaald wordt.

Eindelijk heeft dezelfde natuurkundige uit de theorie afgeleid 2), dat zich nog op een andere wijze de werking van een electromotorische kracht op een isolator moet openbaren. Want, evenals een

1) Pogg. Ann. Bd. 151.

2) Pogg. Ann. Bd. 153. Uitvoeriger in BOLTZMANN, Experimentaluntersuchung über die electrostatische Fernwirkung diëlectrischer Körper.

stuk week ijzer door een magneet wordt aangetrokken, moet ook een niet-geleider, alleen ten gevolge der diëlectrische polarisatie, door een geëlectriseerd voorwerp aangetrokken worden, met een kracht, waarvan zich het bedrag theoretisch laat vaststellen. Deze voorspelling van de theorie heeft BOLTZMANN bevestigd gevonden en uit de waarneming van het verschijnsel bij eenige stoffen waarden van  $K$  afgeleid, die tamelijk goed overeenstemmen met die, welke uit condensatorproeven zijn verkregen.

Terwijl men dus uit verschillende electrostatische verschijnselen de waarde van  $K$  kan vinden, leveren zij ons niet het middel op,  $\epsilon$  te bepalen, daar toch, blijkens (8), uit de waarde van  $K$  slechts de verhouding van  $1 + 4 \pi \epsilon$  voor verschillende stoffen volgt. Van daar dat men, zonder met bekende feiten in tegenspraak te komen, de onderstelling van § 2 mag maken, dat ook in de luchtledige ruimte diëlectrische polarisatie bestaat. En dit niet alleen: men mag zelfs voor de constante  $\epsilon$  in dit geval een willekeurige waarde kiezen. Dan geldt voor de verschillende gassen bijna dezelfde constante, terwijl bij vaste en vloeibare isolatoren  $\epsilon$  aanmerkelijk grooter is.

§ 6. Niet alleen oefent de diëlectrische polarisatie invloed uit op het verband tusschen de ladingen der geleiders en de waarde der potentiaalfunctie: ook de mechanische krachten, door geëlectriseerde lichamen op elkander uitgeoefend, worden er door gewijzigd. Wij kunnen het best nagaan 1), hoe het hiermede gesteld is, wanneer wij eerst het arbeidsvermogen (van plaats) zoeken, dat door een stelsel geladen geleiders vertegenwoordigd wordt. Stel dat de potentiaalfunctie voor deze geleiders de waarden  $\varphi_1, \varphi_2$ , enz. aanneemt, terwijl de ladingen door  $e_1, e_2$ , enz., en eindelijk het bedoelde arbeidsvermogen door  $Q$  wordt voorgesteld. Om dan deze grootte te bepalen, hebben wij slechts de grootte van den arbeid te zoeken, dien men moet verrichten, om de op de geleiders aanwezige electriciteit van een oneindig ver verwijderd punt tot op die geleiders te brengen. Gemakshalve doen wij dit zoo, dat gedurende het verloop van dit proces op elk oogenblik de potentiaalfunctie en de lading voor de verschillende conductoren kunnen voorgesteld worden door

$$n \varphi_1, n \varphi_2, \text{ enz. ,}$$

$$n e_1, n e_2, \text{ enz. ,}$$

1) MAXWELL, Electr. and Magn., Hoofdstuk III, § § 85, 92, 94.

waarbij  $n$  van 0 tot 1 toeneemt. Zien wij nu, hoe groot de arbeid is, dien men moet verrichten, om  $n$  oneindig weinig, tot  $n + dn$ , te doen aangroeien. Daarbij moeten wij op den eersten geleider een hoeveelheid electriciteit  $e_1 dn$  brengen. Om deze oneindig kleine hoeveelheid van oneindigen afstand te brengen tot op den eersten conductor, waar de potentiaalfunctie  $n\varphi_1$  is, moet een arbeid  $e_1\varphi_1 n dn$  verricht worden. Door evenzoo met de andere geleiders te handelen vindt men voor den geheelen arbeid, noodig om  $n$  tot  $n + dn$  te doen toenemen

$$\Sigma e\varphi n dn$$

en, daar voor de geheele lading  $n$  van 0 tot 1 aangroeit, vinden wij  $Q$  door tusschen die grenzen te integreeren. Dus is

$$Q = \Sigma e\varphi \int_0^1 n dn = \frac{1}{2} \Sigma e\varphi, \quad \dots \dots (9)$$

en dit geldt altijd, hetzij tusschen de conductoren een diëlectrische stof aanwezig is of niet. Ook in het eerste geval toch behoeft men bij de lading slechts de electriciteit op de geleiders te brengen, daar de diëlectrische polarisatie van zelve daaruit voortvloeit.

Uit de waarde van  $Q$  kan men de grootte der mechanische krachten vinden, op een der geleiders door de andere uitgeoefend. Verplaatst men nl. dezen geleider oneindig weinig, terwijl elke conductor zijn lading behoudt, en neemt bij die verplaatsing  $Q$  met  $dQ$  toe, dan moeten de bedoelde krachten daarbij een arbeid  $-dQ$  hebben verricht. Door dit voor verschillende verplaatsingen toe te passen kan men de electrostatische aantrekkingen en afstootingen volkomen leeren kennen.

Na dit vastgesteld te hebben verbeelden wij ons, dat men twee meetkundig volkomen gelijke stelsels I en II van geleiders heeft, het eene zonder eenig medium tusschen de conductoren, het andere met een middenstof, de lucht b. v., met de constante  $\epsilon_0$ . Wanneer wij in I en II aan de geleiders dezelfde ladingen geven, dan heeft, blijkens § 5,  $\varphi$  en dus, volgens (9), ook  $Q$  een  $1 + 4\pi\epsilon_0$  maal kleinere waarde in het stelsel II dan in I. Bij dezelfde oneindig kleine verplaatsing moet ook tusschen  $dQ$ , dus ook tusschen den arbeid der mechanische krachten, in beide stelsels dezelfde betrekking bestaan. Derhalve moeten ook die krachten in II  $1 + 4\pi\epsilon_0$  maal kleiner zijn dan in I.

Hebben wij nu twee gelijke hoeveelheden electriciteit, elk =  $e$ ,

op zeer kleine geleiders aanwezig en op een afstand 1 van elkander, dan zou in de geheel ledige ruimte de onderlinge afstooting  $e^2$  zijn. Doet men echter de proef in de lucht dan is, blijkens het voorgaande, de onderlinge afstooting

$$\frac{e^2}{1 + 4\pi\epsilon_0} = e'^2,$$

waarbij

$$e = e' \sqrt{1 + 4\pi\epsilon_0} \dots \dots \dots (10)$$

is. Leiden wij nu uit de waargenomen afstooting de hoeveelheid electriciteit af — meten wij deze dus — dan houden wij geen rekening met de diëlectrische polarisatie der lucht. Wij meenen dan, dat wij op elken geleider een hoeveelheid electriciteit  $e'$  hebben; in werkelijkheid is zij echter  $e$  en wij zien hieruit dat, wanneer wij door onze metingen voor een hoeveelheid electriciteit de waarde  $e'$  vinden, de werkelijke waarde gegeven wordt door de vergelijking (10).

Door een dergelijke redeneering als wij boven bezigden laat zich bewijzen, dat, wanneer in de beide stelsels I en II  $\varphi$  dezelfde waarde heeft, de aantrekking in II  $1 + 4\pi\epsilon_0$  maal grooter is dan in I. Willen wij nu de potentiaalfunctie van een conductor meten, dan kunnen wij de aantrekking bepalen, die hij uitoefent op een tweeden conductor, waarvoor de potentiaalfunctie 0 is, en dan zal, al het overige gelijk zijnde,  $\varphi$  evenredig zijn aan den vierkantswortel uit de grootte der aantrekking. Eigenlijk moesten wij dit in de geheel ledige ruimte doen; wij doen het echter in een medium met de constante  $\epsilon_0$  en vinden daardoor de aantrekking  $1 + 4\pi\epsilon_0$  maal te groot. Dien ten gevolge kennen wij aan de potentiaalfunctie een waarde toe, die  $\sqrt{1 + 4\pi\epsilon_0}$  maal te groot is. Is derhalve  $\varphi$  de werkelijke,  $\varphi'$  de waargenomen waarde, dan hebben wij

$$\varphi = \frac{\varphi'}{\sqrt{1 + 4\pi\epsilon_0}} \dots \dots \dots (11)$$

Daar dezelfde betrekking ook moet gelden voor de differentiaalquotienten van  $\varphi$ , moet zij, zooals uit (1) blijkt, ook doorgaan voor de electromotorische kracht.

Daarvoor is dus

$$F = \frac{F'}{\sqrt{1 + 4\pi\epsilon_0}} \dots \dots \dots (12)$$

§ 7. Bij de in de laatste §§ besproken verschijnselen had steeds de electromotorische kracht, op eenig punt werkende, voortdurend dezelfde waarde. Omtrent de dielectriche polarisatie bij veranderlijke electromotorische kracht bestaan geen waarnemingen. Wij maken voor dat geval de door MAXWELL en HELMHOLTZ stilzwijgend aangenomen onderstelling, dat ook dan nog op elk oogenblik de vergelijkingen (3) gelden.

Dien ten gevolge hebben wij dan een veranderlijke electriche verdeling, dus beweging der electriciteit of een electriche stroom. Een stroom echter bepalen wij op de gewone wijze door zijne componenten  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , waarbij de hoeveelheid electriciteit, die in de tijdseenheid door een element  $dS$  van eenig oppervlak stroomt, wordt gegeven door

$$(a u + b v + c w) d S.$$

Noemen wij de componenten van den stroom, die bij een verandering van den gepolariseerden toestand optreedt,  $u'$ ,  $v'$ ,  $w'$  dan hebben wij

$$u' = \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad v' = \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad w' = \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \quad . . . . . (13)$$

zoals men gemakkelijk kan afleiden door na te gaan, wat er binnen een element  $dx dy dz$  van den isolator gebeurt.

§ 8. In de tweede plaats houden wij ons bezig met de werking van een electromotorische kracht  $F$  op een goeden geleider. Hier brengt zij een stroom voort, die altijd bestaat, zoo lang de electromotorische kracht werkt, terwijl in een isolator alleen bij verandering dier kracht beweging der electriciteit plaats heeft. Wanneer  $F$  en de stroom constant zijn, wordt het verband tusschen beide, bij een isotropen geleider, gegeven door

$$X = \kappa u, \quad Y = \kappa v, \quad Z = \kappa w,$$

of

$$u = \frac{1}{\kappa} X, \quad v = \frac{1}{\kappa} Y, \quad w = \frac{1}{\kappa} Z, \quad . . . . . (14)$$

welke vergelijkingen de mathematische uitdrukking bevatten van de wet van OHM. De hierbij voorkomende constante  $\kappa$  is de weerstand van den geleider.

De wet van OHM is proefondervindelijk alleen voor constante stroomen bewezen, maar men heeft haar dikwijls ook op veran-

derlijke stroomen toegepast, en, voor zoover hieromtrent waarnemingen bestaan, is er geen afwijking van de wet gebleken.

Intusschen hebben WEBER en LORBERG bij sommige onderzoekingen de omstandigheid in aanmerking genomen, dat misschien de wet van OHM slechts bij benadering geldig is, als de stroom met den tijd verandert. Zeker heeft deze beschouwingwijze groote waarschijnlijkheid voor zich. Want, welke begrippen men ook omtrent het wezen der electriciteit moge koesteren, men zal zich een electrischen stroom moeilijk anders kunnen voorstellen, dan als een of ander bewegingsverschijnsel van eenige stof, in den geleider aanwezig. De oorzaak dier beweging is hier de electromotorische kracht en zij zal, wanneer zij alleen werkt, de beweging hoe langer hoe sterker maken. Dit moet bij elken stroom, die juist begint, het geval zijn. Blijft echter de electromotorische kracht constant, dan zal ook de stroom weldra standvastig worden. Dit is alleen dan mogelijk, wanneer een of andere kracht de beweging tegenwerkt, en als een zoodanige kracht hebben wij ons den weerstand van een geleider voor te stellen.

Onderstellen wij, dat in een punt, waar de stroomcomponenten  $u, v, w$  zijn, een beweging plaats heeft met de snelheden  $\gamma u, \gamma v, \gamma w$ , waarbij  $\gamma$  een constante is, die van den aard des geleiders kan afhangen. Nemen wij verder aan, dat de weerstand evenredig is met de snelheid, wat bij zeer kleine snelheden de meest waarschijnlijke onderstelling is, dan kunnen zijne componenten door

$$xu, xv, xw$$

worden voorgesteld en men heeft voor de totale kracht

$$X - xu, Y - xv, Z - xw.$$

Deze uitdrukkingen zullen gelijk moeten zijn aan de versnellingen, met een of andere constante  $\delta$  vermenigvuldigd. Zijn nu  $u, v, w$  als functiën van  $x, y, z$  en  $t$  gegeven, dan hebben wij voor een der componenten van de versnelling

$$\frac{d(\gamma u)}{dt} = \gamma \frac{\partial u}{\partial t} + \gamma^2 u \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma^2 v \frac{\partial u}{\partial y} + \gamma^2 w \frac{\partial u}{\partial z},$$

of, zoolang wij met zeer kleine snelheden te doen hebben,

$$\gamma \frac{\partial u}{\partial t}$$

en evenzoo voor de andere componenten

$$\gamma \frac{\partial v}{\partial t}, \gamma \frac{\partial w}{\partial t}.$$

Stelt men vervolgens voor  $\gamma \delta$  de nieuwe constante  $g$ , dan verkrijgt men, in plaats van (14), de vergelijkingen

$$\left. \begin{aligned} X &= zu + g \frac{\partial u}{\partial t}, \\ Y &= zv + g \frac{\partial v}{\partial t}, \\ Z &= zw + g \frac{\partial w}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (15)$$

De hierbij gemaakte onderstelling, dat  $u, v, w$  zeer klein zijn, zal bij de toepassingen, die wij later maken, steeds vervuld zijn.

De vergelijkingen (15) geven aan, dat de stroom, bij het eerste optreden van een electromotorische kracht, zoo lang aangroeit, tot  $X = zu, Y = zv, Z = zw$  is geworden. Alsdan blijft de stroom verder constant en is de wet van OHM geldig. Wanneer  $g$  zeer klein is — wat het geval is, wanneer de in beweging gebrachte stof slechts een zeer geringe massa heeft — zal voor het tot stand komen van dier stationnairen toestand slechts een zeer korte tijd noodig zijn, en het kan ons dan toeschijnen, dat de stroom onmiddellijk in zijn volle sterkte optreedt.

Bij de afleiding der vergelijkingen (15) heb ik een progressieve beweging in dezelfde (of de tegengestelde) richting, als die van den stroom ondersteld. Ik geloof intusschen, dat, ook bij een andere opvatting van de electricische beweging, deze vergelijkingen groote waarschijnlijkheid voor zich hebben. Ik wil echter niet beweren, dat wij in (15) de juiste wet hebben uitgedrukt; daartoe zijn onze begrippen omtrent de electriciteit en hare beweging veel te duister. Alleen komt het mij voor, dat, voor veranderlijke stroomen, de nu opgestelde formules waarschijnlijker zijn dan de ongewijzigde wet van OHM. Intusschen zal ik vooreerst deze wet aannemen en niet dan door de feiten genoodzaakt mijn toevlucht nemen tot de in (15) uitgedrukte onderstelling.

Keeren wij nu tot de vergelijkingen (14) terug, dan vinden wij daarin tevens het middel, om  $z$  in absolute maat te bepalen. Wij hebben daartoe  $z = \frac{X}{u}$  en kunnen  $X$  en  $u$  meten. Bestaat er in

het omringende medium echter diëlectrische polarisatie, dan vinden wij niet de werkelijke waarde van  $X$  en  $u$ , dus ook niet die van  $x$ . Worden weer de waargenomen waarden van de werkelijke door accenten onderscheiden dan is, blijkens (12) en (10)

$$X = \frac{X'}{\sqrt{1 + 4\pi\epsilon_0}}, \quad u = u' \sqrt{1 + 4\pi\epsilon_0},$$

daar toch  $u$  een hoeveelheid electriciteit is. Hieruit volgt:

$$x = \frac{x'}{1 + 4\pi\epsilon_0} \dots \dots \dots (16)$$

§ 9. Het is de vraag, of in elk lichaam slechts een der beide uitwerkingen van een electromotorische kracht bestaat, die wij hebben leeren kennen. Dit is niet waarschijnlijk. Aan den eenen kant kunnen zogenaamde isolatoren een zwak geleidingsvermogen bezitten, aan den anderen kant kan misschien in goede geleiders nog polarisatie bestaan. Voor de electrolyten is dit geheel in overeenstemming met de verklaring, die men gewoonlijk van hun geleidingsvermogen geeft. En ook bij metalen kan men zich misschien den stroom het best zoo voorstellen, dat een polarisatie der moleculen hem voorafgaat en vergezelt. Het is bovendien gemakkelijk in te zien, dat men bij electrostatische proeven en bij waarnemingen omtrent constante stroomen die polarisatie niet zal bemerken; waarnemingen omtrent veranderlijke stroomen zijn er echter nog te weinig, om omtrent deze zaak iets met zekerheid te beslissen.

Wij zullen in het vervolg, om het meest algemeene geval te behandelen, onderstellen, dat polarisatie en stroomgeleiding te gelijk bestaan. Alsdan worden de stroomcomponenten niet meer door (14) gegeven, maar wij moeten daar nog de componenten van den in (13) aangegeven stroom bijvoegen. In het algemeen is derhalve

$$u = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{1}{x} X, \quad v = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{x} Y, \quad w = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{1}{x} Z,$$

of

$$u = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{1}{x\epsilon} \xi, \quad v = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{x\epsilon} \eta, \quad w = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{1}{x\epsilon} \zeta, \quad (17)$$

welke uitdrukkingen wij in het vervolg zullen bezigen.

Om uit de aldus opgestelde algemeene vergelijkingen de betrekkingen af te leiden, die voor een volkomen isolator gelden, hebben wij slechts  $x = \infty$  te stellen. Tevens blijkt uit het bovenstaande,



dat wij in dit geval het meest op de juistheid der theorie mogen vertrouwen, terwijl bij goede geleiders veel meer onzekerheid blijft bestaan. Vooreerst wordt deze veroorzaakt door de mogelijkheid eener afwijking van de wet van OHM; bovendien weten wij niet met zekerheid, of ook hier een polarisatie der moleculen bestaat, en of zij aan dezelfde wetten onderworpen is als bij isolatoren.

Heeft in een lichaam een electricische strooming plaats, dan kan het gevolg daarvan zijn, dat de verdeeling der electriciteit met den tijd verandert. Noemen wij in eenig punt, waar  $u$ ,  $v$ ,  $w$  doorlopend zijn,  $\rho$  de dichtheid der vrije electriciteit, dan is

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Is  $\sigma$  de dichtheid van de vlaktelading aan een oppervlak  $S$ , waar  $u$ ,  $v$ ,  $w$  ondoorlopend zijn, dan hebben wij daar evenzoo

$$a(u_1 - u_2) + b(v_1 - v_2) + c(w_1 - w_2) = \frac{\partial \sigma}{\partial t}.$$

Bij het bepalen van  $\rho$  en  $\sigma$  moet hier, behalve de electricische ladingen in gewonen zin, ook de lading in aanmerking worden genomen, die men voor de diëlectrische polarisatie in de plaats mag stellen (zie § 3).

Door  $\rho$  en  $\sigma$ , op de bekende wijze, in de differentiaalquotienten van  $\varphi$  uit te drukken, vindt men uit de bovenstaande vergelijkingen

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} (\Delta \varphi) \dots \dots (18)$$

en

$$\begin{aligned} & a(u_1 - u_2) + b(v_1 - v_2) + c(w_1 - w_2) = \\ & = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ a \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_1 - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_2 \right] + b \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_1 - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_2 \right] + \right. \\ & \quad \left. + c \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_1 - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_2 \right] \right\} \dots \dots (19) \end{aligned}$$

Hierdoor is in het algemeen het verband tusschen de stroomcomponenten en de potentiaalfunctie uitgedrukt. Voor volkomen isolatoren, waarbij de stroomcomponenten door (13) worden gegeven, kunnen deze vergelijkingen naar  $t$  geïntegreerd worden. Bestaat er geen andere lading in den isolator, of aan het grensvlak  $S$ , dan die, welke voor de diëlectrische polarisatie in de plaats wordt gesteld, dan vindt men aldus

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{1}{4\pi} \Delta \varphi \dots (20)$$

en

$$a(\xi_1 - \xi_2) + b(\eta_1 - \eta_2) + c(\zeta_1 - \zeta_2) = \frac{1}{4\pi} \left\{ a \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_1 - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_2 \right] + b \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_1 - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_2 \right] + c \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_1 - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_2 \right] \right\}, \dots (21)$$

welke betrekkingen wij reeds in § 4 vonden.

Het is nog van belang, de voorwaarden te kennen, waaraan voldaan moet zijn, opdat er geen verandering in de verdeeling der vrije electriciteit plaats hebbe. Uit bovenstaande vergelijkingen volgt daarvoor

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ a(u_1 - u_2) + b(v_1 - v_2) + c(w_1 - w_2) = 0. \end{aligned} \right\} (22)$$

en, aan 't oppervlak  $S$ ,

Bij volkomen isolatoren zal dit het geval zijn, wanneer op elk oogeblik

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0 \\ a(\xi_1 - \xi_2) + b(\eta_1 - \eta_2) + c(\zeta_1 - \zeta_2) = 0 \end{aligned} \right\} \dots (23)$$

is.

Is aan de voorwaarden (22) of (23) voldaan, dan komt de beweging der electriciteit overeen met die eener onsamendrukbare vloeistof.

§ 10. Na aldus de uitwerking eener electromotorische kracht te hebben besproken, moeten wij die kracht zelve nader beschouwen. Zij is van verschillenden oorsprong. Van het eerste gedeelte, dat afhangt van een verdeeling der electriciteit, hebben wij reeds de componenten opgesteld. Een ander deel ontstaat uit de inductiewerkingen en dit laat zich wederom in tweeën splitsen, daar deze werkingen ontstaan kunnen uit een veranderlijken stroom, of uit een veranderlijke magnetisatie. Van de inductie, die het gevolg is van een beweging van stroomgeleiders of magneten, kunnen wij hier afzien, daar wij de lichamen, waarin de electricische verschijnselen plaats hebben, in het vervolg in rust zullen onderstellen.

Men heeft de wetten der inductiewerkingen afgeleid uit proeven met lineaire geleiders (dunne draden). Daarbij vond men niet wat

wij de electromotorische kracht  $F$  hebben genoemd, maar een andere grootheid  $G$ , die wij de *electromotorische kracht langs den geleider* zullen noemen. Is  $\sigma$  de geleider en  $F_\sigma$  de component van  $F$ , in de richting van  $\sigma$ , dan is

$$G = \int F_\sigma d\sigma; \dots \dots \dots (24)$$

m. a. w.  $G$  is de arbeid, dien de op een eenheid positieve electriciteit werkende kracht verricht, wanneer die eenheid langs den geleider verplaatst wordt.

Gaan wij vooreerst na, welke uitkomsten de waarnemingen voor  $G$  hebben opgeleverd, wanneer de inductie door een electrischen stroom wordt uitgeoefend. Nauwkeurige bepalingen heeft men in dit opzicht alleen voor het geval, dat ook de induceerende geleider lineair is, en bovendien beide geleiders gesloten zijn. Het bleek daarbij, dat de inductieverschijnselen in zeer nauw verband staan met de electro-dynamische werkingen, en wij moeten dus eerst met een enkel woord over deze spreken.

Door de schoone onderzoekingen van AMPÈRE is bewezen, dat de onderlinge werking van twee gesloten stroomen volkomen dezelfde is, als die van twee magnetische lagen 1), die elk door een der stroomgeleiders begrensd worden. Nu kunnen, zooals men weet, bij twee willekeurige magneten, de mechanische krachten, die zij op elkander uitoefenen, gevonden worden uit een grootheid, die de potentiaal der twee magneten ten opzichte van elkander genoemd wordt. Derhalve moet ook bij twee gesloten stroomen hetzelfde mogelijk zijn.

F. E. NEUMANN is de eerste geweest, die de potentiaal van twee gesloten stroomen opstelde. Duiden wij de twee geleiders door  $s$  en  $\sigma$ , de stroomintensiteiten door  $i$  en  $j$ , en den afstand van twee elementen door  $r$  aan, dan kan men voor de potentiaal schrijven

$$P_{ij},$$

waarbij

$$P = - A^2 \iint \frac{\cos(d s, d \sigma)}{r} d s d \sigma \dots \dots \dots (25)$$

is.

1) Onder magnetische laag versta ik hierbij een oneindig dunne laag eener zelfstandigheid, die zoodanig gemagnetiseerd is, dat de magnetische polarisatie een richting heeft, loodrecht op 't oppervlak der laag, en, wat de grootte betreft, omgekeerd evenredig is aan de dikte.

Hierbij moet de integratie over beide geleiders worden uitgestrekt, terwijl  $A$  een constante is, die men uit de waarnemingen kan afleiden.

De beteekenis van de potentiaal is deze, dat zij den arbeid voorstelt, dien men verrichten moet, om de beide geleiders van een oneindig grooten afstand te brengen in den stand, waarin zij zich bevinden.

Is eens de potentiaal bekend, dan kan men de mechanische krachten, door de geleiders op elkander uitgeoefend, vinden door de stelling, dat de arbeid, door deze krachten bij een oneindig kleine verplaatsing der geleiders verricht, gelijk is aan de aangroeiing van de potentiaal, met het tegengestelde teeken genomen.

De invoering van deze grootheid heeft het voordeel aangebracht, dat zij niet alleen de electro-dynamische werkingen bepaalt, maar dat bovendien de wetten der inductie zich nu op zeer eenvoudige wijze laten aangeven. Is  $s$  de induceerende,  $\sigma$  de geïnduceerde geleider, en wederom de stroomsterkte in den eersten  $i$ , dan wordt de electromotorische kracht der inductie langs  $\sigma$ , ontstaande uit verplaatsing van  $s$ , verandering van  $i$ , of uit beide oorzaken te gelijk, gegeven door

$$G = \frac{d(P i)}{dt},$$

of, wanneer alleen de intensiteit verandert, door

$$G = P \frac{di}{dt} \dots \dots \dots (26).$$

Het volgt onmiddellijk uit de boven voor  $G$  gegeven bepaling, dat die grootheid te beschouwen is als de som der electromotorische krachten langs elk element van  $\sigma$ . Verder ligt het voor de hand, de werking van den stroom  $s$  te ontbinden in de werking zijner afzonderlijke elementen. Eerst dan hebben wij dus een voldoende kennis van het verschijnsel, wanneer ons de electromotorische kracht  $G_1$  der inductie langs het element  $d\sigma$  bekend is, ontstaande uit een verandering der stroomsterkte in het element  $ds$ . Wij moeten zelfs  $G_1$  noodzakelijk kennen, willen wij in het algemeen de inductie bij willekeurige elektrische bewegingen beschouwen; men kan toch gewoonlijk dergelijke bewegingen niet meer als een stelsel gesloten stroomen opvatten.

Hier doet zich nu het bezwaar voor, dat men de induceerende

werking van stroomelementen niet op ondubbelzinnige wijze uit die van gesloten stroomen kan afleiden. In ons geval intusschen, waar alleen verandering van intensiteit de oorzaak der inductie is, is een enkele, zeer natuurlijke onderstelling voldoende, om den vorm te kunnen vaststellen, dien  $G_1$  moet aannemen. Die onderstelling is deze, dat, evenals bij gesloten stroomen, blijkens de formule (26), zoo ook bij stroomelementen de gezochte electromotorische kracht evenredig is aan  $\frac{di}{dt}$ .

Neemt men dit aan, dan wordt

$$G_1 = p \frac{di}{dt},$$

waarbij  $p$  eenige functie is, van den onderlingen stand en de lengte der elementen afhange, maar onafhankelijk van de stroomsterkte. Daar wij nu steeds onderstellen, dat alleen  $i$  veranderlijk is, mag men dan ook schrijven

$$G_1 = \frac{d(pi)}{dt} \dots \dots \dots (27)$$

Verder is het dan duidelijk, dat men door integratie van  $p$  over de beide stroomgeleiders de grootheid  $P$  verkrijgen moet. Dit is het geval, als men stelt

$$p = -A^2 \frac{\cos(ds, d\sigma)}{r} ds d\sigma, \dots \dots \dots (28)$$

maar dit is niet de eenige uitdrukking, die men kan kiezen. Men mag toch gerustelijk bij (28) termen voegen, die bij de integratie noodzakelijk verdwijnen, zoodra een der geleiders gesloten wordt. HELMHOLTZ heeft nu aangetoond, dat de meest algemeene vorm, dien men voor  $p$  mag aannemen, om in dat geval dezelfde uitkomst te verkrijgen, als uit (28), de volgende is:

$$p = -\frac{1}{2} A^2 \frac{1}{r} \left[ (1+k) \cos(ds, d\sigma) + (1-k) \cos(r, ds) \cos(r, d\sigma) \right] ds d\sigma, (29)$$

als men namelijk nog onderstelt, dat de induceerende werking van stroomelementen op dezelfde wijze van den afstand afhangt, als die van gesloten stroomen. Het is deze uitdrukking, die wij in het vervolg ten grondslag zullen leggen.

De hier ingevoerde constante  $k$  kan uit de waarnemingen omtrent gesloten stroomen niet worden afgeleid. Stelt men haar  $= +1$ ,

dan verkrijgt men de uitdrukking (28); neemt men  $k = -1$ , dan komt de formule overeen met die, welke uit de wet van WEBER volgt; neemt men eindelijk  $k = 0$ , dan komt men, zooals wij later zullen zien, tot resultaten, die met de theorie van MAXWELL overeenkomen.

Al kennen wij  $k$  niet, één zaak is door HELMHOLTZ bewezen, dat die constante nl. niet negatief mag genomen worden, daar in dat geval het evenwicht der electriciteit labiel zou kunnen zijn, zoodat een zeer kleine verstoring van dit evenwicht aanleiding zou kunnen geven tot hoe langer hoe grooter afwijkingen daarvan, iets, dat ten eenemale met de waarnemingen in strijd is 1).

§ 11. Uit de beteekenis van  $G_1$  volgt

$$F_{\sigma} = \frac{G_1}{d \sigma}$$

Hieruit blijkt, hoe men uit het gevondene de component der electromotorische kracht — zooals wij die oorspronkelijk hebben

1) Men vindt het onderzoek van HELMHOLTZ in CRELLE's Journal 72 (1870), een uittreksel in WIEDEMANN, Galvanismus II, 2, p. 638—649 (tweede uitgave).

Bij de afleiding der formule (27) ben ik in zooverre van HELMHOLTZ afgeveken, dat ik mij bepaald heb tot het geval, dat alleen de stroomsterkte verandert, terwijl de stroomgeleiders in rust blijven. Veranderen ook de grootheden  $l$ ,  $m$ ,  $n$ , enz., die den stand van het element  $ds$  bepalen, dan ligt het wel voor de hand, te stellen

$$G_1 = p \frac{di}{dt} + p_1 i \frac{dl}{dt} + p_2 i \frac{dm}{dt} + \text{enz.}, \dots (\alpha)$$

maar, om dit tot (27) terug te brengen, is de onderstelling noodig, dat het tweede lid van  $(\alpha)$  steeds een volkomen differentiaal is. HELMHOLTZ maakt die onderstelling en leidt in alle gevallen de inductiewerking van stroomelementen, even als die van gesloten stroomen, uit de beschouwing van hun onderlinge potentiaal af. Evenzoo bezigt hij die ter bepaling der electro-dynamische aantrekkingen en afstootingen. Afgezien van de moeilijkheden, die men hierbij kan ondervinden, blijft het aannemen dier potentiaal een hypothese, die voor ons doel niet noodzakelijk is.

Wat de constante  $k$  betreft, heb ik het onderzoek van HELMHOLTZ niet weergegeven, daar de waarde van  $k$  voor de theorie der volgende hoofdstukken van geen overwegend belang is. Wij zullen zien, dat, zelfs wanneer  $k$  negatief mocht worden genomen — zooals sommigen dit, ook na de bewijsvoering van HELMHOLTZ, nog willen — onze resultaten hunne geldigheid niet zouden verliezen.

opgevat — in de richting van  $d\sigma$  kan afleiden; daarbij wordt de uitkomst natuurlijk onafhankelijk van de lengte van  $d\sigma$ . Stellen we dan nu in plaats van  $d\sigma$  de willekeurige richting  $h$ , dan blijkt het ons, dat wij de electromotorische kracht der inductie, door het element  $i ds$  in die richting uitgeoefend, kunnen voorstellen door

$$F_h = -A^2 \frac{dq}{dt},$$

waarbij, volgens (29),

$$q = \frac{1}{2r} \left[ (1+k) \cos(ds, h) + (1-k) \cos(r, ds) \cos(r, h) \right] i ds$$

is. Door hierin voor  $h$  achtereenvolgens de richtingen der drie assen te nemen, vinden we de componenten  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  der electromotorische kracht.

Stellen wij ons thans voor, dat wij in de ruimte een willekeurige stroomverdeling hebben, bepaald door de componenten  $u$ ,  $v$ ,  $w$  in elk punt  $(x', y', z')$ , en zoeken we de electromotorische kracht, door verandering van  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , in het punt  $(x, y, z)$  uitgeoefend. Beschouwen we vooreerst het element  $dx' dy' dz'$ , dan kunnen we daarvoor in de plaats stellen drie stroomelementen, waarvoor  $i$  en  $ds$  de volgende waarden aannemen

$$u dy' dz', dx'; \quad v dz' dx', dy'; \quad w dx' dy', dz'.$$

Voor elk dezer stroomelementen kunnen wij de waarde van  $q$  zoeken, de drie dus verkregen uitdrukkingen optellen en vervolgens over de geheele ruimte, waarin stroomen voorkomen, integreeren. Verkrijgen we daarbij de waarden  $U$ ,  $V$  en  $W$ , wanneer wij voor  $h$  achtereenvolgens de richtingen der drie assen nemen, dan is

$$X = -A^2 \frac{\partial U}{\partial t}, \quad Y = -A^2 \frac{\partial V}{\partial t}, \quad Z = -A^2 \frac{\partial W}{\partial t}, \quad \dots \quad (30)$$

terwijl men gemakkelijk vindt

$$U = \iiint \left\{ \frac{1+k}{2} \cdot \frac{u}{r} + \frac{1-k}{2} \cdot \frac{x-x'}{r^3} \right. \\ \left. \left[ u(x-x') + v(y-y') + w(z-z') \right] \right\} dx' dy' dz', \quad \dots \quad (31)$$

waarbij onder het integraalteeken  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , als functiën van  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  zijn te beschouwen. De uitdrukkingen voor  $V$  en  $W$  zijn op dezelfde wijze op te stellen.

Hiermede zou dit onderzoek zijn afgeloopen, ware het niet noodig, eenige eigenschappen der functiën  $U$ ,  $V$ ,  $W$  te leeren kennen. Wij stellen daarbij, dat de stroomcomponenten  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , en eveneens  $\varphi$ , overal eindig en op oneindigen afstand 0 zijn, dat echter de drie eerste grootheden aan eenig oppervlak  $S$  (grensvlak van twee lichamen) ondoorlopend kunnen worden. Wij zullen nagaan, hoe het dan met de doorloopendheid van  $U$ ,  $V$ ,  $W$  gesteld is; tevens zullen wij eenige differentiaalvergelijkingen leeren kennen, waaraan die functiën voldoen. Evenals bij onderzoekingen omtrent de electrostatische potentiaalfunctie, zijn hier die differentiaalvergelijkingen voor het gebruik geschikter dan de integraalvergelijking (31).

§ 12. Vooreerst moeten wij opmerken — en een dergelijke omstandigheid doet zich bij verschillende, later voorkomende integralen voor — dat, wanneer het punt  $(x, y, z)$  binnen de ruimte ligt, waarin de electricische beweging plaats heeft, sommige elementen van de integraal (31) oneindig groot worden. Men kan echter, door invoering van poolcoördinaten, bewijzen, dat daardoor de integraal zelf niet oneindig wordt; dit onderzoek stemt geheel overeen met de beschouwingen, die men op de potentiaalfunctie kan toepassen voor een punt, te midden van de aantrekkende stof gelegen. 1)

Verder kan men in plaats van (31) schrijven

$$U = \iiint \left\{ \frac{u}{r} + \frac{1-k}{2} \left[ u \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial x'} + v \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y'} + w \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial z'} \right] \right\} dx' dy' dz',$$

en dit wordt eenvoudiger, wanneer men de nieuwe grootheid

$$\Psi = \iiint \left( u \frac{\partial r}{\partial x'} + v \frac{\partial r}{\partial y'} + w \frac{\partial r}{\partial z'} \right) dx' dy' dz' \dots \dots (32)$$

invoert. Immers, voor een punt  $(x, y, z)$ , buiten de ruimte, waarin de electricische bewegingen plaats hebben, heeft men klaarblijkelijk

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{1-k}{2} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \iiint \frac{u}{r} dx' dy' dz' \\ \text{en evenzoo} \\ V &= \frac{1-k}{2} \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \iiint \frac{v}{r} dx' dy' dz', \\ W &= \frac{1-k}{2} \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \iiint \frac{w}{r} dx' dy' dz'. \end{aligned} \right\} \dots (33).$$

1) Men zie b. v. CLAUDIUS, die Potentialfunction, § 11.



Dat deze vergelijkingen ook nog gelden, wanneer het punt  $(x, y, z)$  binnen de bedoelde ruimte ligt, laat zich door een dergelijk onderzoek aantoonen, als men in de theorie der attractie bezigt om te bewijzen, dat, ook in het inwendige der aantrekkende stof, de krachtcomponenten door de differentiaalquotienten der potentiaal-functie worden gegeven 1).

De uitdrukking voor  $\Psi$  laat zich transformeeren door partieele integratie. Past men deze bewerking op het eerste deel van  $\Psi$  toe, dan vindt men

$$\iiint u \frac{\partial r}{\partial x'} d x' d y' d z' = \iint [u r] d y' d z' - \iiint r \frac{\partial u}{\partial x'} d x' d y' d z'.$$

Hierbij is  $[u r]$  samengesteld uit de waarden, die  $u r$  aanneemt in de verschillende punten van het grensvlak der ruimte, waarover geïntegreerd wordt, welke de coördinaten  $y'$  en  $z'$  hebben — mits men die waarden van de behoorlijke teekens voorzie. Onderstelt men nu, dat  $u$  bij toenemende waarden van  $r$  zoo sterk afneemt, dat  $u r$  tot 0 nadert 2), en past men de gevonden vergelijking toe op de verschillende deelen der ruimte, die door de oppervlakken  $S$  zijn gescheiden, dan komt er

$$\iiint u \frac{\partial r}{\partial x'} d x' d y' d z' = \iint r (u_1 - u_2) a d S - \iiint r \frac{\partial u}{\partial x'} d x' d y' d z',$$

zoodat men verkrijgt

$$\Psi = \iint r \left\{ a (u_1 - u_2) + b (v_1 - v_2) + c (w_1 - w_2) \right\} d S - \iiint r \left( \frac{\partial u}{\partial x'} + \frac{\partial v}{\partial y'} + \frac{\partial w}{\partial z'} \right) d x' d y' d z',$$

1) Verg. CLAUDIUS, t. a. p. §§ 12 en 13.

2) Zal dit zoo zijn, dan moeten  $u, v, w$ , voor zeer groote afstanden, geen termen bevatten, grooter dan die van de orde  $\frac{1}{r^2}$ . Dit is b. v. het geval, wanneer de stroomcomponenten op dezelfde wijze van de coördinaten afhangen, als de verplaatsingen in een veerkrachtig medium, waarin zich een trillende beweging voortplant.

Neemt men echter de vergelijkingen (20) en (21) in aanmerking en stelt daarbij korthedshalve voor het tweede lid der laatste

$$\frac{1}{4\pi} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_1 - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_2 \right],$$

waarbij  $n$  de normaal aan het oppervlak  $S$  is, dan kan men ook schrijven

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \iiint r \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_1 - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_2 \right] dS - \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \iiint r \Delta \varphi dx' dy' dz' \dots \quad (34). \end{aligned}$$

Wij kunnen dezen vorm nog wijzigen door toepassing van het theorema van GREEN. Daaruit volgt, gelijk men weet, de betrekking

$$\begin{aligned} \iiint G \Delta H d\tau - \iiint H \Delta G d\tau &= \\ &= \iint G \frac{\partial H}{\partial n} d\Omega - \iint H \frac{\partial G}{\partial n} d\Omega. \end{aligned}$$

Hierbij zijn  $G$  en  $H$  twee functiën der coördinaten  $x, y, z$ , terwijl de twee eerste integralen over eenig deel  $\tau$  der ruimte, de twee laatste over het grensvlak  $\Omega$  daarvan moeten worden genomen. Stellen wij  $G = r$  en  $H = \varphi$ , dan vinden wij

$$\begin{aligned} \iiint r \Delta \varphi dx' dy' dz' - \iiint \varphi \Delta r dx' dy' dz' &= \\ &= \iint r \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Omega - \iint \varphi \frac{\partial r}{\partial n} d\Omega \end{aligned}$$

en dus

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \iiint r \Delta \varphi dx' dy' dz' &= \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Delta r dx' dy' dz' + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \iint r \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) d\Omega - \frac{1}{4\pi} \iint \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial n} d\Omega \end{aligned}$$

Past men deze vergelijking toe op de verschillende deelen der ruimte, door de oppervlakken  $S$  gescheiden, dan leveren de beide laatste termen integralen over het oneindig ver verwijderde grensvlak der ruimte en over de oppervlakken  $S$ . De eerste integralen worden, als  $\varphi$  sterk genoeg, bij het toenemen van den afstand, afneemt, 0; wat de integralen over de oppervlakken  $S$  betreft, deze geven,

daar  $\varphi$  en dus  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$  aan die oppervlakken doorlopend is, juist den eersten term in het tweede lid van (34). Door de hier slechts aangewezen herleiding komt men ten slotte tot de vergelijking

$$\Psi = -\frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Delta r dx' dy' dz',$$

of, daar  $\Delta r = \frac{2}{r}$  is,

$$\Psi = -\frac{1}{2\pi} \iiint \frac{\partial \varphi}{\partial t} \cdot \frac{1}{r} dx' dy' dz' \dots (35)$$

Deze vergelijking is zeer geschikt ter beoordeeling van de continuïteit van  $\Psi$  en zijne differentiaalquotienten. Immers (35) leert ons, dat men  $\Psi$  kan beschouwen als de potentiaalfunctie van een massa, verspreid met de overal eindige dichtheid  $-\frac{1}{2\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ .

Daaruit volgt echter, dat  $\Psi$  zelf en zijne eerste differentiaalquotienten doorlopend zijn, terwijl (zooals uit de vergelijking van Poisson blijkt) de tweede afgeleiden voldoen aan de vergelijking

$$\Delta \Psi = 2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \dots \dots \dots (36)$$

Verder zijn ook die tweede afgeleiden doorlopend. Uit (35) kan men nl. afleiden

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \iiint \frac{\partial \varphi}{\partial t} \cdot \frac{x-x'}{r^3} dx' dy' dz'$$

en hieruit door partieele integratie naar  $x'$ , (waarbij wederom de integraal over het oneindig ver verwijderde grensvlak der ruimte verdwijnt)

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\frac{1}{2\pi} \iiint \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x'} \cdot \frac{1}{r} dx' dy' dz'.$$

Derhalve kan ook  $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$  als de potentiaalfunctie beschouwd worden van een massa, met de overal eindige dichtheid  $-\frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x'}$ .

Hieruit blijkt, dat ook de differentiaalquotienten van  $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$  doorlopend zijn, en evenzoo is dit met die van  $\frac{\partial \Psi}{\partial y}$  en  $\frac{\partial \Psi}{\partial z}$  het geval.

Keeren wij thans terug tot de vergelijkingen (33). Voor de eerste kunnen wij korthedshalve schrijven

$$U = \frac{1-k}{2} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + R.$$

Ook de grootheid  $R$  kan echter als een potentiaalfunctie worden opgevat, en wel van een massa met de dichtheid  $u$ . Daar deze overal eindig is, zijn ook  $R$  en zijne eerste differentiaalquotienten doorlopend. Vooreerst blijkt het dus dat ook  $U$  doorlopend moet zijn, daar dit ook voor  $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$  is bewezen. Door verder de boven-

staande vergelijking naar  $x$ ,  $y$  en  $z$  te differentiëren, vindt men de eerste afgeleiden van  $U$ , uitgedrukt in de tweede van  $\Psi$  en in de eerste van  $R$ , voor welke grootheden de continuïteit bewezen is.

Men komt dus tot het resultaat, dat de grootheden  $U$ ,  $V$ ,  $W$  en hare eerste afgeleiden overal doorlopend zijn, ook aan de oppervlakken  $S$  (grens van twee lichamen), waar  $u$ ,  $v$ ,  $w$  ondoorlopend kunnen worden. Deze omstandigheid zal ons later van grooten dienst zijn, als wij de voorwaarden voor de grens van twee middenstoffen moeten opstellen.

De hier ingevoerde functiën voldoen nog aan eenige merkwaardige betrekkingen. Uit (33) volgt vooreerst

$$\Delta U = \frac{1-k}{2} \frac{\partial}{\partial x} \Delta \Psi - 4\pi u,$$

of, als men (36) in aanmerking neemt,

$$\left. \begin{aligned} \Delta U &= (1-k) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} - 4\pi u \\ \Delta V &= (1-k) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t} - 4\pi v, \\ \Delta W &= (1-k) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial t} - 4\pi w. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (37)$$

en evenzoo

Eindelijk vindt men uit dezelfde vergelijkingen

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{1-k}{2} \Delta \Psi + \\ + \iiint \left\{ u \frac{x'-x}{r^3} + v \frac{y'-y}{r^3} + w \frac{z'-z}{r^3} \right\} dx' dy' dz'.$$

Door integratie bij gedeelten gaat de laatste term, na eenige

herleiding, over in  $-\frac{\partial \varphi}{\partial t}$  en daar, volgens (36),  $\Delta \Psi = 2 \frac{\partial \varphi}{\partial t}$

is, hebben wij

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = -k \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (38)$$

Van de herleidingen van deze § waren vooral die, welke op de grootheid  $\Psi$  betrekking hebben, vrij samengesteld. Bovendien moesten wij daarbij een enkele maal aannemen, dat  $\varphi$ , bij grooter wordenden afstand, zeer sterk afneemt. Streng genomen moet dit, na de oplossing van een vraagstuk, geverificeerd worden. Het is daarom niet van belang ontbloot, op te merken, dat in de gevallen, waarop wij later de theorie zullen toepassen, de electriciteit zich op dezelfde wijze beweegt, als een onsamendrukbare vloeistof. Alsdan is overal  $\varphi = 0$ , dus, blijkens (34), ook  $\Psi = 0$ , zoodat, wanneer men zich, van het begin af aan, tot die gevallen wilde bepalen, het geheele onderzoek omtrent  $\Psi$  achterwege kon blijven. Dan zouden in de vergelijkingen (33) alleen de laatste termen blijven bestaan, en uit die betrekkingen zou dan onmiddellijk de continuïteit van  $U$ ,  $V$ ,  $W$  en hunne differentiaalquotienten volgen. Tevens kon men er gemakkelijk de vergelijkingen uit afleiden, waarin (37) en (38) overgaan, als men daarin  $\varphi = 0$  stelt.

§ 13. Wij hebben nog de inductie te beschouwen, die het gevolg is van een yeranderlijke magnetisatie. Uit de onderzoekingen over het magnetisme en diamagnetisme is het gebleken, dat in alle onderzochte stoffen een magnetische polarisatie der moleculen ontstaan kan en de onderstelling ligt voor de hand, dat dit verschijnsel ook nog in de luchtledige ruimte bestaat. Niet alleen komt men, door dit aan te nemen, niet met bekende feiten in tegenspraak, maar men geraakt zelfs langs dezen weg tot de eenvoudigste theorie van het diamagnetisme.

De mathematische behandeling van dit verschijnsel komt geheel overeen met die van de diëlectrische polarisatie. Daarbij komt in de plaats van positieve en negatieve electriciteit noord- en zuidmagnetisme, waarvan de eenheid op dezelfde wijze wordt vastgesteld. De electromotorische kracht wordt hier vervangen door de magnetiseerende kracht (voor het inwendige van een gemagnetiseerd lichaam met de nadere bepaling van § 2), de constante  $\epsilon$  door een andere, die wij  $\theta$  zullen noemen. Zijn dus  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  de

componenten der magnetische polarisatie,  $L$ ,  $M$ ,  $N$  die der uitwendige magnetiseerende kracht,  $\chi$  de magnetische potentiaalfunctie, dan hebben wij overal

$$\lambda = \theta \left( L - \frac{\partial \chi}{\partial x} \right), \mu = \theta \left( M - \frac{\partial \chi}{\partial y} \right), \nu = \theta \left( N - \frac{\partial \chi}{\partial z} \right) \dots \dots (39)$$

Ter bepaling van  $\chi$  dienen hier de vergelijkingen

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial z} = \frac{1}{4\pi} \Delta \chi, \dots \dots (40)$$

$$\begin{aligned} a(\lambda_1 - \lambda_2) + b(\mu_1 - \mu_2) + c(\nu_1 - \nu_2) &= \frac{1}{4\pi} \left\{ a \left[ \left( \frac{\partial \chi}{\partial x} \right)_1 - \left( \frac{\partial \chi}{\partial x} \right)_2 \right] + \right. \\ &+ b \left[ \left( \frac{\partial \chi}{\partial y} \right)_1 - \left( \frac{\partial \chi}{\partial y} \right)_2 \right] + c \left[ \left( \frac{\partial \chi}{\partial z} \right)_1 - \left( \frac{\partial \chi}{\partial z} \right)_2 \right] \left. \right\}, \dots (40)^* \end{aligned}$$

waarvan de eerste overal geldig is, waar  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  doorlopend zijn, de tweede aan elk oppervlak  $S$ , waar dit niet meer het geval is.

Deze vergelijkingen komen overeen met (20) en (21) voor de dielectrische polarisatie.

Wat de constante  $\theta$  betreft, men heeft deze evenmin als  $\epsilon$  kunnen bepalen; ook hier is alleen de verhouding  $Q$  van de waarden bekend, die  $1 + 4\pi\theta$  voor verschillende stoffen aanneemt, en juist hierdoor zijn wij vrij, om te onderstellen, dat ook in de luchtledige ruimte magnetische polarisatie bestaan zou. De grootheid  $Q$  is echter voor alle stoffen, met uitzondering van de magnetische metalen, zeer weinig van de eenheid verschillend, zoodat men slechts een kleine fout begaat, door  $Q = 1$  te stellen.

Nu is het bekend, dat een elektrische stroom in zijn omgeving een magnetiseerende kracht uitoefent, en dat, aan den anderen kant, verandering in den magnetischen toestand inductieverschijnselen ten gevolge heeft. Vandaar de noodzakelijkheid, hier de magnetische polarisatie in rekening te brengen.

Wij zullen vooreerst de vergelijkingen opstellen ter bepaling van den magnetischen toestand, die het gevolg is van een electrischen stroom. Daar de magnetiseerende kracht ( $L$ ,  $M$ ,  $N$ ) de kracht is, die op een noordpool, met de eenheid van magnetisme, wordt uitgeoefend, moeten wij vooreerst deze werking leeren kennen. Men heeft haar alleen waargenomen, wanneer de werkende stroomen gesloten zijn en door elke doorsnede van den stroomgeleider even veel electriciteit stroomt. Wil men de magnetiseerende kracht kennen, door een stroomelement uitgeoefend, dan laten zich daar-

voor verschillende waarden aangeven, die voor gesloten stroomen alle tot hetzelfde resultaat voeren. Daaruit volgt, dat, wanneer wij een dezer uitdrukkingen opstellen, de daaruit volgende theorie alleen dan zeker juist zal zijn, wanneer de electriciteitsbeweging als een samenstel van gesloten stroomen kan opgevat worden. Dit is echter het geval, zoodra de electriciteit zich op dezelfde wijze beweegt, als een onsamendrukbare vloeistof en bij de toepassingen van de volgende hoofdstukken zal werkelijk aan die voorwaarde voldaan zijn.

Met de theorie van AMPÈRE is het in overeenstemming, als men voor de kracht, door een stroomelement  $i ds$  op een noordpool, met de eenheid van magnetisme uitgeoefend, stelt

$$\frac{A i ds \sin(r, ds)}{r^2}.$$

Deze kracht is gericht volgens een loodlijn op het vlak, door  $ds$  en  $r$  gebracht, terwijl de zijde, naar welke die loodlijn moet getrokken worden, op een bekende wijze is aan te geven. De constante  $A$  is dezelfde, die in onze vroegere vergelijkingen voorkomt. 1)

Ten einde, zonder dubbelzinnigheid, de componenten dezer kracht op te stellen, is het noodig, de keus van ons coördinatenstelsel nader te bepalen. Wij stellen daaromtrent vast, dat een wenteling van de positieve  $x$ - naar de positieve  $y$ -as (over een rechten hoek) in richting met de beweging der wijzers van een uurwerk overeenkomt, wanneer de beschouwer zich aan de zijde der positieve  $z$ - as bevindt. Ontbindt men dan  $ds$  in de drie componenten  $dx'$ ,  $dy'$ ,  $dz'$ , ligt verder de noordpool in het punt  $(x, y, z)$  dan heeft men voor de gezochte componenten

$$L' = A i \left[ dy' \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \right) - dz' \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{r} \right) \right],$$

$$M' = A i \left[ dz' \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right) - dx' \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \right) \right],$$

$$N' = A i \left[ dx' \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{r} \right) - dy' \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right) \right].$$

Willen wij nu de magnetiseerende kracht zoeken, die het gevolg is van een willekeurige stroomverdeling in de ruimte, zooals wij

1) De hier gekozen formule wordt ook door HELMHOLTZ gebruikt, ofschoon ze juist met diens „Potentialgesetz” niet overeenstemt.

die in de vorige §§ hebben aangenomen, en bepalen wij ons daarbij vooreerst tot den stroom in het element  $dx' dy' dz'$ , dan moeten wij in bovenstaande uitdrukkingen in plaats van  $id x'$ ,  $idy'$ ,  $idz'$  stellen

$$u dx' dy' dz', \quad v dx' dy' dz', \quad w dx' dy' dz'.$$

Om vervolgens de totale magnetiseerende kracht te leeren kennen, moeten wij over de geheele ruimte integreeren.

Aldus komt er

$$L = A \iiint \left[ v \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \right) - w \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{r} \right) \right] dx' dy' dz'$$

en dergelijke uitdrukkingen voor  $M$  en  $N$ .

Dit is eenvoudiger voor te stellen wanneer men de vergelijkingen (33) in aanmerking neemt. Differentieert men de tweede daarvan naar  $z$ , de derde naar  $y$  en trekt af, dan valt  $\Psi$  weg en men verkrijgt juist de integraal, die wij hier hebben, zoodat men mag stellen

$$\begin{aligned} L &= A \left( \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y} \right), \quad M = A \left( \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z} \right), \\ N &= A \left( \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x} \right) \dots \dots \dots (41). \end{aligned}$$

Beschouwen wij thans de electromotorische kracht der inductie, ontstaande uit een verandering van den magnetischen toestand. Wij maken daarbij gebruik van de omstandigheid, dat men, wat de werking naar buiten betreft, een oneindig kleinen magneet kan vervangen door een oneindig kleinen cirkelvormigen stroom, in een vlak loodrecht op de as van den magneet en dat de inductie, die het gevolg is van verandering van het magnetisch moment, dezelfde is als die, welke uit een overeenkomstige verandering der stroomintensiteit voortvloeit. Op de inductie, die hieruit ontstaat, zijn echter de formules van §§ 10, 11 en 12 van toepassing. Daar de stroom hier gesloten is, kunnen wij  $k$  willekeurig nemen, dus b. v.  $k = 1$  stellen en van de eenvoudige formule (28) gebruik maken.

Hebben wij in het punt  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  een oneindig kleinen magneet, waarvan de as volgens de  $z$ -as is gericht, en het moment  $n$  is, dan kunnen wij dien door een cirkelstroom vervangen, gelegen in een vlak, evenwijdig aan het  $xy$ -vlak, en zoo dat, als  $R$  de oneindig kleine straal,  $i$  de stroomsterkte is, de betrekking bestaat

$$A i \pi R^2 = n \dots \dots \dots (42).$$



Voor de electromotorische kracht, door dezen stroom (bij verandering van  $i$ ) in het punt  $(x, y, z)$  uitgeoefend, vindt men dan de componenten

$$A^2 \frac{\partial}{\partial t} \left[ i \pi R^2 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{r} \right) \right], \quad -A^2 \frac{\partial}{\partial t} \left[ i \pi R^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right) \right], \quad 0,$$

of, als men (42) in aanmerking neemt,

$$A \frac{\partial}{\partial t} \left[ \mathfrak{n} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{r} \right) \right], \quad -A \frac{\partial}{\partial t} \left[ \mathfrak{n} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right) \right], \quad 0.$$

Deze uitdrukkingen bepalen derhalve ook de electromotorische kracht der inductie, door den onderstelden magneet, bij verandering van zijn moment, uitgeoefend. Voor twee dergelijke magneten met de momenten  $\mathfrak{I}$  en  $\mathfrak{m}$ , en met de assen evenwijdig aan de  $x$ - en  $y$ -as, hebben wij evenzoo de electromotorische krachten:

$$0, \quad A \frac{\partial}{\partial t} \left[ \mathfrak{I} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \right) \right], \quad -A \frac{\partial}{\partial t} \left[ \mathfrak{I} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{r} \right) \right], \\ -A \frac{\partial}{\partial t} \left[ \mathfrak{m} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \right) \right], \quad 0, \quad A \frac{\partial}{\partial t} \left[ \mathfrak{m} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right) \right].$$

Bestaat nu in de ruimte een willekeurige magnetische polarisatie, dan kunnen wij het element  $dx' dy' dz'$  vervangen door drie oneindig kleine magneten met de momenten

$$\mathfrak{I} = \lambda dx' dy' dz', \quad \mathfrak{m} = \mu dx' dy' dz', \quad \mathfrak{n} = \nu dx' dy' dz'$$

en door bovenstaande uitdrukkingen kunnen wij dan de inductie berekenen, door dit element uitgeoefend. Door vervolgens over de geheele ruimte te integreeren, vinden wij voor de totale componenten der electromotorische kracht, voortspruitende uit verandering van de magnetische polarisatie,

$$A \frac{\partial}{\partial t} \iiint \left[ \nu \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{r} \right) - \mu \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \right) \right] dx' dy' dz',$$

$$A \frac{\partial}{\partial t} \iiint \left[ \lambda \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \right) - \nu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right) \right] dx' dy' dz',$$

$$A \frac{\partial}{\partial t} \iiint \left[ \mu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right) - \lambda \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{r} \right) \right] dx' dy' dz',$$

waarbij  $\lambda$ ,  $\mu$  en  $\nu$  als functiën van  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  zijn te beschouwen.

Voeren wij de volgende nieuwe grootheden in:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{L} &= \iiint \frac{\lambda}{r} dx' dy' dz', \\ \mathbf{M} &= \iiint \frac{\mu}{r} dx' dy' dz', \\ \mathbf{N} &= \iiint \frac{\nu}{r} dx' dy' dz', \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (43)$$

dar worden de boven verkregen uitdrukkingen eenvoudiger, nl.

$$\begin{aligned} A \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial z} \right), \quad A \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \right), \\ A \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial y} \right) \dots \dots \dots (44). \end{aligned}$$

Omtrent de grootheden  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{N}$  merk ik nog op, dat zij, blijkens de vergelijkingen (43), zijn te beschouwen als potentiaal-functiën van massa's, met de overal eindige dichtheden  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ . Daaruit volgt, dat  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{N}$  en de eerste differentiaalquotienten overal doorloopend zijn.

§ 14. Wij kunnen eindelijk de vergelijkingen opstellen, die in het algemeen de beweging der electriciteit en den daarmede samenhangenden magnetischen toestand bepalen.

Wij hebben daartoe vooreerst  $\frac{\xi}{s}$ ,  $\frac{\eta}{s}$ ,  $\frac{\zeta}{s}$  gelijk te stellen aan de componenten der electromotorische kracht. Daarbij onderstellen we, dat geen uitwendige krachten werken; alsdan bestaat de electromotorische kracht uit de drie deelen, die wij in (1), (30) en (44) hebben aangegeven.

Derhalve is

$$\left. \begin{aligned} \frac{\xi}{s} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - A^2 \frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial z} \right], \\ \frac{\eta}{s} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y} - A^2 \frac{\partial V}{\partial t} + A \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \right], \\ \frac{\zeta}{s} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial z} - A^2 \frac{\partial W}{\partial t} + A \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial y} \right]. \end{aligned} \right\} \dots \dots (45)$$

Evenzoo volgt uit (39) en (41) ter bepaling van de magnetische polarisatie:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\lambda}{\theta} &= A \left[ \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y} \right] - \frac{\partial \chi}{\partial x}, \\ \frac{\mu}{\theta} &= A \left[ \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z} \right] - \frac{\partial \chi}{\partial y}, \\ \frac{\nu}{\theta} &= A \left[ \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x} \right] - \frac{\partial \chi}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (46)$$

Hiermede zijn alle betrekkingen opgesteld, die noodig zijn, ter bepaling van de verschillende grootheden, als functiën van plaats en tijd. Wanneer toch  $\xi, \eta, \zeta, \lambda, \mu, \nu$  zijn gegeven, vindt men  $u, v, w$  uit (17),  $U, V, W$  uit (32) en (33),  $\varphi$  uit (18) en (19),  $\chi$  uit (40) en (40\*),  $\mathbf{L}, \mathbf{M}, \mathbf{N}$  uit (43). Alles is dus bepaald in functie van de zes grootheden  $\xi, \eta, \zeta, \lambda, \mu, \nu$ , en, om deze te vinden, heeft men in (45) en (46) zes vergelijkingen.

Het vereischte aantal betrekkingen is dus voorhanden, om, als men den begintoestand en de grensvoorwaarden in aanmerking neemt, vraagstukken omtrent de beweging der electriciteit op te lossen.

Past men, zooals wij in 't vervolg zullen doen, de theorie toe op een onbegrensd lichaam (of stelsel van lichamen), dan zijn de grensvoorwaarden deze, dat  $\xi, \eta, \zeta, \lambda, \mu, \nu$  en de daarvan afhankende functiën op oneindigen afstand moeten verdwijnen.

De opgestelde vergelijkingen hebben nog het bezwaar, dat zij een groot aantal functiën bevatten en dat bovendien in sommige, b. v. in (43), integralen voorkomen. Men kan meer geschikte uitdrukkingen verkrijgen, door gebruik te maken van de volgende stellingen.

Wanneer in een ruimte, begrensd door het oppervlak  $S$ , de drie functiën  $\mathfrak{F}, \mathfrak{M}, \mathfrak{Z}$  voldoen moeten aan de vergelijkingen

$$\mathfrak{F} = 0, \quad \mathfrak{M} = 0, \quad \mathfrak{Z} = 0, \quad \dots \dots \dots (\alpha)$$

dan volgt daaruit klaarblijkelijk, dat zij ook voldoen aan de voorwaarden

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z} = 0. \end{aligned} \right\} \dots (\beta)$$

Omgekeerd volgt ( $\alpha$ ) uit ( $\beta$ ), wanneer men daaraan nog de voorwaarden toevoegt, dat vooreerst in de bedoelde ruimte  $\mathfrak{F}, \mathfrak{M}, \mathfrak{Z}$  doorlopend moeten zijn ( $\gamma$ ), en dat ten tweede aan het oppervlak  $S$

$$a \mathfrak{X} + b \mathfrak{Y} + c \mathfrak{Z} = 0 \dots \dots \dots (\delta)$$

is.

Immers uit de drie eerste van de vergelijkingen ( $\beta$ ) volgt, dat men mag stellen

$$\mathfrak{X} = \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial x}, \quad \mathfrak{Y} = \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial y}, \quad \mathfrak{Z} = \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial z},$$

waarbij  $\mathfrak{D}$  een functie is, die, blijkens de laatste der vergelijkingen ( $\beta$ ), voldoen moet aan  $\Delta \mathfrak{D} = 0$ , en, blijkens ( $\delta$ ), aan  $\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial n} = 0$ , als  $n$  de normaal van het oppervlak  $S$  is. Hieruit, in verband met de uit ( $\gamma$ ) volgende doorlopendheid der eerste differentiaalquotienten van  $\mathfrak{D}$ , kan men, zooals in de leer der potentiaalfunctiën bewezen wordt, besluiten, dat  $\mathfrak{D}$  binnen het oppervlak  $S$  constant is en dus  $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z} = 0$  zijn.

Daar klaarblijkelijk ook ( $\gamma$ ) en ( $\delta$ ) uit ( $\alpha$ ) volgen, blijkt het, dat de voorwaarde ( $\alpha$ ) door de drie conditiën ( $\beta$ ), ( $\gamma$ ) en ( $\delta$ ) kan vervangen worden, welke volkomen hetzelfde uitdrukken.

Wij kunnen deze stellingen vooreerst toepassen op (45), door voor  $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$  de eerste leden van deze vergelijkingen, nadat zij op 0 herleid zijn, te nemen. Om dan de eerste der vergelijkingen ( $\beta$ ) te vormen, differentieeren wij de derde van (45) naar  $y$ , de tweede naar  $z$  en trekken af. Dan komt er

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\xi}{\varepsilon} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\eta}{\varepsilon} \right) &= A^2 \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y} \right] + \\ + A \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial y} \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \right] \right\} \dots \dots (a) \end{aligned}$$

Voor den eersten term in het tweede lid kan men schrijven, zooals uit de eerste der vergelijkingen (46) volgt,

$$\frac{A}{\theta} \frac{\partial \lambda}{\partial t} + A \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial t}$$

en voor den laatsten term.

$$A \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial z} \right] - \Delta \mathbf{L} \right\} \dots \dots \dots (b)$$

Uit (43) volgt echter

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial z} &= \iiint \left[ \lambda \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{r} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \nu \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \right) \right] dx' dy' dz' = \\ &= - \iiint \left[ \lambda \frac{\partial}{\partial x'} \left( \frac{1}{r} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial y'} \left( \frac{1}{r} \right) + \nu \frac{\partial}{\partial z'} \left( \frac{1}{r} \right) \right] dx' dy' dz' \end{aligned}$$

en gemakkelijk overtuigt men zich, dat de laatste integraal juist de waarde van  $\chi$  voorstelt.

Verder volgt uit (43)  $\Delta \mathbf{L} = -4\pi\lambda$ , zoodat (b) wordt

$$-A \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial t} + 4\pi A \frac{\partial \lambda}{\partial t}.$$

Brengen wij de verkregen uitkomsten in (a) over, dan komt er

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\xi}{s} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\eta}{s} \right) &= \frac{1+4\pi\theta}{\theta} A \frac{\partial \lambda}{\partial t}, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\xi}{s} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\zeta}{s} \right) &= \frac{1+4\pi\theta}{\theta} A \frac{\partial \mu}{\partial t}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\eta}{s} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\xi}{s} \right) &= \frac{1+4\pi\theta}{\theta} A \frac{\partial \nu}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \dots (I)$$

Om verder de vierde der vergelijkingen ( $\beta$ ) te vormen, differentieeren wij (45) naar  $x, y, z$  en tellen op. Dit geeft

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\xi}{s} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\eta}{s} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\zeta}{s} \right) = -\Delta \varphi - A^2 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right),$$

of, als wij (38) in aanmerking nemen,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\xi}{s} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\eta}{s} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\zeta}{s} \right) = -\Delta \varphi + A^2 k \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \quad (II)$$

Evenals hier met (45) kan men ook met (46) te werk gaan. Zoo vindt men uit de tweede en derde

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\nu}{\theta} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\mu}{\theta} \right) = A \left[ \Delta U - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) \right],$$

dus, volgens (37), (38) en (17),

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\nu}{\theta} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\mu}{\theta} \right) &= A \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} - 4\pi \frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{4\pi}{x s} \xi \right], \\ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\lambda}{\theta} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\nu}{\theta} \right) &= A \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t} - 4\pi \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{4\pi}{x s} \eta \right], \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mu}{\theta} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\lambda}{\theta} \right) &= A \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial t} - 4\pi \frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{4\pi}{x s} \zeta \right]. \end{aligned} \right\} \dots (III)$$

Door eindelijk de vergelijkingen (46), naar  $x$ ,  $y$  en  $z$  gedifferentieerd, op te tellen, verkrijgen we

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\lambda}{\theta} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu}{\theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\nu}{\theta} \right) = -\Delta \chi \dots \quad (\text{IV})$$

Wij moeten aan de opgestelde vergelijkingen vooreerst de voorwaarde ( $\mathcal{D}$ ) toevoegen. Daar hier  $S$  het oneindig ver verwijderde grensvlak der ruimte is, is aan die voorwaarde voldaan, wanneer, zooals wij steeds stelden, op oneindigen afstand

$$\xi = \eta = \zeta = \lambda = \mu = \nu = \varphi = \chi = 0 \dots \quad (\text{V})$$

is.

Eindelijk moet nog de voorwaarde ( $\gamma$ ), op de continuïteit betrekking hebbende, in aanmerking worden genomen. De eerste leden van de op 0 herleide vergelijkingen (45) en (46) moeten overal doorlopend zijn, ook aan de oppervlakken  $S$ , waar sommige der functiën  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  ondoorlopend kunnen worden. Dit geval kan zich b.v. aan de grens van twee middenstoffen voordoen en de omstandigheid, dat de eerste leden der bedoelde vergelijkingen ook daar doorlopend moeten zijn, levert ons derhalve de zoo belangrijke grensvoorwaarden. Doorlopend moeten dus zijn

$$\frac{\xi}{s} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} + A^2 \frac{\partial U}{\partial t} - A \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial z} \right], \text{ enz.}$$

en

$$\frac{\lambda}{\theta} - A \left[ \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y} \right] + \frac{\partial \chi}{\partial x}, \text{ enz.}$$

Daar echter voor  $U$ ,  $V$ ,  $W$ ,  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{N}$  en hunne differentiaalquotienten, zooals wij vroeger bewezen hebben, steeds continuïteit bestaat, is het noodzakelijk en voldoende, dat aan het oppervlak  $S$  (grens van twee middenstoffen) de volgende betrekkingen bestaan

$$\left. \begin{aligned} \frac{\xi_1}{s_1} + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_1 &= \frac{\xi_2}{s_2} + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_2, \\ \frac{\eta_1}{s_1} + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_1 &= \frac{\eta_2}{s_2} + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_2, \\ \frac{\zeta_1}{s_1} + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_1 &= \frac{\zeta_2}{s_2} + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_2, \end{aligned} \right\} \dots \quad (\text{A})$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\lambda_1}{\theta_1} + \left( \frac{\partial \chi}{\partial x} \right)_1 &= \frac{\lambda_2}{\theta_2} + \left( \frac{\partial \chi}{\partial x} \right)_2, \\ \frac{\mu_1}{\theta_1} + \left( \frac{\partial \chi}{\partial y} \right)_1 &= \frac{\mu_2}{\theta_2} + \left( \frac{\partial \chi}{\partial y} \right)_2, \\ \frac{\nu_1}{\theta_1} + \left( \frac{\partial \chi}{\partial z} \right)_1 &= \frac{\nu_2}{\theta_2} + \left( \frac{\partial \chi}{\partial z} \right)_2. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (B)$$

De vergelijkingen (I) — (V), (A) en (B) zijn aequivalent met (45) en (46). Behalve de grootheden  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$  en  $\nu$  bevatten zij nog slechts twee andere,  $\varphi$  en  $\chi$ , zoodat wij er alleen nog de vergelijkingen (18) en (19) (met (17)), (40) en (40\*) bij behoeven te nemen, om het vraagstuk geheel bepaald te hebben.

Dit zijn de bewegingsvergelijkingen der electriciteit, zooals zij door HELMHOLTZ zijn opgesteld. Hij heeft verder aangetoond, dat zij de beweging steeds ondubbelzinnig bepalen, zoo lang  $k$  positief genomen wordt.

§ 15. Wil men de verkregen vergelijkingen toepassen op lichamen, die alleen een geleidingsvermogen, geen vatbaarheid voor diëlectrische polarisatie bezitten, dan heeft men slechts

$$\frac{\xi}{\varepsilon}, \frac{\eta}{\varepsilon}, \frac{\zeta}{\varepsilon}$$

te vervangen door de daaraan gelijke waarden

$$x u, x v, x w,$$

en vervolgens  $s = 0$  te stellen.

Evenzoo zijn de vergelijkingen nog geldig, al wil men aan het lichaam geen vatbaarheid voor magnetische polarisatie toekennen.

Want, al zijn  $\theta$  en dus  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu = 0$ , de verhoudingen  $\frac{\lambda}{\theta}$ ,  $\frac{\mu}{\theta}$ ,  $\frac{\nu}{\theta}$  hebben nog altijd beteekenis. Zij stellen nl. de componenten der magnetiseerende kracht voor en deze bestaat altijd, wanneer er beweging der electriciteit plaats heeft, al kan zij misschien geen magnetische polarisatie te weeg brengen.

Heeft men, zooals dit meestal het geval is, met stoffen te doen, die slechts zwakke magnetische of diamagnetische eigenschappen vertoonen, dan mag men, zonder merkbare fout te maken,  $\theta$  overal gelijk stellen aan de waarde  $\theta_0$ , die voor de lucht geldt. Wij kunnen dan verder uit de vergelijkingen (I) en (III)  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  elimineeren en aldus vergelijkingen verkrijgen, waarin alleen  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  en  $\varphi$  voorkomen. Door de derde van (I) naar  $y$  en de tweede naar  $z$  te

differentieeren en ze vervolgens van elkander af te trekken, daarbij de eerste van (III) in aanmerking nemende, verkrijgt men

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\xi}{s} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\eta}{s} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\zeta}{s} \right) \right] - \Delta \left( \frac{\xi}{s} \right) = \\ = (1 + 4\pi\theta_0) A^2 \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} - 4\pi \frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{4\pi}{x} \xi \right] \end{aligned}$$

enz.,

terwijl (II) blijft bestaan. Uit deze vier vergelijkingen, die  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ ,  $\varphi$  en dus de beweging der electriciteit (afgezien van de magnetische polarisatie) bepalen, blijkt dat die beweging van denzelfden aard is, welke waarde men ook aan  $\theta_0$  moge toekennen. Juister gezegd, uit alle proeven omtrent de bewegingsverschijnselen der electriciteit kan men alleen de beide constanten

$$(1 + 4\pi\theta_0) A^2 \text{ en } A^2 k,$$

de eenige, die in de bovenstaande vergelijkingen voorkomen, afleiden, maar dit geeft niet het middel aan de hand, de waarde van  $\theta_0$  te leeren kennen.

Aldus wordt het vroeger gezegde bevestigd, dat men ook aan de lucht magnetische polarisatie mag toeschrijven. Doet men dit intusschen, dan blijkt het tevens, dat de waarnemingen niet meer de juiste waarde van  $A^2$  opleveren. Want, bij de bepaling dezer constante, houdt men met den magnetischen toestand der lucht geen rekening en ziet daardoor voor  $A^2$  aan, wat  $(1 + 4\pi\theta_0) A^2$  is. De waargenomen waarde van  $A^2$  is dus door dit verschijnsel  $1 + 4\pi\theta_0$  maal te groot.

Kent men bovendien aan de lucht de vatbaarheid voor dielectrische polarisatie toe, met de constante  $\epsilon_0$ , dan heeft ook dit invloed op de waarde van  $A$ . Immers men kan, blijkens § 10,  $A^2$  meten, door de electro-dynamische werking  $D$  te bepalen, tusschen twee stroomen, met de bekende intensiteiten  $i$  en  $j$ . Dan toch is

$$A^2 = C \cdot \frac{D}{ij},$$

waarbij  $C$  een grootheid is, van den stand der stroomgeleiders afhangelende.

Maar wij zagen vroeger, dat men bij het meten van  $i$  en  $j$  deze grootheden elk  $\sqrt{1 + 4\pi\theta_0}$  maal te klein vindt; men vindt derhalve  $A^2$   $1 + 4\pi\theta_0$  maal te groot.



Hetzelfde is het geval, wanneer men, zooals volgens § 10 mogelijk is, de waarde van  $A$  afleidt uit de inductieverschijnselen, bij beweging van een stroomgeleider  $s$ , in een tweeden geleider  $\sigma$  opgewekt.

Meet men de stroomsterkte  $i$  in  $s$  en de electromotorische kracht  $G$  langs  $\sigma$ , dan heeft men

$$A^2 = C \cdot \frac{G}{i},$$

waarbij men voor  $C$  een waarde moet stellen, die uit den onderlingen stand der geleiders en uit de verplaatsing van  $s$  is te berekenen. Ook nu wordt weer  $i \sqrt{1 + 4\pi s_0}$  maal te klein gevonden,  $G$  daarentegen evenveel malen te groot, derhalve  $A^2$   $1 + 4\pi s_0$  maal te groot, wat met het boven gevondene overeenstemt.

Men kan uit het hier gezegde afleiden dat, wanneer  $A'$  de waargenomen,  $A$  de werkelijke waarde is, de volgende betrekking bestaat:

$$A = \frac{A'}{\sqrt{(1 + 4\pi s_0)(1 + 4\pi \theta_0)}} \dots \dots \dots (47)$$

Ten slotte nog een enkele opmerking over deze gewichtige constante. Wanneer men nagaat, op welke wijze  $A$  verandert, als men de willekeurige eenheden van lengte, massa en tijd wijzigt, dan vindt men dat  $A$  verandert op dezelfde wijze als het omgekeerde van een snelheid,  $\frac{1}{A}$  dus als een snelheid. Men kan daarom  $\frac{1}{A}$  als een snelheid opgeven en heeft dan niet alleen een bepaling in absolute maat, maar is bovendien onafhankelijk van de gekozen eenheden.

## DERDE HOOFDSTUK.

---

### DE THEORIE VAN MAXWELL.

#### TERUGKAATSING EN BREKING VAN HET LICHT DOOR ISOTROPE, NIET-GELEIDENDE STOFFEN.

§ 1. De vergelijkingen van het vorige hoofdstuk zullen ons dienen, om de merkwaardige ontdekking van MAXWELL te leeren kennen, die hem er toe bracht, het licht op te vatten als een electromagnetisch verschijnsel, een theorie, die, blijkt zij juist te zijn, een der schoonste voorbeelden zal zijn van de vruchten, die een wiskundige behandeling der natuurverschijnselen oplevert.

Wij zullen daartoe de bewegingsvergelijkingen (I) — (V) toepassen op een onbegrensd, homogeen, isotroop lichaam, dat de electriciteit niet geleidt, maar vatbaar is voor diëlectrische en het kan zijn voor magnetische polarisatie. 1) Wij moeten dan vooreerst den weerstand  $\kappa$  oneindig groot nemen en ten tweede  $\epsilon$  en  $\theta$  als grootheden beschouwen, die onafhankelijk zijn van de coördinaten. Tevens voeren wij, in plaats van  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ , de componenten  $L$ ,  $M$ ,  $N$  der (totale) magnetiseerende kracht in, die met de eerste grootheden verbonden zijn door de betrekkingen

$$L = \frac{\lambda}{\theta}, \quad M = \frac{\mu}{\theta}, \quad N = \frac{\nu}{\theta}.$$

Behalve dat hierdoor onze uitdrukkingen iets eenvoudiger wor-

---

1) Het laatste doet, wat de resultaten betreft, niet ter zake.

den, nemen wij aldus niet den schijn aan, dat de onderstelling eener magnetische polarisatie voor de theorie noodzakelijk is. Onze vergelijkingen verkrijgen nu den volgende vorm

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z} &= A \varepsilon (1 + 4 \pi \theta) \frac{\partial L}{\partial t}, \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} &= A \varepsilon (1 + 4 \pi \theta) \frac{\partial M}{\partial t}, \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y} &= A \varepsilon (1 + 4 \pi \theta) \frac{\partial N}{\partial t}, \end{aligned} \right\} \dots \dots (1)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = -\varepsilon \Delta \varphi + A^2 k \varepsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \dots \dots (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} &= A \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} - 4 \pi \frac{\partial \xi}{\partial t} \right], \\ \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} &= A \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t} - 4 \pi \frac{\partial \eta}{\partial t} \right], \\ \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} &= A \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial t} - 4 \pi \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right], \end{aligned} \right\} \dots \dots (3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = -\Delta \chi,$$

en

$$\xi = \eta = \zeta = L = M = N = \varphi = \chi = 0, \dots \dots (4)$$

op oneindigen afstand.

Daarbij moeten wij nog voegen de vergelijkingen, die  $\varphi$  en  $\chi$  in functie van  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $N$  bepalen. Nemen wij aan, dat oorspronkelijk nergens in den isolator een electriche lading bestond buiten die, welke voor de diëlectrische polarisatie in de plaats kan gesteld worden, dan geldt de vergelijking (20) van het vorige hoofdstuk

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{1}{4 \pi} \Delta \varphi \dots \dots (5)$$

Ter bepaling van  $\chi$  dient (40), waarvoor wij hier schrijven

$$\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{1}{4 \pi \theta} \Delta \chi.$$

Daar  $\chi$  slechts in twee vergelijkingen voorkomt, zullen wij die grootheid daaruit elimineeren; dit geeft ons

$$\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = 0, \dots \dots (6)$$

zoodat wij  $\chi$  verder buiten beschouwing kunnen laten.

Om onmiddellijk den aard der electriche beweging te leeren kennen is een andere vorm der bewegingsvergelijkingen geschikter, dien men op de volgende wijze kan verkrijgen. Door de derde en tweede der vergelijkingen (1), naar  $y$  en  $z$  gediifferentieerd, van elkander af te trekken en daarbij de eerste van (3) in aanmerking te nemen, vindt men, als korthedshalve

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = P$$

gesteld wordt,

$$\frac{\partial P}{\partial x} - \Delta \xi = A^2 \varepsilon (1 + 4\pi\theta) \left[ \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial t^2} - 4\pi \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \right].$$

Uit (2) en (5) volgt echter, door eliminatie van  $\Delta \varphi$ ,

$$(1 + 4\pi\varepsilon)P = A^2 k \varepsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

en door dit naar  $x$  te differentieeren en de daaruit volgende waarde van  $\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial t^2}$  in bovenstaande vergelijking over te brengen, wordt deze

$$\Delta \xi = 4\pi\varepsilon(1 + 4\pi\theta) A^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \left[ 1 - \frac{(1 + 4\pi\theta)(1 + 4\pi\varepsilon)}{k} \right] \frac{\partial P}{\partial x}.$$

Stellen wij derhalve

$$4\pi\varepsilon(1 + 4\pi\theta) A^2 = R^2 \quad \dots \quad (7)$$

en

$$1 - \frac{(1 + 4\pi\theta)(1 + 4\pi\varepsilon)}{k} = S, \quad \dots \quad (8)$$

dan hebben we

$$\left. \begin{aligned} \Delta \xi &= R^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + S \frac{\partial P}{\partial x}, \\ \Delta \eta &= R^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + S \frac{\partial P}{\partial y}, \\ \Delta \zeta &= R^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + S \frac{\partial P}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \dots \quad (1)$$

in welke vergelijkingen nog alleen  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  voorkomen.

Evenals wij hier met de vergelijkingen (1) zijn te werk gegaan, kunnen wij ook met (3) handelen; langs dezen weg verkrijgen wij de volgende betrekkingen, die alleen  $L$ ,  $M$ ,  $N$  bevatten

$$\Delta L = R^2 \frac{\partial^2 L}{\partial t^2}, \quad \Delta M = R^2 \frac{\partial^2 M}{\partial t^2}, \quad \Delta N = R^2 \frac{\partial^2 N}{\partial t^2} \dots \quad (\text{II})$$

Stelt men (I) naast de vergelijkingen (5) van het eerste hoofdstuk, die de verplaatsingen  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  der deeltjes van een elastisch vast lichaam als functiën van tijd en plaats bepalen, dan zien wij, dat de hier verkregen betrekkingen denzelfden vorm hebben. Daaruit volgt het gewichtige resultaat, dat aan elke beweging der deeltjes van een veerkrachtig lichaam een mogelijke elektrische beweging in onzen isolator beantwoordt, waarbij wij slechts de verplaatsingen door de diëlectrische polarisatie te vervangen hebben. Nu kunnen zich in een elastisch lichaam transversale en longitudinale trillingen voortplanten en wij besluiten daaruit, dat in den isolator op dezelfde wijze een voortplanting van transversale en longitudinale *elektrische trillingen* mogelijk is, waarbij wij onder *elektrische trilling* het verschijnsel te verstaan hebben, dat de diëlectrische polarisatie een periodieke functie van den tijd is. De voortplantingssnelheden moeten dan uit de vergelijkingen (I) op volkomen dezelfde wijze kunnen afgeleid worden, als wanneer  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  verplaatsingen in een veerkrachtig lichaam voorstellen; aldus vindt men voor de transversale elektrische trillingen

$$v = \frac{1}{R} = \frac{1}{A \sqrt{4\pi s(1 + 4\pi\theta)}}, \dots \dots \dots (\text{III})$$

en voor de longitudinale

$$v = \frac{\sqrt{1 - S}}{R} = \frac{1}{A} \sqrt{\frac{1 + 4\pi s}{4\pi s k}} \dots \dots \dots (\text{IV})$$

Wat de vergelijkingen (II) betreft, ook deze hebben denzelfden vorm, als die, welke voor een elastisch lichaam gelden, wanneer hiervoor  $P = 0$  moet zijn, wat met (6) overeenkomt. Bij een veerkrachtig lichaam is  $P = 0$  echter de uitdrukking voor de onsamendrukbaarheid en, daar in een onsamendrukbaar medium van een eigenlijke voortplanting van longitudinale trillingen geen sprake kan zijn, besluiten we, dat in een isolator, die voor magnetische polarisatie vatbaar is, geen longitudinale *magnetische trillingen* kunnen bestaan. Wel transversale, en voor deze vindt men uit (II), dat de voortplantingssnelheid wederom door (III) wordt gegeven. Aan de uitdrukking *magnetische trilling* moet hierbij een

beteekenis gehecht worden, overeenkomende met die van *electrische trilling*. 1)

§ 2. Wij zullen ons niet bezig houden met de algemeene oplossing der vergelijkingen (I) en (II), daar zij eensdeels volkomen dezelfde is als die van de bewegingsvergelijkingen van veerkrachtige lichamen en daar, aan den anderen kant, een bijzondere oplossing voor ons doel genoegzaam is. Zooals men weet, kan men op grooten afstand van het trillingsmiddelpunt, bij een eerste benadering, de beweging van een elastisch lichaam beschouwen, als te bestaan in een voortplanting van trillingen, met een plat vlak tot golf front en met een amplitudo, die overal dezelfde is. In de theorie van het licht komt met dien bewegingstoestand een evenwijdige bundel gepolariseerde lichtstralen overeen. Zoeken wij nu een bijzondere oplossing onzer vergelijkingen van dezelfde soort.

Daarbij gebruiken wij onmiddellijk de vergelijkingen (1) — (6) (behalve (4), die hier wegvalt). Gemakshalve nemen wij de voortplantingsrichting tot  $x$ -as, dus het golf front evenwijdig aan het  $yz$ -vlak. Beschouwen wij dan vooreerst transversale trillingen, zoodat de electrische trillingen overal evenwijdig aan de  $y$ -as gericht zijn, dan kunnen wij voor de diëlectrische polarisatie schrijven

$$\xi = 0, \quad \eta = a \cos \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{x}{v} + p \right), \quad \zeta = 0,$$

waarbij  $a$  de amplitudo,  $T$  de oscillatietijd,  $v$  de voortplantings-snelheid is. Zien wij dan, of  $L$ ,  $M$ ,  $N$  zoodanig bepaald kunnen worden, dat aan alle voorwaarden van het vraagstuk voldaan is. Daar wij een bijzondere oplossing zoeken, die een voortplanting van trillingen voorstelt, zullen wij daarbij aannemen, dat alle termen, die geen periodieke functiën van tijd en plaats zijn, verdwijnen en dus b. v. bij integratie naar  $t$  de constante = 0 stellen.

$$\text{Daar } \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0 \text{ is, volgt vooreerst uit (5)}$$

$$\varphi = 0,$$

en daarmede is ook aan (2) voldaan. Verder geven de vergelijkingen (1)

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = - \frac{1}{A \varepsilon (1 + 4\pi\theta) v} a \cos \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{x}{v} + p \right),$$

waardoor ook aan (6) voldaan is.

1) De resultaten van deze § zijn door HELMHOLTZ aan het einde van zijne meermalen genoemde verhandeling afgeleid.

Wat eindelijk de vergelijkingen (3) betreft, bij substitutie der waarden van  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $N$  en  $\varphi$  geven de eerste en de derde beide  $0 = 0$ , de tweede daarentegen

$$\begin{aligned} \frac{1}{A s (1 + 4 \pi \theta) \mathbf{v}} \cdot \frac{2 \pi}{T \mathbf{v}} a \sin \frac{2 \pi}{T} \left( t - \frac{x}{\mathbf{v}} + p \right) = \\ = 4 \pi A \frac{2 \pi}{T} a \sin \frac{2 \pi}{T} \left( t - \frac{x}{\mathbf{v}} + p \right), \end{aligned}$$

waaruit volgt

$$\mathbf{v}^2 = \frac{1}{4 \pi s (1 + 4 \pi \theta) A^2},$$

wat met (III) overeenkomt.

Alle voorwaarden van het vraagstuk zijn nu vervuld en wij kunnen, ten gevolge der gevonden waarde voor  $\mathbf{v}$ , de uitdrukking voor  $N$  korter aldus schrijven

$$N = -4 \pi A \mathbf{v} \eta.$$

Dit resultaat is natuurlijk, daar het medium isotroop is, onafhankelijk van de gekozen voortplantings- en trillingsrichting. Nemen wij verder de gesteldheid van het gekozen assenstelsel (hoofdst. II, § 13) in aanmerking, dan kunnen wij het volgende vaststellen.

In een isotropen isolator kunnen zich transversale elektrische trillingen zoo voortplanten, dat het golf-front een plat vlak, de amplitude overal dezelfde is. De voortplantingssnelheid wordt daarbij gegeven door (III). Ligt de elektrische trillingsrichting overal in een vlak, door de voortplantingsrichting gaande, dan bestaat in elk punt een magnetiseerende kracht, loodrecht op dat vlak, zoodat bij een isolator, die gemagnetiseerd kan worden, de elektrische trillingen van magnetische vergezeld gaan. Daarbij heeft een draaiing over een rechten hoek van de richting der diëlectrische polarisatie naar die der magnetiseerende kracht denzelfden zin, als de beweging der wijzers van een uurwerk, voor een beschouwer, geplaatst aan de zijde, van waar de trillende beweging komt. Eindelijk wordt de grootte der magnetiseerende kracht bekend, door die der diëlectrische polarisatie met  $4 \pi A \mathbf{v}$  te vermenigvuldigen.

Evenzoo kan men longitudinale trillingen beschouwen, met een plat vlak, loodrecht op de  $x$ -as, tot golf-front. Dan is

$$\xi = a \cos \frac{2 \pi}{T} \left( t - \frac{x}{\mathbf{v}} + p \right), \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0,$$

en volgt uit (1)

$$L = M = N = 0,$$

zoodat bij longitudinale elektrische trillingen geen magnetiseerende kracht optreedt. Uit (3) vindt men dan verder

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 4 \pi \xi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0,$$

derhalve

$$\varphi = -2 T \nabla a \sin \frac{2 \pi}{T} \left( t - \frac{x}{V} + p \right),$$

waardoor ook aan (5) voldaan is. Eindelijk geeft (2), na eenige herleiding,

$$V^2 = \frac{1 + 4 \pi \epsilon}{A^2 \cdot 4 \pi \epsilon k},$$

wat overeenstemt met (IV).

Het blijkt ten slotte, dat men bij de longitudinale trillingen geheel afhankelijk is van de onbekende constante  $k$ . Zoolang deze een positieve waarde heeft is een voortplanting van longitudinale trillingen mogelijk, zooals wij die boven behandelden. Wordt  $k = 0$ , dan wordt  $V = \infty$ ; m. a. w. een eigenlijke voortplanting van longitudinale trillingen is dan onmogelijk, wat in dit geval ook onmiddellijk uit de vergelijkingen (2) en (5) is af te leiden. Dit komt overeen met de theorie van MAXWELL, waarbij dan ook stilzwijgend  $k = 0$  is gesteld. Kon eindelijk  $k$  negatief worden, dan leverde de formule (IV) een imaginaire waarde voor  $V$  op; dan kon dus een golvende voortplanting van longitudinale trillingen niet bestaan en men zou bij nader onderzoek tot een geheel anderen bewegings-toestand komen.

Niet alleen zijn wij bij deze trillingen van  $k$  afhankelijk, maar bovendien wordt door de in § 13 van het vorige hoofdstuk aangegeven moeilijkheid de uitkomst onzeker gemaakt. Geheel anders is het met de transversale beweging. Daar hangt de voortplantingssnelheid niet van  $k$  af en de grond voor deze omstandigheid is hierin gelegen, dat bij deze trillingen de electriciteitsbeweging met die eener onsamendrukbare vloeistof overeenkomt en derhalve als een stel gesloten stroomen kan opgevat worden. Bij de induceerende werking van dergelijke stroomen is echter de waarde van  $k$  zonder invloed. Tevens bestaat bij een dergelijken bewegingstoestand, zooals wij in § 13 van 't tweede hoofdstuk opmerkten, ook het daar aangewezen bezwaar niet meer.

De beide onderzochte bewegingstoestanden hebben derhalve vol-



strekt niet denzelfden graad van zekerheid. Alleen bij de transversale beweging zijn wij onafhankelijk van eenige moeilijkheden, die bij de opstelling van de algemeene bewegingsvergelijkingen niet waren te ontgaan. Gelukkig hebben wij in 't vervolg vooral met deze trillingen te doen, die wij dan ook, zonder het er uitdrukkelijk bij te voegen, zullen bedoelen.

§ 3. Wat vooreerst de voortplantingssnelheid dezer trillingen betreft, wij hebben die in (III) aangegeven. Neemt men echter in aanmerking, dat  $A$  in die formule de werkelijke waarde dezer constante voorstelt, die door de betrekking (47) van het vorige hoofdstuk met de waargenomen waarde  $A'$  is verbonden, dan vinden wij

$$v = \frac{1}{A'} \sqrt{\frac{(1 + 4\pi\epsilon_0)(1 + 4\pi\theta_0)}{4\pi\epsilon(1 + 4\pi\theta)}}$$

Voor de lucht wordt dit

$$v = \frac{1}{A'} \sqrt{\frac{1 + 4\pi\epsilon_0}{4\pi\epsilon_0}}$$

MAXWELL, die de bewegingsvergelijkingen der electriciteit op eenigszins andere wijze opstelde dan wij gedaan hebben, vond voor de lucht 1)

$$v = \frac{1}{A'}$$

zoodat die snelheid geheel uit electromagnetische waarnemingen zou zijn af te leiden. Werkelijk is  $\frac{1}{A'}$  bepaald en men heeft reeds spoedig opgemerkt, dat de uitkomst zeer weinig verschilt van de snelheid van het licht.

Dit blijkt uit de volgende opgaven voor deze twee grootheden, beide in meters per seconde.

Snelheid van het licht		$\frac{1}{A'}$		
FIZEAU . . . . .	314000000		WEBER . . . . .	310740000
Astronomische } bepalingen }	308000000		MAXWELL. . . . .	288000000
CORNU. . . . .	300330000		THOMSON. . . . .	282000000
FOUCAULT . . . . .	298360000			

Wat de snelheid van het licht betreft, verdient, dunkt mij, het

1) MAXWELL, Electr. and Magn., § 786.

resultaat van CORNU, wegens de overeenstemming met dat van FOUCAULT, het meeste vertrouwen. De getallen, voor  $\frac{1}{A'}$  opgegeven, loopen vrij sterk uiteen, maar aan weerszijden van de door CORNU en FOUCAULT gevonden snelheid van het licht. Zeer is het te hopen, dat  $\frac{1}{A'}$  nogmaals met al de nauwkeurigheid bepaald worde, die te bereiken is. Zal men intusschen uit de getallen, zooals zij nu zijn, een besluit trekken, dan kan het geen ander zijn dan dit, dat, bij een eerste benadering,  $\frac{1}{A'}$  en de voortplantingssnelheid van het licht als gelijk te beschouwen zijn.

En zoo kwam MAXWELL tot het resultaat, dat zich in de lucht transversale electriche trillingen kunnen voortplanten met een snelheid, gelijk aan die van het licht. Moeilijk was hierin een louter toevallige analogie te zien. Het zou zeker een zonderling spel der natuur zijn, wanneer zich, behalve die electriche trillingen, andere trillingen van denzelfden aard en met dezelfde voortplantingssnelheid in de lucht konden voortplanten, waarbij de werkende krachten geheel andere zouden zijn, dan bij de eerste. Veel eenvoudiger was het, zooals MAXWELL deed, aan te nemen, dat zich slechts ééne soort van beweging met de gevonden snelheid in de lucht kan voortplanten en dat dus het licht in werkelijkheid in electriche trillingen bestaat.

Ook wij zullen die onderstelling maken, maar, om dit te mogen doen, moeten wij zoo over  $\epsilon_0$  beschikken dat  $v = \frac{1}{A'}$  wordt. Daartoe is het voldoende, aan te nemen, dat  $\epsilon_0$  (en dus ook  $\epsilon$  voor een willekeurigen isolator) een zeer groot getal is, zoodat men, althans bij een eerste benadering, het omgekeerde ervan ten opzichte van de eenheid mag verwaarloozen. Immers ten gevolge van deze hypothese — die wij in 't vervolg steeds zullen volhouden — mag men in plaats van de waarde, die wij voor  $v$  vonden, de grootheid  $\frac{1}{A'}$  nemen.

Wanneer wij de waarschijnlijkheid overwegen, die er voor MAXWELL'S meening is, moeten wij niet uit het oog verliezen, dat, zooals wij in het eerste hoofdstuk opmerkten, de feiten alleen het hoofdbeginsel der undulatietheorie bewezen hebben, dat de nieuwe theorie

onaangetroefd laat bestaan. De gelijkstelling van het licht met de trillingen van een elastisch lichaam voerde echter, gelijk wij zagen, tot zoo groote moeilijkheden, dat dit het zeker van des te meer belang maakt, te onderzoeken, of MAXWELL'S hypothese een behoorlijke verklaring van alle lichtverschijnselen kan geven. En mocht zij dit beter doen dan de theorie van FRESNEL, dan zou men de hoop mogen voeden, dat men met de electromagnetische theorie althans op den goeden weg is, al is onze wetenschap nog te onvolkomen, om alle moeilijkheden te overwinnen.

§ 4. Vooreerst rijst de vraag op, of de nieuwe beschouwingswijze ook voor andere diëlectrische middenstoffen dan de lucht de juiste voortplantingssnelheid oplevert. Zoeken wij daartoe de verhouding  $\frac{v_0}{v}$ , waarbij  $v_0$  voor de lucht geldt. Uit (III) volgt

$$\frac{v_0}{v} = \sqrt{\frac{4 \pi \epsilon (1 + 4 \pi \theta)}{4 \pi \epsilon_0 (1 + 4 \pi \theta_0)}}.$$

Nu is voor alle onderzochte diëlectrische stoffen de verhouding  $\frac{1 + 4 \pi \theta}{1 + 4 \pi \theta_0}$  zeer weinig van de eenheid verschillend (bij het sterk diamagnetische bismuth is volgens BOLTZMANN dat verschil minder dan 0,0003), zoodat men slechts een onmerkbaar fout begaat, door voor die verhouding de eenheid te nemen. Nemen wij daarbij onze onderstelling omtrent  $\epsilon_0$  en  $\epsilon$  in aanmerking, dan mogen wij schrijven

$$\frac{v_0}{v} = \sqrt{\frac{4 \pi \epsilon}{4 \pi \epsilon_0}} = \sqrt{\frac{1 + 4 \pi \epsilon}{1 + 4 \pi \epsilon_0}} = \sqrt{K}.$$

Maar, zooals men weet, is  $\frac{v_0}{v}$  de brekingsindex  $n$ , zoodat men moet hebben

$$K = n^2.$$

Men ziet hieruit, dat de theorie in den vorm, dien zij nu heeft, de dispersie niet verklaren kan. Dit is echter geen belangrijk bezwaar; de vroeger aangenomen theorie toch kan dit in haar eenvoudigsten vorm evenmin en het is zeer goed mogelijk, dat wij de dispersie uit onze vergelijkingen zouden zien volgen, zoodra wij bij de behandeling der diëlectrische polarisatie alle omstandigheden in rekening brachten, met name de moleculaire constitutie der stof. Willen wij nu intusschen de waarden van  $K$  met die van  $n$  vergelijken, dan zullen wij den brekingsindex voor lang-

zame trillingen moeten nemen, daar deze althans meer dan snellere tot de proeven naderen, waardoor wij  $K$  bepalen; m. a. w. wij zullen de waarde van  $n$  moeten nemen, die uit de dispersieformules voor oneindig lange golven voortvloeit.

MAXWELL, die het eerst de gevolgtrekking maakte, dat het specifiek induceerend vermogen gelijk moet zijn aan de tweede macht van den brekingsindex, kon dit alleen voor paraffine op de proef stellen. Daarvoor was door GIBSON en BARCLAY 1) gevonden

$$K = 1,975, \text{ dus } \sqrt{K} = 1,405.$$

Voor den brekingsindex volgde uit de metingen van GLADSTONE

$$n = 1,422.$$

Men moet hierbij in het oog houden, dat de door GIBSON en BARCLAY verkregen uitkomst, zooals BOLTZMANN heeft aangewezen, waarschijnlijk te klein is. Bovendien experimenteerden deze waarnemers met vaste, GLADSTONE daarentegen met gesmolten paraffine.

Nauwkeuriger is later  $K$  voor eenige stoffen bepaald door BOLTZMANN 2) en wel volgens twee methoden, uit condensatorproeven nl. en uit de aantrekking, door geëlectriseerde voorwerpen op diëlectrische lichamen uitgeoefend. Bij zwavel, paraffine en colophonium, die de nauwkeurigste metingen toelieten, verkreeg hij de volgende resultaten, als de meest waarschijnlijke uit verschillende proeven.

	$K$		$n^2$
	Condensatorproeven.	Diël. aantrekking.	
Zwavel . . . . .	3,84	3,90	4,06
Paraffine . . . . .	2,32	2,32	2,33
Colophonium . . . . .	2,55	2,48	2,38.

De brekingsindex van paraffine werd door BOLTZMANN zelf naar de methode van WOLLASTON bepaald; zooals men ziet is de uitkomst vrij wat grooter dan die van GLADSTONE.

De overeenstemming tusschen  $K$  en  $n^2$  is, naar 't mij voorkomt, zoo groot als men met grond bij deze bepalingen kon verwachten.

Nog schooner bevestiging van de electromagnetische theorie van

1) Phil. Trans. 1871, p. 573.

2) Pogg. Ann. 151, 153. Uitvoeriger vindt men sommige zaken besproken in een paar verhandelingen „über die elektrostatische Fernwirkung diëlektrischer Körper.“ Uit een van deze zijn de waarden van  $K$  en  $n^2$  overgenomen.

het licht wordt opgeleverd door het gedrag der gassen. BOLTZMANN 1) heeft een reeks onderzoekingen volbracht over het specifiek induceerend vermogen van deze lichamen. De methode, die hij hierbij volgde, komt in hoofdzaak neêr op een vergelijking van het induceerend vermogen  $K$  van hetzelfde gas bij verschillende drukkingen. Daarbij bleek vooreerst, dat  $K$  met vermeerdering van drukking toeneemt, en wel zoo, dat de aangroeiing van  $K$  met die der drukking evenredig is. Door aan te nemen, dat dit voor alle waarden der drukking, tot 0 toe, doorgaat, was BOLTZMANN in staat, uit zijne proeven de waarde van  $K$  voor een gas, vergeleken met het luchtledige, af te leiden. Dan moet  $\sqrt{K}$ , volgens de theorie van MAXWELL, gelijk zijn aan den absoluten brekingsindex van het gas, daar het verschil der waarden, die  $1 + 4\pi\theta$  in het luchtledige en in de verschillende gassen aanneemt, zeer klein is. De volgende tabel geeft voor eenige gassen  $\sqrt{K}$  en den absoluten brekingsindex  $n$ , zooals die door DULONG bepaald is. Beide grootheden hebben betrekking op een temperatuur van 0° C. en een drukking van 760 mM.

	$\sqrt{K}$	$n$
Lucht . . . . .	1,000295	1,000294
Koolzuur . . . . .	1,000473	1,000449
Waterstof . . . . .	1,000132	1,000138
Kooloxyde . . . . .	1,000345	1,000340
Stikstofoxydule . . . . .	1,000497	1,000503
Olievormend gas . . . . .	1,000656	1,000678
Moerasgas . . . . .	1,000472	1,000443

Dat in alle gassen  $s$  en de voortplantingssnelheid van het licht bijna dezelfde waarde hebben, als in de luchtledige ruimte, wijst er zeker op, dat ook in de gassen de diëlectrische polarisatie haar zetel heeft in den aether, terwijl de in (betrekkelijk) gering aantal voorkomende gasmoleculen op dit verschijnsel slechts een kleinen invloed uitoefenen. Ook bij vaste en vloeibare lichamen wordt het door sommige verschijnselen 2) waarschijnlijk gemaakt, dat tusschen de moleculen nog altijd de aether aanwezig is. Wil men dan

1) Pogg. Ann. 155.

2) Hiertoe behoort b.v. de invloed, dien de beweging der middenstoffen op de lichtverschijnselen uitoefent.

een in alle opzichten voldoende behandeling der electriche bewegingen in een dergelijk lichaam geven, dan moet men vooreerst met den aether, ten tweede met de daartusschen liggende moleculen rekening houden. Daarbij komen dan afstand, grootte en vorm der laatste in aanmerking, omstandigheden, waaruit waarschijnlijk de verklaring der dispersie en der draaiing van het polarisatievlak moet voortvloeien. Wij zullen hier deze zaken niet bespreken. Alleen merken wij op, dat men bij de gassen, waar de invloed der moleculen zeer klein is, bij een eerste benadering dien invloed zeer gemakkelijk in rekening kan brengen. Wij nemen daarbij aan, dat de aether in een gas volkomen dezelfde eigenschappen heeft, als in de luchtledige ruimte. Werkt nu op het element  $dx dy dz$  van een gas de electromotorische kracht  $X$ , in de richting der  $x$ -as, en vormen wij weder, evenals op p. 31, de som  $\Sigma e \mathbf{x}$ , dan bestaat deze hier uit twee deelen, waarvan het eene door den aether, het andere door de gasmoleculen wordt opgeleverd. Het eerste is klaarblijkelijk  $s_0 X dx dy dz$ , waarbij  $s_0$  de constante der diëlectrische polarisatie voor de luchtledige ruimte is. Wat de gasmoleculen betreft, onderstellen wij, dat in elke molecule door een electromotorische kracht  $X$  een electricch moment, in de richting dier kracht en met de grootte  $m X$  wordt opgewekt, waarbij  $m$  een constante is. Zijn nu in de eenheid van volume  $p$  gasmoleculen aanwezig, dan vindt men gemakkelijk, dat de gasdeeltjes voor  $\Sigma e \mathbf{x}$  het bedrag  $m p X dx dy dz$  opleveren. Wij hebben derhalve

$$\Sigma e \mathbf{x} = s_0 X dx dy dz + m p X dx dy dz,$$

of daar, volgens § 2 van het tweede hoofdstuk,

$$\Sigma e \mathbf{x} = s X dx dy dz$$

is,

$$s = s_0 + m p.$$

Hieruit volgt

$$K = \frac{1 + 4 \pi s}{1 + 4 \pi s_0} = 1 + \frac{4 \pi m p}{1 + 4 \pi s_0}.$$

Daar  $p$  met de dichtheid van het gas evenredig is, wordt door deze vergelijking vooreerst bevestigd, hetgeen door BOLTZMANN omtrent de betrekking tusschen  $K$  en de drukking is gevonden.

Is verder  $n$  de absolute brekingsindex, dan heeft men, volgens de theorie van MAXWELL,

$$n^2 = K,$$

dus

$$n^2 - 1 = \frac{4 \pi m p}{1 + 4 \pi \epsilon_0}.$$

Daar  $p$  met de dichtheid  $d$  evenredig is, volgt hieruit, dat

$$\frac{n^2 - 1}{d}$$

voor elk gas standvastig is. Dit is de uitdrukking voor de bekende wet van ARAGO en BIOT 1).

Past men dergelijke beschouwingen als de bovenstaande op mengsels van gassen toe, waar  $m$  voor elk gas dezelfde waarde heeft, als wanneer het niet met andere is vermengd, dan komt men gemakkelijk tot de wet, die door de genoemde natuurkundigen omtrent de brekende kracht van gasmengsels uit hunne waarnemingen is afgeleid. Dat die wet voor verbindingen van gassen niet meer doorgaat volgt onmiddellijk hieruit, dat daarbij moleculen van geheel anderen aard, dan de oorspronkelijke, ontstaan zijn, zoodat omtrent de waarde van  $m$  hier niets te zeggen is.

Ten slotte merken wij nog op, dat men, daar bij dezelfde temperatuur en drukking  $p$  voor alle gassen even groot is, uit de brekingsindices de verhouding der waarden van  $m$  in verschillende gassen kan afleiden.

§ 5. Het behoeft geen breedvoerige toelichting, dat MAXWELL'S hypothese alle interferentieverschijnselen verklaren kan. Deze toch vinden hun grond in den aard der lichtbeweging, als een golvende voortplanting van trillingen, verbonden met het principe, dat men het beginsel van de coëxistentie der kleine bewegingen genoemd heeft. Dit zegt echter niets anders, dan dat de som van eenige oplossingen der bewegingsvergelijkingen nog een oplossing is, wat onmiddellijk uit de omstandigheid volgt, dat onze vergelijkingen lineair zijn en geen bekende termen bevatten.

Klaarblijkelijk kunnen volgens de nieuwe theorie gepolariseerde lichtstralen bestaan. Inderdaad moet de eerste der in § 2 onderzochte bewegingstoestanden als een bundel gepolariseerd licht worden beschouwd. Daarbij kan men dan voorloopig nog twee zaken aannemen, dat nl. de richting der electriche trillingen in het polarisatievlak ligt, of loodrecht daarop staat.

1) Zie WÜLLNER, Experimentalphysik, II p. 153.

Gaan wij thans over tot de behandeling van de terugkaatsing en breking van het licht aan de grens van twee isotrope dielectrische middenstoffen.

Vraagt men alleen naar de richting der teruggekaatste en gebroken stralen, dan vindt men, dat de theoretische verklaring van de wetten, welke die richting bepalen, onveranderd blijft bestaan. Of echter de electromagnetische theorie in alle opzichten de gesteldheid van het teruggekaatste licht juist aangeeft en daarbij niet op dezelfde bezwaren stuit, die wij in het eerste hoofdstuk ontmoetten, vereischt een nader onderzoek. Daarbij houden wij ons aan de bepalingen, die wij op p. 9 vastgesteld hebben. De grensvoorwaarden (A) van p. 66 nemen dan den volgenden vorm aan

$$\frac{\xi_1}{s_1} - \frac{\xi_2}{s_2} = - \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_1 - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_2 \right], \quad \frac{\eta_1}{s_1} = \frac{\eta_2}{s_2}, \quad \frac{\zeta_1}{s_1} = \frac{\zeta_2}{s_2}, \dots \quad (9)$$

daar toch het grensvlak loodrecht op de  $x$ -as ondersteld is en dus  $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$  en  $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$  noodzakelijk doorlopend moeten zijn.

Evenzoo worden de voorwaarden (B) met de hier ingevoerde notatie

$$L_1 - L_2 = - \left[ \left( \frac{\partial \chi}{\partial x} \right)_1 - \left( \frac{\partial \chi}{\partial x} \right)_2 \right],$$

$$M_1 = M_2, \quad N_1 = N_2. \dots \dots \dots (10).$$

Behalve de voorwaarden, dat  $\varphi$  (en  $\chi$ ) doorlopend is, moeten hier nog de vergelijkingen (21) en (40\*) van het vorige hoofdstuk bij worden gevoegd, die hier overgaan in

$$\xi_1 - \xi_2 = \frac{1}{4\pi} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_1 - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_2 \right] \dots \dots \dots (11)$$

en

$$\theta_1 L_1 - \theta_2 L_2 = \frac{1}{4\pi} \left[ \left( \frac{\partial \chi}{\partial x} \right)_1 - \left( \frac{\partial \chi}{\partial x} \right)_2 \right].$$

Daar wij  $\chi$  steeds buiten beschouwing hebben gelaten, zullen wij ook hier die grootheid elimineeren uit de twee eenige vergelijkingen, waarin zij voorkomt. Dit geeft

$$(1 + 4\pi\theta_1) L_1 = (1 + 4\pi\theta_2) L_2 \dots \dots \dots (12)$$

De doorlopendheid van  $\varphi$  en de vergelijkingen (9)–(12) maken alle grensvoorwaarden uit.

Achtereenvolgens dienen de twee hoofdgevallen van het vraag-



stuk ter sprake te komen; de richting der electricische trillingen kan namelijk vooreerst loodrecht op het invalsvlak staan, ten tweede in dat vlak liggen.

§ 6. In het eerste geval zullen wij aantoonen, dat men aan alle grensvoorwaarden voldoen kan, door alleen transversale trillingen in rekening te brengen. Ten overvloede zullen wij daarbij de wetten der terugkaatsing en breking uit die grensvoorwaarden zelve afleiden. Daar het invalsvlak ondersteld wordt, tot  $xz$ -vlak te zijn gekozen, vindt men gemakkelijk uit het in § 2 besprokene, dat de invallende trillingen kunnen voorgesteld worden door

$$\left. \begin{aligned} \eta_1' &= \cos \psi_1', \\ L_1' &= 4\pi A \mathbf{v}_1 \sin \alpha_1 \cos \psi_1', \\ N_1' &= -4\pi A \mathbf{v}_1 \cos \alpha_1 \cos \psi_1', \end{aligned} \right\} \psi_1' = \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{x}{\mathbf{v}_1} \cos \alpha_1 - \frac{z}{\mathbf{v}_1} \sin \alpha_1 + p_1' \right),$$

de teruggekaatste door

$$\left. \begin{aligned} \eta_1'' &= a_1 \cos \psi_1'', \\ L_1'' &= 4\pi A \mathbf{v}_1 a_1 \sin \alpha_1'' \cos \psi_1'', \\ N_1'' &= 4\pi A \mathbf{v}_1 a_1 \cos \alpha_1'' \cos \psi_1'', \end{aligned} \right\} \psi_1'' = \frac{2\pi}{T} \left( t + \frac{x}{\mathbf{v}_1} \cos \alpha_1'' - \frac{z}{\mathbf{v}_1} \sin \alpha_1'' + p_1'' \right),$$

en de gebroken beweging door

$$\left. \begin{aligned} \eta_2 &= \frac{a_2}{\epsilon_2} \cos \psi_2, \\ L_2 &= 4\pi A \mathbf{v}_2 a_2 \sin \alpha_2 \cos \psi_2, \\ N_2 &= -4\pi A \mathbf{v}_2 a_2 \cos \alpha_2 \cos \psi_2 \end{aligned} \right\} \psi_2 = \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{x}{\mathbf{v}_2} \cos \alpha_2 - \frac{z}{\mathbf{v}_2} \sin \alpha_2 + p_2 \right),$$

terwijl overal  $\xi = \zeta = M = \varphi = 0$  is.

Hierbij stellen  $\alpha_1$ ,  $\alpha_1''$  en  $\alpha_2$  resp. de hoeken van inval, terugkaatsing en breking voor, terwijl de teekens zoodanig zijn gekozen, dat deze hoeken alle scherp moeten genomen worden.

Gemakkelijk is het in te zien, dat aan alle grensvoorwaarden van zelve voldaan is, behalve aan de tweede van (9), de tweede van (10), en (12); alleen met deze laatste hebben wij derhalve rekening te houden.

De eerste dezer vergelijkingen geeft hier, daar aan de grens  $x = 0$  is,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon_1} \left[ \cos \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{z}{\mathbf{v}_1} \sin \alpha_1 + p_1' \right) + a_1 \cos \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{z}{\mathbf{v}_1} \sin \alpha_1'' + p_1'' \right) \right] = \\ = \frac{1}{\epsilon_2} a_2 \cos \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{z}{\mathbf{v}_2} \sin \alpha_2 + p_2 \right), \end{aligned}$$

of, als men korthedshalve

$$\frac{2\pi}{T} \left( \frac{z}{v_1} \sin \alpha_1 - p_1' \right) = q_1', \quad \frac{2\pi}{T} \left( \frac{z}{v_1} \sin \alpha_1'' - p_1'' \right) = q_1'',$$

$$\frac{2\pi}{T} \left( \frac{z}{v_2} \sin \alpha_2 - p_2 \right) = q_2$$

stelt,

$$\frac{1}{s_1} \left[ \cos \left( \frac{2\pi t}{T} - q_1' \right) + a_1 \cos \left( \frac{2\pi t}{T} - q_1'' \right) \right] = \frac{1}{s_2} a_2 \cos \left( \frac{2\pi t}{T} - q_2 \right).$$

Uit de omstandigheid, dat deze vergelijking voor elke waarde van  $t$  moet doorgaan, volgen de beide betrekkingen

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_1} a_1 \frac{\sin q_1''}{\sin q_1'} = \frac{1}{s_2} a_2 \frac{\sin q_2}{\sin q_1'} \quad \dots \quad (13_a)$$

en

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_1} a_1 \frac{\cos q_1''}{\cos q_1'} = \frac{1}{s_2} a_2 \frac{\cos q_2}{\cos q_1'} \quad \dots \quad (13_b)$$

Op dezelfde wijze levert een der andere grensvoorwaarden twee vergelijkingen op van den vorm

$$\beta + \gamma a_1 \frac{\sin q_1''}{\sin q_1'} = \delta a_2 \frac{\sin q_2}{\sin q_1'}, \quad \dots \quad (14_a)$$

$$\beta + \gamma a_1 \frac{\cos q_1''}{\cos q_1'} = \delta a_2 \frac{\cos q_2}{\cos q_1'} \quad \dots \quad (14_b)$$

Men kan dan verder uit (13<sub>a</sub>) en (14<sub>a</sub>) de beide onbekenden

$$a_1 \frac{\sin q_1''}{\sin q_1'} \quad \text{en} \quad a_2 \frac{\sin q_2}{\sin q_1'}$$

uit (13<sub>b</sub>) en (14<sub>b</sub>) de twee grootheden

$$a_1 \frac{\cos q_1''}{\cos q_1'} \quad \text{en} \quad a_2 \frac{\cos q_2}{\cos q_1'}$$

oplossen. Daar echter in (13<sub>a</sub>) en (13<sub>b</sub>) en evenzoo in (14<sub>a</sub>) en (14<sub>b</sub>) dezelfde coëfficiënten voorkomen, moeten de beide oplossingen dezelfde zijn. Men heeft derhalve

$$a_1 \frac{\sin q_1''}{\sin q_1'} = a_1 \frac{\cos q_1''}{\cos q_1'} \quad \text{en} \quad a_2 \frac{\sin q_2}{\sin q_1'} = a_2 \frac{\cos q_2}{\cos q_1'}$$

waaruit volgt

$$q_1' = q_1'' = q_2,$$

dus

$$\frac{z}{v_1} \sin \alpha_1 - p_1' = \frac{z}{v_1} \sin \alpha_1'' - p_1'' = \frac{z}{v_2} \sin \alpha_2 - p_2.$$

Zal dit langs het geheele grensvlak, dus voor alle waarden van  $z$ , juist zijn, dan moet men noodzakelijk hebben

$$\sin \alpha_1 = \sin \alpha_1'', \quad \alpha_1 = \alpha_1'', \quad \dots \quad (15)$$

$$\frac{\sin \alpha_1}{v_1} = \frac{\sin \alpha_2}{v_2} \dots \quad (16)$$

en

$$p_1' = p_1'' = p_2.$$

Wij komen dus vooreerst tot de wetten der terugkaatsing en breking en leeren in de tweede plaats, dat aan het grensvlak de phase onzer drie lichtbundels dezelfde moet zijn.

Deze omstandigheden brengen het voordeel aan, dat aan de grens  $\psi_1' = \psi_1'' = \psi_2$  wordt, waardoor de grensvoorwaarden meer eenvoudige vergelijkingen opleveren. De boven reeds gebezigde conditie geeft dan nu de betrekking

$$\frac{1 + a_1}{\varepsilon_1} = \frac{a_2}{\varepsilon_2} \dots \quad (17)$$

Verder geeft de tweede der vergelijkingen (10)

$$(1 - a_1) v_1 \cos \alpha_1 = a_2 v_2 \cos \alpha_2, \dots \quad (18),$$

terwijl eindelijk uit (12) volgt

$$(1 + a_1) (1 + \frac{1}{2} \pi \theta_1) v_1 \sin \alpha_1 = a_2 (1 + \frac{1}{2} \pi \theta_2) v_2 \sin \alpha_2.$$

Door (16) en de waarden van  $v_1$  en  $v_2$  in aanmerking te nemen, overtuigt men zich echter gemakkelijk, dat de laatste vergelijking dezelfde is als (17), zoodat men slechts van deze en (18) voor de bepaling van  $a_1$  en  $a_2$  gebruik heeft te maken. Het vraagstuk is dus juist bepaald en men vindt

$$a_1 = \frac{\varepsilon_2 v_2 \cos \alpha_2 - \varepsilon_1 v_1 \cos \alpha_1}{\varepsilon_2 v_2 \cos \alpha_2 + \varepsilon_1 v_1 \cos \alpha_1} \dots \quad (19)$$

Een zeer eenvoudigen vorm neemt deze uitdrukking aan, wanneer wij in aanmerking nemen, dat bij een eerste benadering gerustelijk  $\frac{1 + \frac{1}{2} \pi \theta_1}{1 + \frac{1}{2} \pi \theta_2} = 1$  mag gesteld worden. Immers dan is, blijkens (III),

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{v_2^2}{v_1^2},$$

waardoor (19) overgaat in

$$a_1 = - \frac{v_1 \cos \alpha_2 - v_2 \cos \alpha_1}{v_1 \cos \alpha_2 + v_2 \cos \alpha_1} = - \frac{\sin \alpha_1 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_2 \cos \alpha_1}{\sin \alpha_1 \cos \alpha_2 + \sin \alpha_2 \cos \alpha_1}$$

$$a_1 = - \frac{\sin (\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin (\alpha_1 + \alpha_2)} \dots \dots \dots (V)$$

Voor de amplitudo van het gebroken licht vindt men dan verder uit (17)

$$a_2 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} (1 + a_1) = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \cdot \frac{2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_1}{\sin (\alpha_1 + \alpha_2)} \dots \dots (V_a)$$

De uitdrukking (V) komt overeen met de uitkomsten, die de waarneming heeft opgeleverd voor licht, dat in het invalsvlak gepolariseerd is. Daaruit volgt, dat de electromagnetische theorie voor dit geval tot juiste resultaten voert, mits men stelt, dat in een bundel gepolariseerd licht de elektrische trillingen loodrecht op het polarisatievlak staan 1).

§ 7. Liggen de elektrische trillingen in het invalsvlak en is dus het invallende licht loodrecht op dat vlak gepolariseerd, dan ligt het voor de hand aan te nemen (evenals bij de theorie van CAUCHY), dat er, behalve teruggekaatste en gebroken transversale trillingen, ook stralen met longitudinale trillingen ontstaan. Wij beginnen daarom met dit te onderstellen en laten het aan de theorie zelve over, te beslissen, of misschien die longitudinale beweging buiten rekening kan gelaten worden.

Wij stellen derhalve voor het invallende licht (men zie § 2).

$$\left. \begin{aligned} \xi_1' &= -\sin \alpha_1 \cos \psi_1', \\ \zeta_1' &= \cos \alpha_1 \cos \psi_1', \\ M_1' &= 4 \pi A v_1 \cos \psi_1', \\ \varphi_1' &= 0, \end{aligned} \right\} \psi_1' = \frac{2 \pi}{T} \left( t - \frac{x}{v_1} \cos \alpha_1 - \frac{z}{v_1} \sin \alpha_1 + p \right),$$

voor de teruggekaatste transversale trillingen

$$\left. \begin{aligned} \xi_1'' &= -a_1 \sin \alpha_1 \cos \psi_1'', \\ \zeta_1'' &= -a_1 \cos \alpha_1 \cos \psi_1'', \\ M_1'' &= 4 \pi A a_1 v_1 \cos \psi_1'', \\ \varphi_1'' &= 0, \end{aligned} \right\} \psi_1'' = \frac{2 \pi}{T} \left( t + \frac{x}{v_1} \cos \alpha_1 - \frac{z}{v_1} \sin \alpha_1 + p \right),$$

en voor het gebroken licht

$$\left. \begin{aligned} \xi_2 &= -a_2 \sin \alpha_2 \cos \psi_2, \\ \zeta_2 &= a_2 \cos \alpha_2 \cos \psi_2, \\ M_2 &= 4 \pi A a_2 v_2 \cos \psi_2, \\ \varphi_2 &= 0, \end{aligned} \right\} \psi_2 = \frac{2 \pi}{T} \left( t - \frac{x}{v_2} \cos \alpha_2 - \frac{z}{v_2} \sin \alpha_2 + p \right).$$

1) Dit is door MAXWELL uit de verschijnselen der dubbele breking afgeleid. Electr. and Magn. § 797.

Zijn  $\beta_1$  en  $\beta_2$  de hoeken van terugkaatsing en breking voor de longitudinale trillingen, dan kunnen wij voor deze beweging in het eerste medium stellen

$$\left. \begin{aligned} \xi_1''' &= -b_1 \cos \beta_1 \cos \psi_1''', \\ \zeta_1''' &= b_1 \sin \beta_1 \cos \psi_1''', \\ \varphi_1''' &= -2 T \mathbf{V}_1 b_1 \sin \psi_1''', \\ M_1''' &= 0, \end{aligned} \right\} \psi_1''' = \frac{2\pi}{T} \left( t + \frac{x}{\mathbf{V}_1} \cos \beta_1 - \frac{z}{\mathbf{V}_1} \sin \beta_1 + p \right),$$

en in het tweede medium

$$\left. \begin{aligned} \xi_2' &= b_2 \cos \beta_2 \cos \psi_2', \\ \zeta_2' &= b_2 \sin \beta_2 \cos \psi_2', \\ \varphi_2' &= -2 T \mathbf{V}_2 b_2 \sin \psi_2', \\ M_2' &= 0, \end{aligned} \right\} \psi_2' = \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{x}{\mathbf{V}_2} \cos \beta_2 - \frac{z}{\mathbf{V}_2} \sin \beta_2 + p \right).$$

Overall is

$$\eta = L = N = 0.$$

Korthedshalve nemen wij hier de wetten der terugkaatsing en breking aan, alsmede de gelijkheid in phase der verschillende golfstelsels aan het grensvlak. Men zou ook hier die omstandigheden, op een dergelijke wijze als in het vorige geval, uit de grensvoorwaarden kunnen afleiden.

Voigens de bovengenoemde wetten is

$$\frac{\sin \alpha_1}{\mathbf{V}_1} = \frac{\sin \alpha_2}{\mathbf{V}_2} = \frac{\sin \beta_1}{\mathbf{V}_1} = \frac{\sin \beta_2}{\mathbf{V}_2}, \dots (20)$$

en dientengevolge aan het grensvlak (voor  $x = 0$ )

$$\psi_1' = \psi_1'' = \psi_1''' = \psi_2 = \psi_2',$$

wat onze vergelijkingen zeer vereenvoudigt.

De voorwaarde, dat  $\varphi$  doorlopend moet zijn, geeft ons de vergelijking

$$b_1 \mathbf{V}_1 = b_2 \mathbf{V}_2. \dots (21)$$

Uit de eerste van (9) volgt verder

$$\frac{(1 + a_1) \sin \alpha_1}{\varepsilon_1} + \frac{1 + 4\pi \varepsilon_1}{\varepsilon_1} b_1 \cos \beta_1 = \frac{a_2 \sin \alpha_2}{\varepsilon_2} - \frac{1 + 4\pi \varepsilon_2}{\varepsilon_2} b_2 \cos \beta_2 (22)$$

en uit de derde

$$\frac{(1 - a_1) \cos \alpha_1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_1} b_1 \sin \beta_1 = \frac{a_2 \cos \alpha_2}{\varepsilon_2} + \frac{1}{\varepsilon_2} b_2 \sin \beta_2, \dots (23)$$

terwijl aan de tweede van zelve voldaan is.

Verder geeft ons de eerste van de vergelijkingen (10)

$$(1 + a_1) \mathbf{V}_1 = a_2 \mathbf{V}_2. \dots (24)$$

De betrekking (11) eindelijk wordt hier

$$(1 + a_1) \sin \alpha_1 = a_2 \sin \alpha_2, \dots \dots \dots (25)$$

terwijl de tweede van (10) en (12) wederom  $0 = 0$  geven.

Zooals uit (20) blijkt, zijn (24) en (25) dezelfde vergelijking, zoodat wij in (21), (22), (23) en (25) vier vergelijkingen hebben, ter oplossing der onbekenden  $a_1, a_2, b_1, b_2$ .

Daar uit (21) volgt

$$b_1 \sin \beta_1 = b_2 \sin \beta_2,$$

kan men voor (23) schrijven

$$\frac{(1 - a_1) \cos \alpha_1}{\varepsilon_1} - \frac{a_2 \cos \alpha_2}{\varepsilon_2} = \left( \frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1} \right) b_1 \sin \beta_1$$

en voor (22)

$$\begin{aligned} & \frac{(1 + a_1) \sin \alpha_1}{\varepsilon_1} - \frac{a_2 \sin \alpha_2}{\varepsilon_2} = \\ & = - \left( \frac{1 + 4\pi \varepsilon_1}{\varepsilon_1} \cot \beta_1 + \frac{1 + 4\pi \varepsilon_2}{\varepsilon_2} \cot \beta_2 \right) b_1 \sin \beta_1 \dots (26) \end{aligned}$$

Door hieruit  $b_1 \sin \beta_1$  te elimineeren verkrijgt men

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{(1 - a_1) \cos \alpha_1}{\varepsilon_1} - \frac{a_2 \cos \alpha_2}{\varepsilon_2} \right] \left( \frac{1 + 4\pi \varepsilon_1}{\varepsilon_1} \cot \beta_1 + \frac{1 + 4\pi \varepsilon_2}{\varepsilon_2} \cot \beta_2 \right) + \\ & + \left[ \frac{(1 + a_1) \sin \alpha_1}{\varepsilon_1} - \frac{a_2 \sin \alpha_2}{\varepsilon_2} \right] \left( \frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1} \right) = 0, \dots (27) \end{aligned}$$

welke vergelijking met (25) de waarde van  $a_1$  en  $a_2$  bepaalt.

Zijn deze gevonden, dan kan men uit (26)  $b_1$  en vervolgens uit (21)  $b_2$  vinden.

Nemen wij nu onze onderstelling in aanmerking, dat  $\varepsilon_1$  en  $\varepsilon_2$  zoo groot zijn, dat men  $\frac{1}{\varepsilon_1}$  en  $\frac{1}{\varepsilon_2}$  ten opzichte van de eenheid mag verwaarloozen, dan wordt (27) veel eenvoudiger, nl.

$$\left[ \frac{(1 - a_1) \cos \alpha_1}{\varepsilon_1} - \frac{a_2 \cos \alpha_2}{\varepsilon_2} \right] (\cot \beta_1 + \cot \beta_2) = 0,$$

of

$$\frac{(1 - a_1) \cos \alpha_1}{\varepsilon_1} = \frac{a_2 \cos \alpha_2}{\varepsilon_2} \dots \dots \dots (28).$$

Verder blijkt dan uit (26), dat  $b_1$  een grootheid wordt, van dezelfde orde als  $\frac{1}{\varepsilon_1}$ , en evenzoo  $b_2$ , zoodat men bij een eerste benadering mag zeggen, dat er geen longitudinale trillingen ontstaan.

Lost men uit (25) en (28) de onbekenden op, dan vindt men

$$\alpha_1 = - \frac{\varepsilon_1 \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 - \varepsilon_2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_1}{\varepsilon_1 \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 + \varepsilon_2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_1} \dots (29)$$

Stelt men ook hierbij  $\frac{1 + 4\pi\theta_1}{1 + 4\pi\theta_2} = 1$ , dan wordt

$$\varepsilon_1 : \varepsilon_2 = \mathbf{V}_2^2 : \mathbf{V}_1^2 = \sin^2 \alpha_2 : \sin^2 \alpha_1$$

en gaat (29) over in

$$\alpha_1 = - \frac{\sin \alpha_2 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_1 \cos \alpha_1}{\sin \alpha_2 \cos \alpha_2 + \sin \alpha_1 \cos \alpha_1},$$

of

$$\alpha_1 = \frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2)}{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2)}, \dots (VI)$$

terwijl uit (25) volgt

$$\alpha_2 = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \left[ 1 + \frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2)}{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2)} \right] \dots (VI_a).$$

Zooals men ziet komt (VI) met de ervaring overeen. En hiermede is het resultaat afgeleid, dat reeds vroeger door HELMHOLTZ werd gevonden (Inleiding, p. 2). De door hem gemaakte opmerking, dat men, door  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$  te stellen en dus alleen de magnetische eigenschappen der twee middenstoffen te doen verschillen, ook tot juiste resultaten komt, wordt door onze formules bevestigd. Want alsdan gaat (19) over in (VI), (29) daarentegen in (V). Daar echter dit geval stellig niet verwezenlijkt wordt, kunnen wij het verder met stilzwijgen voorbijgaan.

§ 8. Het is niet van belang ontbloot, de hier gegeven theorie met die van CAUCHY, die tot dezelfde resultaten tracht te komen, te vergelijken. De laatste moest, om voor het eerste hoofdgeval tot juiste uitkomsten te komen, de onderstelling maken, dat de elasticiteit des aethers overal dezelfde is (Hoofdst. I, § 7). Wij moesten op een dergelijke wijze  $\frac{1 + 4\pi\theta_1}{1 + 4\pi\theta_2} = 1$  stellen, wat echter geen onderstelling is, maar ons door de waarneming geleerd wordt. Over het algemeen is het als een voordeel van MAXWELL's theorie te beschouwen dat zij de optische eigenschappen der lichamen in onmiddellijk verband brengt met andere waargenomen feiten.

Verder leverde het bij de theorie van CAUCHY zwarigheden op, om in het tweede hoofdgeval de longitudinale trillingen, om 't zoo te noemen, te doen verdwijnen. Hier werd dit onmiddellijk bereikt

door de onderstelling, dat  $\varepsilon$  zeer groot is, een hypothese, die tegen niets strijdt, ons de juiste waarde voor de voortplantings-snelheid opleverde en bovendien andere moeilijkheden zal oplossen.

Men had, ten gevolge van die onderstelling, het tweede hoofd-geval op meer eenvoudige wijze kunnen behandelen. Men kan nl. onmiddellijk de grensvoorwaarden door de invoering ervan wijzigen. Uit de eerste der vergelijkingen (9) en uit (11) volgt door eliminatie van  $\varphi$

$$\frac{1 + 4\pi\varepsilon_1}{\varepsilon_1} \xi_1 = \frac{1 + 4\pi\varepsilon_2}{\varepsilon_2} \xi_2$$

en vervolgens uit (11)

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_1 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_2 = 4\pi \xi_1 \left(1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \cdot \frac{1 + 4\pi\varepsilon_1}{1 + 4\pi\varepsilon_2}\right).$$

Wordt nu  $\frac{1}{\varepsilon_2}$  oneindig klein, dan volgt uit deze vergelijkingen, dat de verhouding  $\frac{\xi_1}{\xi_2}$  oneindig weinig van de eenheid en  $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_1$  oneindig weinig van  $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_2$  verschilt. Bij een eerste benadering kan men in plaats van deze beide vergelijkingen nemen

$$\xi_1 = \xi_2 \text{ en } \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_1 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_2,$$

waarbij dan de overige grensvoorwaarden zijn te voegen. Aan de aldus verkregen condities kan men voldoen, door alleen transversale trillingen in rekening te brengen en men komt dan tot dezelfde uitkomsten, die wij boven vonden.

Met een enkel woord wil ik nog aangeven, welchen invloed het heeft, wanneer men sommige onderstellingen, waarop de gegeven theorie steunt, laat varen. Wilde men vooreerst de kleine afwijking in rekening brengen, die de verhouding  $\frac{1 + 4\pi\theta_1}{1 + 4\pi\theta_2}$  van de eenheid vertoont, dan zou men uit (19) en (29) vinden, dat dit alleen een kleine verandering in de intensiteit van het teruggekaatste licht ten gevolge had, te klein om door ons waargenomen te worden. Onderstelde men in de tweede plaats, dat  $\frac{1}{\varepsilon}$  nog een, wel kleine maar toch merkbare, waarde had, dan zou de formule (29) nog een kleine correctie behoeven. Daarbij zou, wanneer



b.v.  $k$  niet zeer groot en dus  $\nabla$  aanzienlijk werd, het geval zich voordoen, dat die correctieterm onbestaanbaar werd. Bij behoorlijke interpretatie der formules zou men dan tot het resultaat komen, dat in het algemeen het teruggekaatste licht een zwakke elliptische polarisatie had. Hetzelfde zou het geval zijn, wanneer men met lichamen met een zwak geleidingsvermogen te doen had, of wanneer de twee middenstoffen niet scherp van elkander gescheiden waren, maar een overgangslaag van merkbare dikte bestond.

De electromagnetische theorie van het licht levert dus in de formules (V) en (VI) resultaten op, die eigenlijk alleen voor een ideaal geval gelden. De waarneming heeft dan ook in het algemeen kleine afwijkingen daarvan, met name een zwakke elliptische polarisatie van het teruggekaatste licht, doen kennen. De theorie kan niet één, maar verschillende oorzaken voor dit verschijnsel aangeven. Ik twijfel er niet aan, of men zou, door alles in rekening te brengen, tot formules kunnen geraken, die ook die afwijkingen weergeven. Maar onze kennis is nog niet voldoende, om met zekerheid te kunnen aangeven, welk aandeel elke oorzaak in het verschijnsel heeft, en het komt mij daarom beter voor, ons voorloopig bij de eenvoudige formules te bepalen, die wij boven hebben afgeleid.

---

## VIERDE HOOFDSTUK.

### DE TERUGKAATSING EN BREKING VAN HET LICHT DOOR KRISTALLEN.

§ 1. De optische eigenschappen van gekristalliseerde lichamen behoorden tot de eerste onderwerpen, waaraan de undulatietheorie hare krachten beproefde. Zij slaagde er in, niet alleen een vrij voldoende verklaring der dubbele breking te geven, maar zelfs een paar verschijnselen te voorspellen, die nog niet waren waargenomen. Minder gelukkig was zij in hare pogingen, om de wetten der lichtbeweging in kristallen uit de gelijkstelling van het licht met de trillingen van een veerkrachtig medium af te leiden. En, zooals reeds bij de isotrope lichamen het geval was, zeer ernstige bezwaren traden te voorschijn, toen men beproefde, uit die gelijkstelling alle omstandigheden te doen voortvloeien, die zich bij de terugkaatsing en breking van het licht door kristallen voordoen.

Vandaar de wenschelijkheid, een onderzoek in te stellen omtrent de vraag, of de electromagnetische theorie, die wij in het vorige hoofdstuk leerden kennen, ook hier misschien gelukkiger is dan de theorie van FRESNEL. MAXWELL 1) heeft reeds uit zijne beschouwingen vergelijkingen afgeleid, die de dubbele breking weergeven. Wij zullen vooreerst nagaan, of dit ook mogelijk is, wanneer men de bewegingsvergelijkingen der electriciteit opstelt, zooals wij dit voor de isotrope lichamen gedaan hebben. Vervolgens zullen wij de terugkaatsing door kristallen aan een nader onderzoek onderwerpen.

1) t. a. p. § § 794—797.

Allereerst moeten de vergelijkingen van het tweede hoofdstuk zoo gewijzigd worden, dat zij voor een anisotroop medium gelden. Wij gaan daarbij uit van de volgende stelling.

In een anisotrope middenstof valt in het algemeen de richting van de diëlectrische polarisatie, den geleidingsstroom, of de magnetische polarisatie niet meer samen met die der electromotorische, of magnetiseerende kracht; voor elk punt bestaan echter drie onderling loodrechte richtingen (de *hoofdrichtingen*), waarvoor dit wel het geval is. De constanten  $\epsilon$ ,  $\kappa$ ,  $\theta$  hebben dan voor die richtingen verschillende waarden.

Wat de magnetische polarisatie en den geleidingsstroom betreft, vindt deze stelling haar steun in de waarnemingen en voor de diëlectrische polarisatie is althans in een enkel geval (zie beneden, § 6) de afhankelijkheid van  $\epsilon$  van de richting proefondervindelijk aangetoond.

Wij maken verder de zeer natuurlijke onderstelling, dat de hoofdrichtingen voor elk der drie verschijnselen dezelfde zijn. Eindelijk zullen wij alleen het geval beschouwen, dat zij ook in elk punt dezelfde zijn. Dit is het geval, wanneer wij met een onbegrensd, homogeen, anisotroop medium te doen hebben, of ook, wanneer dit de ruimte gedeeltelijk vult en het overige deel door een isotrope stof wordt ingenomen; in deze laatste toch kunnen de hoofdrichtingen willekeurig worden gekozen.

De eenvoudigste vergelijkingen worden nu verkregen, wanneer wij onze assen evenwijdig aan de hoofdrichtingen kiezen. Onderscheiden wij daarbij de waarden van  $\epsilon$ ,  $\kappa$  en  $\theta$ , die op de drie assen betrekking hebben, door de indices 1, 2 en 3, dan moeten wij in plaats van de vergelijkingen (3) van het tweede hoofdstuk schrijven

$$\xi = \epsilon_1 X, \quad \eta = \epsilon_2 Y, \quad \zeta = \epsilon_3 Z,$$

en in plaats van (14)

$$u = \frac{1}{\kappa_1} X, \quad v = \frac{1}{\kappa_2} Y, \quad w = \frac{1}{\kappa_3} Z,$$

zoodat de uitdrukkingen (17) voor de stroomcomponenten nu worden

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{1}{\kappa_1 \epsilon_1} \xi, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{\kappa_2 \epsilon_2} \eta, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{1}{\kappa_3 \epsilon_3} \zeta.$$

Op dezelfde wijze veranderen de betrekkingen (39) in

$$\lambda = \theta_1 \left( L - \frac{\partial \chi}{\partial x} \right), \quad \mu = \theta_2 \left( M - \frac{\partial \chi}{\partial y} \right), \quad \nu = \theta_3 \left( N - \frac{\partial \chi}{\partial z} \right).$$

Daarentegen blijven alle vergelijkingen onveranderd, die dienen ter bepaling van  $\varphi$  en  $\chi$  door  $\xi, \eta, \zeta$  ( $u, v, w$ ) en  $\lambda, \mu, \nu$ . Evenzoo die, welke de magnetiseerende kracht aangeven, uit een elektrische beweging voortspruitende. Eindelijk worden ook de formules voor de electromotorische kracht der inductie, die het gevolg is van een veranderlijken stroom, of van een veranderlijken magnetischen toestand, niet gewijzigd. Neemt men dit alles in aanmerking, dan vindt men, dat (45) en (46) nog gelden, mits men  $\varepsilon$  en  $\theta$  met de indices 1, 2 en 3 voorzie. Verder kan men op die vergelijkingen dezelfde transformaties toepassen, die wij in het tweede hoofdstuk hebben gebezigd, en men komt hierdoor ten slotte tot de volgende bewegingsvergelijkingen

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\xi}{\varepsilon_3} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\eta}{\varepsilon_2} \right) &= A \frac{1 + 4\pi\theta_1}{\theta_1} \frac{\partial \lambda}{\partial t}, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\xi}{\varepsilon_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\zeta}{\varepsilon_3} \right) &= A \frac{1 + 4\pi\theta_2}{\theta_2} \frac{\partial \mu}{\partial t}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\eta}{\varepsilon_2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\zeta}{\varepsilon_1} \right) &= A \frac{1 + 4\pi\theta_3}{\theta_3} \frac{\partial \nu}{\partial t}, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \text{(I)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\xi}{\varepsilon_1} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\eta}{\varepsilon_2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\zeta}{\varepsilon_3} \right) = -\Delta \varphi + A^2 k \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \dots \dots \text{(II)}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\nu}{\theta_3} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\mu}{\theta_2} \right) &= A \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} - 4\pi \frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{4\pi}{\varepsilon_1 \varepsilon_3} \xi \right], \\ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\lambda}{\theta_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\nu}{\theta_3} \right) &= A \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t} - 4\pi \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{4\pi}{\varepsilon_2 \varepsilon_3} \eta \right], \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mu}{\theta_2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\lambda}{\theta_1} \right) &= A \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial t} - 4\pi \frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{4\pi}{\varepsilon_3 \varepsilon_1} \zeta \right], \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \text{(III)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\lambda}{\theta_1} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu}{\theta_2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\nu}{\theta_3} \right) = -\Delta \chi, \dots \dots \dots \text{(IV)}$$

$$\xi = \eta = \zeta = \lambda = \mu = \nu = \varphi = \chi = 0, \dots \dots \dots \text{(V)}$$

de laatste voor oneindigen afstand.

De grensvoorwaarden (A) en (B) veranderen in de volgende

$$\left. \begin{aligned} \frac{\xi}{\varepsilon_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \left( \frac{\xi}{\varepsilon_1} \right)' + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)', \\ \frac{\eta}{\varepsilon_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \left( \frac{\eta}{\varepsilon_2} \right)' + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)', \\ \frac{\zeta}{\varepsilon_3} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= \left( \frac{\zeta}{\varepsilon_3} \right)' + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)', \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \text{(A)}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\lambda}{\theta_1} + \frac{\partial \chi}{\partial x} &= \left(\frac{\lambda}{\theta_1}\right)' + \left(\frac{\partial \chi}{\partial x}\right)', \\ \frac{\mu}{\theta_2} + \frac{\partial \chi}{\partial y} &= \left(\frac{\mu}{\theta_2}\right)' + \left(\frac{\partial \chi}{\partial y}\right)', \\ \frac{\nu}{\theta_3} + \frac{\partial \chi}{\partial z} &= \left(\frac{\nu}{\theta_3}\right)' + \left(\frac{\partial \chi}{\partial z}\right)', \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (B)$$

waarbij de eene zijde van het oppervlak  $S$  van de andere door accenten is onderscheiden.

Bij de opgestelde vergelijkingen komen dan nog (18), (19) — of (20), (21) —, (40) en (40\*), die, met de gewijzigde notatie aan het grensvlak, onveranderd blijven bestaan.

§ 2. Wij passen deze vergelijkingen toe op een onbegrensd, anisotroop medium, dat de electriciteit niet geleidt, zoodat  $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = \infty$  is. Het lichaam zij daarbij homogeen, zoodat  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \theta_1, \theta_2, \theta_3$  overal dezelfde waarde hebben. Gemakshalve voeren wij in plaats van de magnetische polarisatie de componenten  $L, M, N$  der (totale) magnetiseerende kracht in; wij stellen dus

$$\frac{\lambda}{\theta_1} = L, \frac{\mu}{\theta_2} = M, \frac{\nu}{\theta_3} = N.$$

Om eindelijk onze uitdrukkingen een wenschelijke eenvoudigheid te doen bewaren, nemen wij onmiddellijk in aanmerking, dat men slechts een zeer kleine fout begaat, door in plaats van  $1 + 4\pi\theta_1, 1 + 4\pi\theta_2, 1 + 4\pi\theta_3$  de waarde te stellen, die  $1 + 4\pi\theta$  in de lucht aanneemt.

De vergelijkingen (I) — (IV) worden dan

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon_3} \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{\partial \eta}{\partial z} &= A(1 + 4\pi\theta_0) \frac{\partial L}{\partial t}, \\ \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{1}{\varepsilon_3} \frac{\partial \zeta}{\partial x} &= A(1 + 4\pi\theta_0) \frac{\partial M}{\partial t}, \\ \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial \xi}{\partial y} &= A(1 + 4\pi\theta_0) \frac{\partial N}{\partial t}, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (a)$$

$$\frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{1}{\varepsilon_3} \frac{\partial \zeta}{\partial z} = -\Delta \varphi + A^2 k \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \dots \dots (b)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} &= A \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} - 4\pi \frac{\partial \xi}{\partial t} \right], \\ \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} &= A \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t} - 4\pi \frac{\partial \eta}{\partial t} \right], \\ \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} &= A \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial t} - 4\pi \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right], \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (c)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = -\Delta \chi,$$

terwijl de vergelijkingen (V) achterwege gelaten moeten worden, wanneer wij ons, zooals we in het vervolg zullen doen, met de voortplanting van vlakke golven bezig houden. Hierbij komen nog de vergelijkingen (20) en (40) van het tweede hoofdstuk

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{1}{4\pi} \Delta \varphi \dots (d)$$

en

$$\theta_1 \frac{\partial L}{\partial x} + \theta_2 \frac{\partial M}{\partial y} + \theta_3 \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{1}{4\pi} \Delta \chi.$$

Elimineeren wij wederom  $\chi$  uit de twee eenige vergelijkingen, waarin die functie voorkomt, dan vinden wij het omtrent  $\theta$  onderstelde in aanmerking nemende,

$$\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = 0 \dots (e)$$

§ 3. Zoeken wij de voorwaarden, onder welke zich een golfstelsel, met een plat vlak tot golffront, en waarbij de elektrische trillingen overal in dezelfde richting geschieden, in het kristal kan voortplanten. Zij de voortplantingsrichting, d. i. de normaal op het golffront, gegeven door de cosinussen  $l, m, n$  der richthoeken en evenzoo de trillingsrichting door de grootheden  $p, q, r$ , dan kunnen wij de elektrische trillingen voorstellen door

$$\xi = p a \cos \psi, \quad \eta = q a \cos \psi, \quad \zeta = r a \cos \psi, \dots (1)$$

waarbij

$$\psi = \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{lx + my + nz}{v} + d \right)$$

en  $v$  de voortplantingssnelheid der golven is.

Uit de vergelijkingen (a) kunnen wij  $L, M, N$  bepalen, daarbij weër in het oog houdende, dat wij een periodieke beweging zoeken en dus constante termen = 0 moeten stellen. Daardoor vinden wij

$$\left. \begin{aligned} L &= \frac{1}{A(1 + 4\pi\theta_0)} \nu \left( \frac{qn}{\epsilon_2} - \frac{rm}{\epsilon_3} \right) a \cos \psi, \\ M &= \frac{1}{A(1 + 4\pi\theta_0)} \nu \left( \frac{rl}{\epsilon_3} - \frac{pn}{\epsilon_1} \right) a \cos \psi, \\ N &= \frac{1}{A(1 + 4\pi\theta_0)} \nu \left( \frac{pm}{\epsilon_1} - \frac{ql}{\epsilon_2} \right) a \cos \psi, \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

welke waarden tevens aan (e) voldoen.

Uit (d) volgt verder

$$\Delta \varphi = \frac{8 \pi^2}{T \mathbf{v}} (p l + q m + r n) a \sin \psi,$$

waaraan voldaan wordt door

$$\varphi = -2 T \mathbf{v} (p l + q m + r n) a \sin \psi. \dots (3)$$

Na substitutie der opgestelde waarden in (b) en (c) leveren ons deze vergelijkingen eenige voorwaarden op, tot nadere bepaling van den bewegingstoestand. De eerste vergelijking geeft

$$\begin{aligned} \frac{1 + 4 \pi \varepsilon_1}{\varepsilon_1} p l + \frac{1 + 4 \pi \varepsilon_2}{\varepsilon_2} q m + \frac{1 + 4 \pi \varepsilon_3}{\varepsilon_3} r n = \\ = 4 \pi A^2 k \mathbf{v}^2 (p l + q m + r n) \dots (4) \end{aligned}$$

en evenzoo vindt men uit de vergelijkingen (c) na eenige herleiding

$$\left. \begin{aligned} \frac{p}{\varepsilon_1} - l \left( \frac{p l}{\varepsilon_1} + \frac{q m}{\varepsilon_2} + \frac{r n}{\varepsilon_3} \right) = \\ = 4 \pi A^2 (1 + 4 \pi \theta_0) \mathbf{v}^2 [p - l (p l + q m + r n)], \\ \frac{q}{\varepsilon_2} - m \left( \frac{p l}{\varepsilon_1} + \frac{q m}{\varepsilon_2} + \frac{r n}{\varepsilon_3} \right) = \\ = 4 \pi A^2 (1 + 4 \pi \theta_0) \mathbf{v}^2 [q - m (p l + q m + r n)], \\ \frac{r}{\varepsilon_3} - n \left( \frac{p l}{\varepsilon_1} + \frac{q m}{\varepsilon_2} + \frac{r n}{\varepsilon_3} \right) = \\ = 4 \pi A^2 (1 + 4 \pi \theta_0) \mathbf{v}^2 [r - n (p l + q m + r n)]. \end{aligned} \right\} \dots (5)$$

Is de voortplantingsrichting, dus  $l, m, n$ , gegeven, dan moeten  $\mathbf{v}, p, q, r$  aan deze voorwaarden, benevens aan

$$p^2 + q^2 + r^2 = 1 \dots (6)$$

voldoen. Door de vergelijkingen (5), resp. met  $l, m, n$  vermenigvuldigd, bij elkaar op te tellen, verkrijgt men  $0 = 0$ , zoodat (4), (5) en (6) slechts vier van elkander onafhankelijke betrekkingen bevatten, juist voldoende ter bepaling van  $p, q, r$  en  $\mathbf{v}$ . Men ziet hieruit, dat een bewegingstoestand, zooals wij dien onderstelden, wel mogelijk is, maar dat bij een gegeven voortplantingsrichting niet elke trillingsrichting kan genomen worden. Uit de opgestelde vergelijkingen laat zich verder bewijzen, dat er drie trillingsrichtingen kunnen gevonden worden, die aan de voorwaarden van het vraagstuk voldoen.

§ 4. Wij zullen alleen de oplossing der vergelijkingen (4), (5) en (6) geven in de onderstelling, die wij reeds in het vorige hoofdstuk maakten, dat  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  en  $\varepsilon_3$  zoo groot zijn, dat men de omge-

keerde waarden ervan ten opzichte van de eenheid mag verwaarlozen. Daardoor wordt de vergelijking (4) veel eenvoudiger; zij geeft dan na deeling door  $4\pi$

$$pl + qm + rn = A^2 k v^2 (pl + qm + rn) \dots \dots \dots (7)$$

Hieraan kan vooreerst voldaan worden door

$$v^2 = \frac{1}{A^2 k}.$$

Substitueert men dit in (5), dan bepalen deze vergelijkingen met (6) op ondubbelzinnige wijze  $p$ ,  $q$  en  $r$ .

Deze eerste bewegingstoestand komt, zooals uit de waarde voor de voortplantingssnelheid blijkt, overeen met de longitudinale trillingen bij isotrope lichamen, ofschoon hier de trillingsrichting in het algemeen niet meer loodrecht op het golffront staat. (Alleen wanneer  $\frac{1}{s}$  ten opzichte van  $\frac{1}{k}$  mag verwaarloosd worden zou men dit bij een eerste benadering mogen aannemen). Wij zullen echter met dezen bewegingstoestand in het vervolg niet te doen hebben.

In de tweede plaats kan aan (7) voldaan worden, wanneer

$$pl + qm + rn = 0 \dots \dots \dots (8)$$

is. Deze vergelijking drukt uit, dat er in het kristal een beweging mogelijk is, waarbij de richting der elektrische trillingen in het golffront ligt. Dit zijn dus zuiver transversale trillingen en de beschouwing daarvan is voor de theorie van het licht van groot belang.

Ten gevolge van (8) veranderen de vergelijkingen (5) in

$$\left. \begin{aligned} \frac{p}{\varepsilon_1} - l \left( \frac{pl}{\varepsilon_1} + \frac{qm}{\varepsilon_2} + \frac{rn}{\varepsilon_3} \right) &= 4\pi A^2 (1 + 4\pi \theta_0) v^2 p, \\ \frac{q}{\varepsilon_2} - m \left( \frac{pl}{\varepsilon_1} + \frac{qm}{\varepsilon_2} + \frac{rn}{\varepsilon_3} \right) &= 4\pi A^2 (1 + 4\pi \theta_0) v^2 q, \\ \frac{r}{\varepsilon_3} - n \left( \frac{pl}{\varepsilon_1} + \frac{qm}{\varepsilon_2} + \frac{rn}{\varepsilon_3} \right) &= 4\pi A^2 (1 + 4\pi \theta_0) v^2 r, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

die nog altijd twee van elkander en van (8) onafhankelijke voorwaarden bevatten. Leiden wij derhalve twee dergelijke betrekkingen uit (9) af, dan kunnen wij die in de plaats ervan nemen. Wij elimineeren nu vooreerst uit (9) de grootheden

$$\frac{pl}{\varepsilon_1} + \frac{qm}{\varepsilon_2} + \frac{rn}{\varepsilon_3}$$



en

$$4 \pi A^2 (1 + 4 \pi \theta_0) \mathbf{v}^2.$$

Dit geeft

$$\begin{vmatrix} p & q & r \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \\ l & m & n \\ p & q & r \end{vmatrix} = 0 \dots \dots \dots (10)$$

Ten tweede elimineeren wij uit (9)  $l, m, n$  door de vergelijkingen, met  $p, q$  en  $r$  vermenigvuldigd, op te tellen en daarbij (8) in aanmerking te nemen. Dit geeft

$$4 \pi A^2 (1 + 4 \pi \theta_0) \mathbf{v}^2 = \frac{p^2}{\varepsilon_1} + \frac{q^2}{\varepsilon_2} + \frac{r^2}{\varepsilon_3} \dots \dots (11)$$

Voor onze vier vergelijkingen nemen wij nu (6), (8), (10) en (11). De drie eerste bevatten alleen  $p, q$  en  $r$ , maar  $\mathbf{v}$  niet en bepalen dus de trillingsrichting. De laatste leert  $\mathbf{v}$  kennen, zoodra  $p, q, r$  bekend zijn.

Uit (11) volgt, dat de voortplantingssnelheid op eenvoudige wijze met de trillingsrichting samenhangt.

Om ons dit duidelijk te maken stellen wij

$$\left. \begin{aligned} 4 \pi A^2 \varepsilon_1 (1 + 4 \pi \theta_0) &= R_1^2, \\ 4 \pi A^2 \varepsilon_2 (1 + 4 \pi \theta_0) &= R_2^2, \\ 4 \pi A^2 \varepsilon_3 (1 + 4 \pi \theta_0) &= R_3^2, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12)$$

en construeeren een ellipsoïde met de vergelijking

$$\frac{x^2}{R_1^2} + \frac{y^2}{R_2^2} + \frac{z^2}{R_3^2} = 1 \dots \dots \dots (E)$$

Zoeken wij dan de lengte  $R$  eener halve middellijn, in de richting  $(p, q, r)$  getrokken. Men heeft daarvoor

$$\frac{1}{R^2} = \frac{p^2}{R_1^2} + \frac{q^2}{R_2^2} + \frac{r^2}{R_3^2}, \dots \dots \dots (13)$$

of, volgens (12),

$$\frac{1}{R^2} = \frac{1}{4 \pi A^2 (1 + 4 \pi \theta_0)} \left( \frac{p^2}{\varepsilon_1} + \frac{q^2}{\varepsilon_2} + \frac{r^2}{\varepsilon_3} \right).$$

Vergelijkt men dit met (11), dan vindt men, dat

$$\mathbf{v} = \frac{1}{R}$$

is, d. w. z. de voortplantingssnelheid van transversale trillingen

wordt gegeven door de omgekeerde waarde van de halve middellijn, in de ellipsoïde in de richting der elektrische trillingen getrokken.

Het oppervlak  $E$ , dat wij in het vervolg de *polarisatieëllipsoïde* zullen noemen, leert ons ook op eenvoudige wijze de betrekking tusschen voortplantings- en trillingsrichting kennen.

Denken wij ons daartoe door het middelpunt der ellipsoïde een vlak gebracht, evenwijdig aan het golfvront en zoeken wij de richting van de assen der ellips  $e$ , die uit de snijding ontstaat. Wij moeten dan  $p$ ,  $q$  en  $r$  zoo bepalen, dat de waarde (13) voor  $\frac{1}{R^2}$  een maximum of een minimum wordt; daarbij zijn echter  $p$ ,  $q$  en  $r$  gebonden aan de voorwaarde

$$p l + q m + r n = 0, \dots \dots \dots (\alpha)$$

die uitdrukt, dat de gezochte richting in het bedoelde vlak ligt, en aan

$$p^2 + q^2 + r^2 = 1 \dots \dots \dots (\beta)$$

Men moet dan, zooals men weet, de totale differentiaal van  $\frac{1}{R^2}$  naar  $p$ ,  $q$  en  $r$  gelijk 0 stellen; evenzoo de voorwaarden  $(\alpha)$  en  $(\beta)$  differentieëren en uit de drie aldus verkregen vergelijkingen  $d p$ ,  $d q$  en  $d r$  elimineeren. Uit (13) volgt aldus

$$\frac{p d p}{R_1^2} + \frac{q d q}{R_2^2} + \frac{r d r}{R_3^2} = 0,$$

of, volgens (12),

$$\frac{p}{\epsilon_1} d p + \frac{q}{\epsilon_2} d q + \frac{r}{\epsilon_3} d r = 0.$$

De voorwaarden  $(\alpha)$  en  $(\beta)$  geven

$$l d p + m d q + n d r = 0$$

en

$$p d p + q d q + r d r = 0.$$

Door eliminatie van  $d p$ ,  $d q$  en  $d r$  komt er

$$\begin{vmatrix} p & q & r \\ \epsilon_1 & \epsilon_2 & \epsilon_3 \\ l & m & n \\ p & q & r \end{vmatrix} = 0, \dots \dots \dots (\gamma)$$

welke betrekking met  $(\alpha)$  en  $(\beta)$  de richtingen der assen bepaalt. Maar, zooals men ziet, zijn de vergelijkingen  $(\alpha)$ ,  $(\beta)$  en  $(\gamma)$  juist

dezelfde als (6), (8) en (10), die ter bepaling van de trillingsrichting dienen, waaruit volgt, dat deze met die der assen van onze ellips kan samenvallen.

Resumerende hebben wij nu de volgende stelling, die de lichtbeweging in kristallen geheel bepaalt.

In een anisotroop lichaam kunnen zich in het algemeen in een gegeven richting slechts twee golfstelsels met transversale trillingen voortplanten. De richting der electriche trillingen moet nl. samenvallen met een van twee onderling loodrechte richtingen, in het golffront getrokken. Die richtingen worden gegeven door de assen der ellips, die uit de doorsnijding van de polarisatieëllipsoïde met een vlak, door haar middelpunt evenwijdig aan het golffront gebracht, ontstaat. De voortplantingssnelheid van een dezer golfstelsels wordt gegeven door de omgekeerde waarde van de daarbij behorende halve as der ellips.

§ 5. Dezelfde stelling heeft men ook afgeleid uit de onderstelling, dat het licht in trillingen eener veerkrachtige stof bestaat, en het wordt in verhandelingen over de dubbele breking bewezen, dat men alle waargenomen verschijnselen — voor zoo ver zij op de richting der lichtstralen en de ligging van hun polarisatievlak betrekking hebben — uit die stelling kan afleiden 1), mits men aanneemt, dat de trillingen bij een gepolariseerden lichtbundel loodrecht op het polarisatievlak plaats hebben. Dit laatste hebben wij echter reeds in het vorige hoofdstuk moeten aannemen.

Uit het verkregen resultaat volgt derhalve, dat de electromagnetische theorie alle bovengenoemde verschijnselen verklaren kan, zoodat een nadere bespreking daarvan niet noodig is. De bepaling van het golfoppervlak, het gebruik daarvan bij de verschillende vraagstukken der dubbele breking, het verband eindelijk, dat er bestaat tusschen de normaal der golven en den lichtstraal, dit alles blijft bij de nieuwe theorie onveranderd. Wij zullen daarom in de volgende §§ alleen in zoo verre op sommige dezer zaken terugkomen, als zij voor de behandeling der terugkaatsing onmisbaar zijn.

In één opzicht is de verklaring der dubbele breking, zooals zij uit MAXWELL's theorie volgt, eenvoudiger dan die, waartoe

1) Inderdaad staat onze polarisatieëllipsoïde in nauw verband met het elasticiteitsoppervlak van FRESNEL, zoodat men tot diens theorie der dubbele breking wordt teruggebracht. Men zie omtrent een en ander BEER, Einleitung in die höhere Optik.

de theorie van FRESNEL voert. Gelijk men weet, levert deze in de eerste plaats het resultaat op, dat zich in een gegeven richting drie golfstelsels met bepaalde, onderling loodrechte trillingsrichtingen kunnen voortplanten. Zal men echter de waargenomen verschijnselen kunnen verklaren, dan moet men aannemen, dat twee dezer trillingsrichtingen een zoo kleinen hoek met het golf-front maken, dat men ze bij een eerste benadering in het golf-front mag stellen. Hiertoe zijn bepaalde betrekkingen tusschen de constanten van het medium noodig en het blijkt niet duidelijk, op welke eigenschappen des aethers die betrekkingen steunen 1). Bij de beschouwingen van de vorige § daarentegen werd het bestaan van zuiver transversale trillingen mogelijk gemaakt door onze onderstelling omtrent  $\epsilon$ , die wij reeds vroeger hadden ingevoerd.

§ 6. De electromagnetische theorie van het licht eischt in kristallen voor de drie hoofdrichtingen verschillende waarden van  $\epsilon$ , dus ook van  $K$ ; de laatste moeten, zooals men gemakkelijk vindt, door de vierkanten der hoofdbrekkingsindices worden opgeleverd. Kon men dus een condensator vervaardigen, bestaande uit twee plaatvormige geleiders, evenwijdig aan elkaar opgesteld en met een gekristalliseerden, homogenen isolator daartusschen, dan zou de capaciteit moeten verschillen, al naarmate de eene of de andere hoofdrichting loodrecht op de beide geleiders stond. Zoo is echter de proef moeilijk te nemen. Een geschikter middel om de afhankelijkheid van  $K$  van de richting te bewijzen vond BOLTZMANN in de door hem ontdekte diëlectrische aantrekking. Ook het bedrag hiervan moet afhangen van de richting, waarin de electromotorische kracht op het kristal werkt. BOLTZMANN 2) heeft nu een paar bollen onderzocht, geslepen uit natuurlijke zwavelkristallen, daarin langs optischen weg de drie hoofdrichtingen bepaald en vervolgens de diëlectrische aantrekking gemeten voor het geval, dat de electromotorische kracht volgens een dezer hoofdrichtingen werkte. Aldus bepaalde hij de volgende waarden van  $K$  voor die richtingen

4,773 ; 3,970 ; 3,811 .

De vierkanten der overeenkomstige hoofdbrekkingsindices zijn

4,596 ; 3,886 ; 3,591 .

1) Men zie BEER, t. a. p., p. 232—237.

2) BOLTZMANN, Ueber die Verschiedenheit der Dielektricitätsconstante des krystallisirten Schwefels nach verschiedenen Richtungen. Ook Pogg. Ann. 153.

Naar de meening van BOLTZMANN kunnen de hier voorkomende afwijkingen uit de moeilijkheid verklaard worden, om de electromotorische kracht volkomen in de gewenschte richting te laten werken, zoodat men in de opgegeven getallen een bevestiging van MAXWELL'S beschouwingswijze zien mag.

§ 7. Wij hebben ons boven bij het onderzoek der trillingen in het kristal voornamelijk met de diëlectrische polarisatie bezig gehouden; thans zullen wij zien, hoe het daarbij met de andere grootheden gesteld is, die bij de electriciteitsbeweging in aanmerking komen. Daarbij bepalen wij ons tot transversale trillingen. Dan volgt vooreerst uit (3), zooals te verwachten was, dat overal  $\varphi = 0$  is. Beschouwen wij in de tweede plaats de electromotorische kracht  $F$ . Daar hare componenten gegeven worden door

$$X = \frac{\xi}{\epsilon_1}, \quad Y = \frac{\eta}{\epsilon_2}, \quad Z = \frac{\zeta}{\epsilon_3},$$

heeft zij niet meer dezelfde richting als de diëlectrische polarisatie  $\varrho$ . De polarisatieëllipsoïde kan ons intusschen op eenvoudige wijze het verband tusschen beide leeren kennen. Brengen wij daartoe een raakvlak aan die ellipsoïde in het punt  $(x', y', z')$ , waar zij gesneden wordt door de middellijn, in de richting  $(p, q, r)$  der diëlectrische polarisatie getrokken. Laten wij vervolgens uit het middelpunt een loodlijn op dat raakvlak neer, dan heeft men, gelijk bekend is, als  $p', q', r'$  de richtingsconstanten dier lijn zijn

$$p' : q' : r' = \frac{x'}{R_1^2} : \frac{y'}{R_2^2} : \frac{z'}{R_3^2}.$$

Neemt men de waarden van  $R_1^2, R_2^2, R_3^2$  in aanmerking, dan kan men hieruit afleiden

$$p' : q' : r' = \frac{x'}{\epsilon_1} : \frac{y'}{\epsilon_2} : \frac{z'}{\epsilon_3} = \frac{\xi}{\epsilon_1} : \frac{\eta}{\epsilon_2} : \frac{\zeta}{\epsilon_3} = X : Y : Z.$$

Derhalve wordt de richting der electromotorische kracht aangegeven door de loodlijn op het raakvlak.

Planten zich in een kristal transversale trillingen, met een plat vlak als golfvront, voort, dan zagen wij in § 4, dat de richting der diëlectrische polarisatie met een der assen van de ellips  $e$  moet samenvallen. Trekken wij dan nu door het uiteinde  $(x', y', z')$  dier as een raaklijn aan de ellips, dan ziet men gemakkelijk in, dat die lijn loodrecht moet staan op het trillingsvlak — het vlak nl., dat door de voortplantings- en trillingsrichting gaat. Daaruit volgt,

dat ook het raakvlak aan de ellipsoïde in het punt  $(x', y', z')$  loodrecht op het trillingsvlak staat en dat dus de loodlijn op het raakvlak, derhalve ook de richting van  $F$ , in het trillingsvlak ligt. Is dit echter het geval, dan kan men de electromotorische kracht ontbinden in twee componenten  $F_\rho$  en  $F_v$ , de eerste in de richting der diëlectrische polarisatie, de andere in de voortplantingsrichting der golven. Voor de eerste heeft men klaarblijkelijk

$$F_\rho = p \frac{\xi}{\epsilon_1} + q \frac{\eta}{\epsilon_2} + r \frac{\zeta}{\epsilon_3},$$

waarvoor men kan schrijven

$$F_\rho = \varrho \left( \frac{p^2}{\epsilon_1} + \frac{q^2}{\epsilon_2} + \frac{r^2}{\epsilon_3} \right),$$

dus, volgens (11),

$$F_\rho = 4 \pi A^2 (1 + 4 \pi \theta_0) \mathbf{v}^2 \varrho, \quad \dots \dots \dots (14)$$

welke formule geheel overeenkomt met die, welke voor isotrope lichamen geldt.

Is verder  $\beta$  de hoek, dien de richting van  $F$  met die van  $\varrho$  maakt, dan is

$$F_v = F_\rho \cdot \text{tg } \beta. \quad \dots \dots \dots (15)$$

Wij kiezen daarbij het teeken van  $\beta$  zoodanig, dat  $F_v$  positief is, wanneer de richting ervan samenvalt met die, naar welke zich het licht voortplant.

§ 8. De richting der electromotorische kracht  $F$  hangt op eigenaardige wijze samen met die van den lichtstraal. Daar wij dat verband later noodig hebben, zullen wij het kortelijk bespreken.

Herinneren wij ons daartoe de wijze, die de leer der dubbele breking aangeeft, om de richting van den lichtstraal te bepalen, behoorende bij een gegeven golfvront. Denkt men zich uit eenig punt  $O$  in het kristal een lijn getrokken, daarop een stuk genomen, gelijk aan de voortplantingssnelheid der golven, in de richting dezer lijn, eindelijk door het uiteinde van dat stuk een vlak loodrecht op die lijn gebracht, dan is het omhullende oppervlak van alle dus verkregen vlakken het *golfoppervlak*. Wil men nu bij een gegeven golfvront de richting van den lichtstraal bepalen, dan brenge men aan het golfoppervlak een raakvlak, evenwijdig aan dat golfvront; de lijn, die van  $O$  naar het raakpunt voert, geeft de gezochte richting aan.

De vergelijking van het golfoppervlak in vlakcoördinaten  $\mathfrak{r}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$  (zoo gekozen dat een vlak, met de coördinaten  $\mathfrak{r}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ , tot vergelijking op puntcoördinaten heeft  $\mathfrak{r}x + \mathfrak{y}y + \mathfrak{z}z = 1$ ) is 1)

$$[\mathfrak{r}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2] [\mathfrak{r}^2 \mathfrak{v}_2^2 \mathfrak{v}_3^2 + \mathfrak{y}^2 \mathfrak{v}_3^2 \mathfrak{v}_1^2 + \mathfrak{z}^2 \mathfrak{v}_1^2 \mathfrak{v}_2^2] - [\mathfrak{r}^2 (\mathfrak{v}_2^2 + \mathfrak{v}_3^2) + \mathfrak{y}^2 (\mathfrak{v}_3^2 + \mathfrak{v}_1^2) + \mathfrak{z}^2 (\mathfrak{v}_1^2 + \mathfrak{v}_2^2)] + 1 = f(\mathfrak{r}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) = 0 \dots (16)$$

Hierbij is  $O$  als oorsprong gekozen, terwijl  $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \mathfrak{v}_3$  de voortplantingssnelheden van golven zijn, waarbij de elektrische trillingen resp. in de richting der  $x-, y-, z$ -as plaats hebben.

In de analytische meetkunde wordt verder bewezen, dat de coördinaten van het raakpunt bij (16) evenredig zijn met de eerste afgeleiden van het eerste lid der vergelijking naar  $\mathfrak{r}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ , wanneer men daarin voor deze grootheden de coördinaten van het raakvlak neemt. Zijn derhalve  $l', m', n'$  de richtingsconstanten van den lichtstraal, dan worden deze bepaald door

$$l' : m' : n' = \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{r}} : \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}} : \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}$$

Voert men de differentiatie uit en neemt in aanmerking, dat volgens onze vroegere notatie

$$\mathfrak{r} = \frac{l}{v}, \mathfrak{y} = \frac{m}{v}, \mathfrak{z} = \frac{n}{v}, v = \frac{1}{R}$$

is, dan vindt men, dat

$$l' : m' : n' = P_1 : P_2 : P_3, \dots \dots \dots (17)$$

wanneer men stelt

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= l v_3^2 v_3^2 R^2 + l R^2 [l^2 v_2^2 v_3^2 + m^2 v_3^2 v_1^2 + n^2 v_1^2 v_2^2] - l (v_2^2 + v_3^2), \\ P_2 &= m v_3^2 v_1^2 R^2 + m R^2 [l^2 v_2^2 v_3^2 + m^2 v_3^2 v_1^2 + n^2 v_1^2 v_2^2] - m (v_3^2 + v_1^2), \\ P_3 &= n v_1^2 v_2^2 R^2 + n R^2 [l^2 v_2^2 v_3^2 + m^2 v_3^2 v_1^2 + n^2 v_1^2 v_2^2] - n (v_1^2 + v_2^2). \end{aligned} \right\} \dots (18)$$

Vermenigvuldigen we deze grootheden resp. met

$$m r - n q, n p - l r, l q - m p$$

en tellen we ze daarna op. Aangezien

$$l(m r - n q) + m(n p - l r) + n(l q - m p) = 0$$

is kan men voor de uitkomst schrijven

$$Q = R^2 [l(m r - n q) v_2^2 v_3^2 + m(n p - l r) v_3^2 v_1^2 + n(l q - m p) v_1^2 v_2^2] + [l(m r - n q) v_1^2 + m(n p - l r) v_2^2 + n(l q - m p) v_3^2].$$

Neemt men verder de waarden van  $v, \mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2$  en  $\mathfrak{v}_3$  in aanmerking, dan kan men de vergelijkingen (9), na deeling door  $4 \pi A^2 (1 + 4 \pi \theta_0) v^2$ , schrijven in den vorm

1) BEER, t. a. p., p. 321.

$$\left. \begin{aligned} p - R^2 [p v_1^2 - l(l p v_1^2 + m q v_2^2 + n r v_3^2)] &= 0, \\ q - R^2 [q v_2^2 - m(l p v_1^2 + m q v_2^2 + n r v_3^2)] &= 0, \\ r - R^2 [r v_3^2 - n(l p v_1^2 + m q v_2^2 + n r v_3^2)] &= 0. \end{aligned} \right\} \dots (19)$$

Door deze achtereenvolgens te vermenigvuldigen met

$$m n (v_2^2 - v_3^2), \quad n l (v_3^2 - v_1^2), \quad l m (v_1^2 - v_2^2)$$

en op te tellen, neemt het eerste lid der nieuwe vergelijking juist den vorm aan, dien wij boven voor  $Q$  neerschreven. Daaruit volgt

$$Q = P_1 (m r - n q) + P_2 (n p - l r) + P_3 (l q - m p) = 0$$

en dus, volgens (17), ook

$$l' (m r - n q) + m' (n p - l r) + n' (l q - m p) = 0.$$

Deze vergelijking drukt echter uit, dat de richting ( $l'$ ,  $m'$ ,  $n'$ ) met de richtingen ( $l$ ,  $m$ ,  $n$ ) en ( $p$ ,  $q$ ,  $r$ ) in één plat vlak ligt, dat derhalve de lichtstraal in het trillingsvlak is gelegen.

In de tweede plaats vermenigvuldigen wij de vergelijkingen (18) met  $p v_1^2$ ,  $q v_2^2$ ,  $r v_3^2$  en tellen op. Daar

$$p l + q m + r n = 0$$

is, vindt men hierdoor

$$\begin{aligned} &P_1 p v_1^2 + P_2 q v_2^2 + P_3 r v_3^2 = \\ &= R^2 (l^2 v_2^2 v_3^2 + m^2 v_3^2 v_1^2 + n^2 v_1^2 v_2^2) (l p v_1^2 + m q v_2^2 + n r v_3^2) - \\ &\quad - p l (v_2^2 + v_3^2) v_1^2 - q m (v_3^2 + v_1^2) v_2^2 - r n (v_1^2 + v_2^2) v_3^2. \end{aligned}$$

Het tweede lid dezer vergelijking is echter 0, zooals men kan bewijzen door de vergelijkingen (19), met

$$l v_2^2 v_3^2, \quad m v_3^2 v_1^2, \quad n v_1^2 v_2^2$$

vermenigvuldigd, bij elkaar op te tellen. Men heeft derhalve

$$P_1 p v_1^2 + P_2 q v_2^2 + P_3 r v_3^2 = 0.$$

Neemt men (17) in aanmerking, benevens de waarden van  $v_1^2$ ,  $v_2^2$ ,  $v_3^2$ , dan kan men hiervoor schrijven

$$l \frac{p}{\varepsilon_1} + m' \frac{q}{\varepsilon_2} + n' \frac{r}{\varepsilon_3} = 0.$$

Daar  $\frac{p}{\varepsilon_1}$ ,  $\frac{q}{\varepsilon_2}$ ,  $\frac{r}{\varepsilon_3}$  evenredig zijn met de richtingsconstanten der electromotorische kracht  $F$  leert ons deze vergelijking, dat de lichtstraal loodrecht op  $F$  staat. Door de verkregen resultaten is de richting van den lichtstraal, die bij een gegeven golf front behoort, geheel bepaald. Het blijkt tevens, dat de in de vorige § ingevoerde hoek  $\beta$  ook de hoek is, dien de lichtstraal maakt met de normaal op het golf front.



§ 9. Als een bevestiging onzer formules kan nog de uitdrukking dienen, die zij voor de magnetiseerende kracht  $G$  opleveren. De componenten daarvan worden gegeven door (2), waarvoor men kan schrijven

$$L = \frac{1}{A(1 + 4\pi\theta_0)\mathbf{v}} (Yn - Zm),$$

$$M = \frac{1}{A(1 + 4\pi\theta_0)\mathbf{v}} (Zl - Xn),$$

$$N = \frac{1}{A(1 + 4\pi\theta_0)\mathbf{v}} (Xm - Yl),$$

en deze vergelijkingen hebben een eenvoudige meetkundige beteekenis. Zetten wij in de voortplantingsrichting een stuk uit =

$\frac{1}{A(1 + 4\pi\theta_0)\mathbf{v}}$  en construeeren wij op dat stuk en de electromo-

torische kracht  $F$  als zijden een parallelogram, dan zijn  $L$ ,  $M$ ,  $N$  de componenten eener lijn, loodrecht op het vlak daarvan getrokken, terwijl de lengte dier lijn door den inhoud van het parallelogram wordt gegeven. Daaruit volgt, dat de richting der magnetiseerende kracht in het golfvront ligt en wel loodrecht op de trillingsrichting. Let men bovendien op de zijde, naar welke de lijn  $G$  moet getrokken worden, en die door de gesteldheid van ons assenstelsel bepaald is, dan komt men daaromtrent tot hetzelfde resultaat, dat wij in § 2 van het vorige hoofdstuk voor isotrope lichamen vonden. Daar verder de hoek, dien  $F$  met de voortplantingsrichting maakt,  $\frac{1}{2}\pi - \beta$  is, heeft men voor den inhoud van het parallelogram en dus voor  $G$

$$G = \frac{1}{A(1 + 4\pi\theta_0)\mathbf{v}} F \cos \beta = \frac{F_\rho}{A(1 + 4\pi\theta_0)\mathbf{v}},$$

of, volgens (14),

$$G = 4\pi A \mathbf{v} \varrho, \quad \dots \dots \dots (20)$$

welke formule ook met de in 't vorige hoofdstuk gevondene overeenstemt. Deze uitkomst, dat de magnetiseerende kracht op volkomen dezelfde wijze bepaald wordt, als bij isotrope middenstoffen, was te verwachten, daar wij van de verschillende waarden, die  $1 + 4\pi\theta$  voor de drie hoofdrichtingen aanneemt, hebben afgezien. Het gevolg daarvan is, dat, evenals in het vorige hoofdstuk, de magnetiseerende kracht uitsluitend van de electricische beweging afhangt.

Alle grootheden, die bij de lichtbeweging in kristallen in aanmerking komen, zijn door de bovenstaande beschouwingen van de polarisatieëllipsoïde afhankelijk gemaakt. Hierdoor heeft men het voordeel, dat men niet meer gebonden is aan de bijzondere coördinaatassen, die wij in het begin van dit hoofdstuk kozen. Integendeel, men kan nu aan de assen een willekeurigen stand geven; is dan ook aan onze ellipsoïde ten opzichte der nieuwe assen de juiste ligging aangewezen, dan kan men daaruit door meetkundige beschouwingen alles afleiden, wat men wenscht te weten.

§ 10. Bij het onderzoek omtrent de terugkaatsing en breking van het licht door kristallen zou men, strikt genomen, een dergelijken weg moeten inslaan, als in § 7 van het derde hoofdstuk. Men zou dus ook die trillingen in de berekening moeten opnemen, die met de longitudinale beweging in isotrope lichamen overeenkomen. Door dan echter later  $s$  zeer groot te stellen, zou men vinden, dat de bedoelde trillingen buiten rekening gelaten mogen worden.

Om onze formules niet al te samengesteld te maken, zal ik liever den in § 8 van het vorige hoofdstuk aangegeven weg volgen. Wij wijzigen dus onmiddellijk de grensvoorwaarden door de onderstelling omtrent  $\frac{1}{s}$  in te voeren en zullen dan aantoonen, dat aan de aldus vereenvoudigde conditiën kan voldaan worden, door alleen transversale trillingen in rekening te brengen. Bovendien zullen wij in de grensvergelijkingen aan  $1 + 4\pi\theta$  voor beide middenstoffen dezelfde waarde toekennen.

Bepalen wij ons nu tot het geval, dat men met een isotroop medium en een kristal te doen heeft. Onderscheiden wij het laatste door accenten van het eerste, dan kunnen wij vooreerst de voorwaarden (**A**) in den volgenden vorm schrijven

$$\begin{aligned} X + \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= X' + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)', \\ Y + \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= Y' + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)', \\ Z + \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= Z' + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)', \end{aligned}$$

waaruit men kan afleiden dat, wanneer  $h$  een willekeurige richting en  $F_h$  de component der electromotorische kracht in die richting is, de betrekking geldt

$$F_h + \frac{\partial \varphi}{\partial h} = F'_h + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial h} \right)' \dots \dots \dots (21)$$

Hierbij komt nog de vergelijking (21) van het tweede hoofdstuk. Is  $n$  de normaal aan het grensvlak, dan kan men daarvoor schrijven

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)' = 4\pi \left\{ a(\xi - \xi') + b(\eta - \eta') + c(\zeta - \zeta') \right\} \dots \dots (22)$$

Neemt men in (21) vooreerst voor  $h$  de richting  $n$ , dan is

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)' = -F_n + F'_n$$

en door uit deze vergelijking en (22)  $\varphi$  te elimineeren, verkrijgt men

$$4\pi \left\{ a(\xi - \xi') + b(\eta - \eta') + c(\zeta - \zeta') \right\} + F_n - F'_n = 0.$$

Nu is

$$F_n = a \frac{\xi}{s} + b \frac{\eta}{s} + c \frac{\zeta}{s}, \quad F'_n = a \frac{\xi'}{s_1} + b \frac{\eta'}{s_2} + c \frac{\zeta'}{s_3},$$

zoodat deze vergelijking overgaat in

$$\frac{1 + 4\pi s}{s} (a\xi + b\eta + c\zeta) = \frac{1 + 4\pi s_1}{s_1} a\xi' + \frac{1 + 4\pi s_2}{s_2} b\eta' + \frac{1 + 4\pi s_3}{s_3} c\zeta'.$$

Verwaarloost men nu bij een eerste benadering  $\frac{1}{s}$  ten opzichte van de eenheid, dan mag men in de plaats hiervan nemen

$$a\xi + b\eta + c\zeta = a\xi' + b\eta' + c\zeta', \dots \dots (23)$$

en blijkens (22) moet hier dan bij genomen worden

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)' \dots \dots \dots (24)$$

Passen wij (21) toe voor eenige richting  $h$  in het grensvlak, dan wordt  $\frac{\partial \varphi}{\partial h} = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial h} \right)'$  en dus

$$F_h = F'_h \dots \dots \dots (25)$$

Door met de grensvergelijkingen (B) en de betrekking (40\*) evenzoo te handelen, daarbij de omtrent  $\theta$  gemaakte onderstelling in het oog houdende, vinden wij, dat voor elke richting  $h$  de betrekking

$$G_h = G'_h \dots \dots \dots (26)$$

bestaat.

In woorden kunnen de voorwaarden aan het grensvlak aldus worden uitgedrukt:

*a.* De elektrische potentiaalfunctie en het differentiaalquotient er van naar de normaal aan het grensvlak zijn doorlopend. (24)

*b.* De component der diëlectrische polarisatie, loodrecht op het grensvlak, is doorlopend. (23)

*c.* Hetzelfde is het geval met de component der electromotorische kracht voor elke richting, die in het grensvlak ligt, (25) en eindelijk

*d.* met de componenten der magnetiseerende kracht in alle richtingen. (26)

Zooals men ziet zijn hiermede ook de grensvoorwaarden in een vorm verkregen, onafhankelijk van de gekozen coördinaatassen.

§ 11. Wij kunnen dan nu wederom, als wij onderstellen, dat de beide middenstoffen door een plat vlak zijn gescheiden, dit laatste voor het  $y$   $z$ -vlak kiezen. Nemen wij verder aan, dat het invallende licht een plat vlak tot golfvront heeft, dan kunnen wij loodrecht daarop het  $x$   $z$ -vlak plaatsen, zoodat dit het invalsvlak is. Zonder verder eenige onderstelling te maken omtrent de ligging der hoofdrichtingen in het kristal, met betrekking tot het grensvlak en invalsvlak, zullen wij aantoonen, dat men aan alle grensvoorwaarden voldoen kan, door alleen transversale trillingen in rekening te brengen, en dat, aan den anderen kant, alle onbekenden bepaald kunnen worden. Gemakshalve zal ik daarbij twee zaken aannemen, die men, op dezelfde wijze als bij isotrope stoffen, uit de grensvoorwaarden zou kunnen afleiden, de wetten der terugkaatsing en breking nl. en de gelijkheid in phase der verschillende lichtbundels voor punten in het grensvlak. Wat de bedoelde wetten betreft wordt, zooals men weet, in de leer der dubbele breking (uit het principe van HUYGHENS) bewezen, dat zij dezelfde zijn als bij isotrope lichamen, wanneer men vraagt, niet naar de richting van den lichtstraal, maar naar die van de normaal op het golfvront. Dan liggen de normalen der teruggekaatste en gebroken golfstelsels steeds in het invalsvlak en de sinussen der hoeken, die zij met de normaal op het grensvlak maken, zijn evenredig met de (in § 4 onderzochte) voortplantingssnelheden der golven.

Valt vooreerst een willekeurige, lineair gepolariseerde lichtbundel uit het isotrope medium op het kristal, dan kunnen wij door bekende beschouwingen de richting der twee gebroken golfstelsels, alsmede hun trillingsrichting, bepalen. In de amplitudines hebben wij dan twee onbekenden voor het gebroken licht. Daar voor het

teruggekaatste licht trillingsrichting en amplitudo bepaald moeten worden zijn er dus in het geheel vier onbekenden.

Gaat in de tweede plaats een lichtbundel uit het kristal in de isotrope stof over, dan moeten de amplitudines der beide teruggekaatste golfstelsels, trillingsrichting en amplitudo voor den enkelen gebroken straal worden bepaald, zoodat er weder vier onbekende grootheden zijn. Men zal dus in elk geval vier (en niet meer) van elkander onafhankelijke betrekkingen moeten hebben.

Aan de voorwaarde  $a$  is van zelve voldaan, wanneer alle trillingen transversaal zijn. De tweede voorwaarde geeft ééne vergelijking, de derde twee van elkander onafhankelijke betrekkingen, wanneer wij haar achtereenvolgens voor de  $y$ - en  $z$ -as, die in het grensvlak liggen, toepassen. Door eindelijk de conditie  $d$  toe te passen voor elke der drie assen worden nog drie vergelijkingen gevonden, zoodat het geheele aantal zes bedraagt. Daaruit volgt, dat alleen dan aan alle grensvoorwaarden kan worden voldaan, wanneer twee dier vergelijkingen van de overige afhankelijk zijn. Werkelijk kan men bewijzen, dat dit steeds het geval is.

Ontbinden wij daartoe de diëlectrische polarisatie  $q$  bij elken lichtbundel in twee componenten  $q_s$  en  $q_p$ , de eerste in, de laatste loodrecht op het invalsvlak. Noemen wij verder voor eenig golfstelsel  $\alpha$  den hoek, dien de voortplantingsrichting met de normaal op het grensvlak maakt, waarbij  $\alpha$  voor een invallenden of gebroken lichtbundel scherp, voor een teruggekaatste bundel stomp is. Voor de diëlectrische polarisatie loodrecht op het grensvlak hebben wij dan (de teekens kiezende als in het vorige hoofdstuk) —  $q_s \sin \alpha$  en de uitdrukking voor de continuïteit hiervoor wordt

$$\Sigma (q_s \sin \alpha) = \Sigma (q_s \sin \alpha)', \dots \dots \dots (27)$$

waarbij het somteeken betrekking heeft op de verschillende golfstelsels, in elk medium voorkomende.

Zoeken wij nu de component der magnetiseerende kracht  $G$  in een richting loodrecht op het invalsvlak. Wij kunnen daartoe, volgens den in (20) uitgedrukten regel, de magnetiseerende kracht zoeken, bij elke der componenten  $q_s$  en  $q_p$  behoorende. De laatste geeft dan een magnetiseerende kracht, die in het invalsvlak ligt en dus niet in aanmerking komt. Bij  $q_s$  daarentegen behoort de component  $4\pi A \nabla q_s$ , loodrecht op 't invalsvlak. Wij hebben derhalve de voorwaarde

$$\Sigma (4\pi A \nabla q_s) = \Sigma (4\pi A \nabla q_s)',$$

welke echter dezelfde is als (27), daar voor de verschillende lichtbundels  $\nabla$  met  $\sin \alpha$  evenredig is. Daaruit besluiten wij, dat de doorloopendheid der diëlectrische polarisatie, loodrecht op het grensvlak en de continuïteit der magnetiseerende kracht, loodrecht op het invalsvlak, tot dezelfde vergelijking voert.

Voor de magnetiseerende kracht in het invalsvlak heeft men  $4 \pi A \nabla \varrho_p$ ; zij geeft een component, loodrecht op het grensvlak,  $= 4 \pi A \nabla \varrho_p \sin \alpha$ , zoodat de doorloopendheid van de laatste wordt uitgedrukt door

$$\Sigma (4 \pi A \nabla \varrho_p \sin \alpha) = \Sigma (4 \pi A \nabla \varrho_p \sin \alpha)',$$

of door

$$\Sigma (\varrho_p \sin^2 \alpha) = \Sigma (\varrho_p \sin^2 \alpha)' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Vergelijken wij hiermede de voorwaarde, dat de component der electromotorische kracht, loodrecht op het invalsvlak, doorlopend moet zijn. Van de beide componenten  $F_\rho$  en  $F_\nabla$  (§ 7) kan alleen de eerste hier in aanmerking komen. Daar zij dezelfde richting heeft als  $\varrho$  en in grootte gegeven wordt door

$$F_\rho = 4 \pi A^2 (1 + 4 \pi \theta_0) \nabla^2 \varrho,$$

is haar ontbondene, loodrecht op het invalsvlak

$$4 \pi A^2 (1 + 4 \pi \theta_0) \nabla^2 \varrho_p.$$

De doorloopendheid hiervan voert wederom tot de vergelijking (28). Dat derhalve de magnetiseerende kracht, loodrecht op het grensvlak, en de electromotorische kracht, loodrecht op het invalsvlak, doorlopend moeten zijn levert slechts ééne conditie op.

Hiermede is bewezen, dat men niet meer dan vier van elkander onafhankelijke betrekkingen heeft ter bepaling van de vier onbekenden.

§ 12. Zoodra voor een gepolariseerden lichtbundel de voortplantingsrichting bekend is, kan men de trillingsrichting aangeven door den hoek  $\omega$ , dien het polarisatievlak met het invalsvlak maakt. Dien hoek noemen wij het *azimuth* en wij kiezen hem zoodanig dat, wanneer  $\varrho$  de diëlectrische polarisatie is, de componenten daarvan volgens de drie assen worden voorgesteld door

$$- \sin \alpha \cdot \varrho \sin \omega, \quad \varrho \cos \omega, \quad \cos \alpha \cdot \varrho \sin \omega.$$

Wij zullen alleen het geval uitvoeriger behandelen, dat het licht uit de isotrope stof in het kristal overgaat. De grootheden, op

den invallenden en teruggekaatste bundel betrekking hebbende, onderscheiden wij door de eerste met den index 0 te voorzien; die, welke bij het tweede medium behooren, door accenten. Het invallende licht kan dan worden voorgesteld door

$$\begin{aligned} \xi_0 &= -\sin \alpha \cdot \rho_0 \sin \omega_0, & L_0 &= 4 \pi A \nabla \sin \alpha \cdot \rho_0 \cos \omega_0 \\ \eta_0 &= \rho_0 \cos \omega_0, & M_0 &= 4 \pi A \nabla \rho_0 \sin \omega_0, \\ \zeta_0 &= \cos \alpha \cdot \rho_0 \sin \omega_0, & N_0 &= 4 \pi A \nabla \cos \alpha \cdot \rho_0 \cos \omega_0 \end{aligned}$$

Het is, blijkens de vorige §, voldoende, de doorlopendheid in aanmerking te nemen van  $L$ ,  $M$ ,  $N$  en  $Z$ . Voor de laatste grootheid heeft men hier

$$Z_0 = 4 \pi A^2 (1 + 4 \pi \theta_0) \nabla^2 \cos \alpha \cdot \rho_0 \sin \omega_0.$$

Voor den teruggekaatste lichtbundel moet, in plaats van  $\alpha$ , geschreven worden  $180^\circ - \alpha$ ; men heeft derhalve daarvoor

$$\begin{aligned} L &= 4 \pi A \nabla \sin \alpha \cdot \rho \cos \omega, \\ M &= 4 \pi A \nabla \rho \sin \omega, \\ N &= -4 \pi A \nabla \cos \alpha \cdot \rho \cos \omega, \\ Z &= -4 \pi A^2 (1 + 4 \pi \theta_0) \nabla^2 \cos \alpha \cdot \rho \sin \omega. \end{aligned}$$

Voor een golfstelsel in het tweede medium kunnen de waarden op dezelfde wijze worden neêrgeschreven; alleen levert hier nog  $F_\nabla$  een component volgens de  $z$ -as op. De waarde hiervan is gemakkelijk in rekening te brengen; aldus komt er voor een gebroken lichtbundel

$$\begin{aligned} L' &= 4 \pi A \nabla' \sin \alpha' \cdot \rho' \cos \omega', \\ M' &= 4 \pi A \nabla' \rho' \sin \omega', \\ N' &= 4 \pi A \nabla' \cos \alpha' \cdot \rho' \cos \omega', \\ Z' &= 4 \pi A^2 (1 + 4 \pi \theta_0) \nabla'^2 (\cos \alpha' \sin \omega' + \sin \alpha' \operatorname{tg} \beta) \rho'. \end{aligned}$$

Is de amplitudo van het invallende licht 1, die van het teruggekaatste licht  $a$  en die bij een gebroken golfstelsel  $a'$ , dan is

$$\rho_0 = \cos \psi_0, \quad \rho = a \cos \psi, \quad \rho' = a' \cos \psi'$$

en, tengevolge van de wetten der breking en de gelijkheid in phase van de verschillende lichtbundels, wordt aan het grensvlak  $\psi_0 = \psi = \psi'$ . Daaruit volgt, dat men bij het opstellen der grensvergelijkingen slechts  $\rho_0$ ,  $\rho$  en  $\rho'$  door 1,  $a$  en  $a'$  heeft te vervangen.

Is de richting van het invallende licht gegeven, dan kan men, uit de bekende theorie der dubbele breking, voor elk der gebroken lichtbundels de hoeken  $\alpha'$ ,  $\omega'$  en  $\beta$  berekenen. Het eenvoudigste resultaat verkrijgt men nu door vooreerst te onderzoeken, op welke wijze het

invallende licht moet gepolariseerd zijn, opdat slechts een der beide gebroken bundels ontstaan zal. Verstaan wij dus onder  $\alpha'$ ,  $\omega'$  en  $\beta$  de waarden, die voor dezen bundel gelden, dan komen wij, door de continuïteit van  $L$ ,  $M$ ,  $N$ ,  $Z$  uit te drukken, tot de volgende vier vergelijkingen

$$(\cos \omega_0 + a \cos \omega) \sin^2 \alpha = a' \cos \omega' \sin^2 \alpha', \quad \dots \quad (29)$$

$$(\sin \omega_0 + a \sin \omega) \sin \alpha = a' \sin \omega' \sin \alpha', \quad \dots \quad (30)$$

$$(\cos \omega_0 - a \cos \omega) \sin \alpha \cos \alpha = a' \cos \omega' \sin \alpha' \cos \alpha', \quad (31)$$

$$(\sin \omega_0 - a \sin \omega) \sin^2 \alpha \cos \alpha = a' (\sin \omega' \cos \alpha' + \operatorname{tg} \beta \sin \alpha') \sin^2 \alpha', \quad (32)$$

waaruit de vier onbekenden  $\omega_0$ ,  $\omega$ ,  $a$  en  $a'$  kunnen bepaald worden. De eerste grootheid geeft dan aan, hoe het invallende licht moet gepolariseerd zijn, om slechts één gebroken golfstelsel te doen ontstaan. Tevens blijkt uit de voor  $\omega$ ,  $a$  en  $a'$  gevonden waarden, hoe voor die eene *hoofdtrillingsrichting* van het invallende licht de terugkaatsing en breking plaats heeft.

Door in de tweede plaats te onderstellen, dat, bij dezelfde richting van den invallenden lichtstraal, alleen de andere gebroken bundel ontstaat, vindt men de tweede hoofdtrillingsrichting en de formules voor het gereflecteerde en gebroken licht, die daarbij behooren. Is men zoover gekomen, dan ligt ook de algemeene oplossing van ons vraagstuk voor de hand; immers men kan willekeurige trillingen in het invallende licht ontbinden volgens de beide hoofdtrillingsrichtingen en elk der beide componenten afzonderlijk behandelen.

Alles komt dus neêr op de oplossing der vergelijkingen (29)–(32). Elimineert men daartoe uit de eerste en de derde  $a \cos \omega$ , uit de tweede en de vierde  $a \sin \omega$  en deelt de beide verkregen vergelijkingen op elkander, dan vindt men

$$\operatorname{tg} \omega_0 = \operatorname{tg} \omega' \frac{\sin(\alpha + \alpha') \cos(\alpha - \alpha') + \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin \omega'} \sin^2 \alpha'}{\sin(\alpha + \alpha')},$$

of

$$\operatorname{tg} \omega_0 = \operatorname{tg} \omega' \cos(\alpha - \alpha') + \frac{\sin^2 \alpha' \operatorname{tg} \beta}{\cos \omega' \sin(\alpha + \alpha')} \quad \dots \quad (33)$$

Door evenzoo te handelen, maar nu eerst  $\cos \omega_0$  en  $\sin \omega_0$  te elimineeren, verkrijgt men



$$\operatorname{tg} \omega = \operatorname{tg} \omega' \frac{-\sin(\alpha - \alpha') \cos(\alpha + \alpha') + \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin \omega'} \sin^2 \alpha'}{\sin(\alpha - \alpha')},$$

of

$$\operatorname{tg} \omega = -\operatorname{tg} \omega' \cos(\alpha + \alpha') + \frac{\sin^2 \alpha' \operatorname{tg} \beta}{\cos \omega' \sin(\alpha - \alpha')} \dots (34)$$

Men kan hiervoor ook schrijven, als men (33) in aanmerking neemt

$$\operatorname{tg} \omega = -\operatorname{tg} \omega_0 \frac{\cos(\alpha + \alpha')}{\cos(\alpha - \alpha')} + \frac{2 \sin 2\alpha \sin^2 \alpha' \operatorname{tg} \beta}{\sin 2(\alpha - \alpha') \sin(\alpha + \alpha') \cos \omega'} \dots (35)$$

Zijn aldus  $\omega_0$  en  $\omega$  bepaald, dan kunnen uit (29) en (31)  $\alpha$  en  $\alpha'$  worden berekend. Men vindt dan voor het teruggekaatste licht

$$\alpha = -\frac{\cos \omega_0}{\cos \omega} \cdot \frac{\sin(\alpha - \alpha')}{\sin(\alpha + \alpha')} \dots (36)$$

Ontbindt men de trillingen in het invallende en teruggekaatste licht in een component in het invalsvlak, en een tweede loodrecht daarop gepolariseerd, en noemt men de amplitudo van de eerste component voor het invallende licht  $S$ , voor het teruggekaatste  $R_s$ , dan is

$$S = \cos \omega_0, \quad R_s = a \cos \omega,$$

zoodat men voor (36) kan schrijven

$$R_s = -S \frac{\sin(\alpha - \alpha')}{\sin(\alpha + \alpha')} \dots (37)$$

Uit de opgestelde vergelijkingen kan men ook nog afleiden

$$a = \frac{\sin \omega_0}{\sin \omega} \cdot \frac{\sin(\alpha - \alpha') \cos(\alpha + \alpha') - \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin \omega'} \sin^2 \alpha'}{\sin(\alpha + \alpha') \cos(\alpha - \alpha') + \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin \omega'} \sin^2 \alpha'} \dots (38)$$

die boven (36) de voorkeur verdient in het bijzondere geval dat

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{2} \pi$$

is.

Hiermede zijn de vergelijkingen opgesteld, die de oplossing van alle vraagstukken omtrent de terugkaatsing van het licht door kristallen bevatten.

§ 13. Reeds in het eerste hoofdstuk hebben wij een dergelijk vraagstuk, en wel een der meest eenvoudige, behandeld. Toen bleek het ons, dat de theorie van CAUCHY, in dat eenvoudige geval zelfs, met de waarnemingen in strijd is, dat daarentegen de door NEUMANN opgestelde formules tot juiste uitkomsten voeren. Die formules zijn ook in andere gevallen in schoone overeenstemming met de waarnemingen van BREWSTER, SEEBECK, DE SÉNARMONT en andere natuurkundigen en vooral de zeer nauwkeurige metingen van SEEBECK hebben de juistheid ervan bewezen. Kunnen wij dus aantoonen, dat onze resultaten met de bedoelde formules overeenkomen, dan is daarmede tevens bewezen, dat ook de electromagnetische theorie van het licht alle op dit gebied waargenomen verschijnselen verklaren kan.

NEUMANN heeft zijne theorie in een zeer uitvoerige verhandeling 1) uiteengezet en daarbij een geheel anderen weg ingeslagen, dan wij boven volgden. Hij beschouwt nl. eerst het algemeene geval, waarin twee gebroken stralen ontstaan, en leidt uit de verkregen vergelijkingen eerst aan het einde 2) zijner beschouwingen de formules af, die gelden, wanneer slechts één gebroken lichtbundel in het spel komt. Hij onderscheidt hierbij een gewonen en een buitengewonen lichtstraal, wat echter slechts een zaak van conventie is, daar men beide op volkomen dezelfde wijze kan behandelen. Voor het geval, dat alleen de eerste ontstaat, geeft hij de volgende vergelijkingen

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha' &= -\operatorname{tg} x' \cos(\varphi - \varphi') + \frac{\sin^2 \varphi' \operatorname{tg} q'}{\cos x' \sin(\varphi + \varphi')}, \\ \operatorname{tg} \delta' &= -\frac{\cos(\varphi + \varphi')}{\cos(\varphi - \varphi')} \operatorname{tg} \alpha' + \frac{2 \sin 2\varphi \sin^2 \varphi' \operatorname{tg} q'}{\sin 2(\varphi - \varphi') \sin(\varphi + \varphi') \cos x'}, \\ R_s &= -\frac{\sin(\varphi - \varphi')}{\sin(\varphi + \varphi')} S. \end{aligned} \right\} (39)$$

Hierin zijn  $\varphi, \varphi', x', \alpha', \delta$  de grootheden, die wij  $\alpha, \alpha', \omega', \omega_0$  en  $\omega$  genoemd hebben. Verder is  $q'$  de hoek, dien de lichtstraal met de normaal op het golf-front maakt, en komt dus (volgens § 8) met onzen hoek  $\beta$  overeen. Neemt men dit in aanmerking, dan blijkt het, dat de vergelijkingen (39) van onze vergelijkingen (33), (35)

1) Abhandlungen der Berliner Academie, 1835.

2) t. a. p., p. 144, 145.

en (37) slechts door sommige teekens verschillen. Dit is hieraan te wijten, dat sommige hoeken door NEUMANN in een anderen zin positief zijn gerekend, dan wij dit gedaan hebben. Inderdaad gaan de formules (39) in de onze over, wanneer men  $x'$  door  $-x'$  vervangt.

Voor het geval, dat alleen de buitengewone lichtstraal ontstaat, geeft NEUMANN vergelijkingen, die wederom alleen in het teeken van sommige termen van (39) afwijken. Klaarblijkelijk is dit alleen toe te schrijven aan de keus omtrent het teeken der verschillende hoeken. Wordt die keus in beide gevallen op dezelfde wijze bepaald, dan moeten ook de verkregen formules overeenkomen.

Het duidelijkst blijkt het intusschen, dat beide theorieën tot volkomen hetzelfde resultaat voeren, wanneer wij aantonen, waarom dit noodzakelijk zoo zijn moet. NEUMANN stelt zijne vergelijkingen op, door vooreerst de doorloopendheid der verplaatsingen (of snelheden) aan het grensvlak in aanmerking te nemen, wat hem drie betrekkingen geeft. De vierde leidt hij af uit het beginsel der levende kracht. Stellen wij ons voor, dat de invallende — en dus ook de teruggekaatste en gebroken — lichtbundel begrensd is, dan kan, gelijk men weet, dit beginsel, zooals het door FRESNEL en NEUMANN is toegepast, aldus worden uitgedrukt

$$b_0^2 \varrho H_0 = b^2 \varrho H + b'^2 \varrho' H',$$

zoolang ten minste slechts één gebroken straal ontstaat. Daarbij zijn  $b_0$ ,  $b$  en  $b'$  de amplitudines van het invallende, teruggekaatste en gebroken licht,  $\varrho$  en  $\varrho'$  de dichtheden van den aether in de twee middenstoffen, terwijl eindelijk  $H_0$ ,  $H$  en  $H'$  de volumina voorstellen, die uit elk der lichtbundels worden gesneden door twee vlakken, evenwijdig aan het golffront en op een afstand, gelijk aan de voortplantingssnelheid, van elkander verwijderd. Daarbij moet men in 't oog houden, dat de lichtbundel in het dubbelbrekende lichaam niet loodrecht doorsneden wordt, daar hij toch wordt begrensd door lijnen, in de richting van den lichtstraal getrokken. Maakt die richting een hoek  $\gamma$  met de normaal op het grensvlak, dan leert een eenvoudige meetkundige beschouwing, dat

$$H_0 : H : H' = \sin \alpha \cos \alpha : \sin \alpha \cos \alpha : \sin \alpha' \frac{\cos \gamma}{\cos \beta}.$$

Daar verder de theorie van NEUMANN de dichtheden van den aether gelijk stelt wordt de boven aangegeven vergelijking

$$(b_0^2 - b^2) \sin \alpha \cos \alpha = b'^2 \sin \alpha' \frac{\cos \gamma}{\cos \beta} \dots \dots \dots (40)$$

Om  $\cos \gamma$  uit te drukken in de andere grootheden, die wij hebben ingevoerd, verbeelden wij ons uit het middelpunt  $M$  van een bol drie stralen  $MA$ ,  $MB$  en  $MC$  getrokken, resp. in de richting van de normaal op het grensvlak, de normaal der gebroken golven en den lichtstraal. Dan heeft men voor de zijden van den aldus gevormden bolvormigen driehoek

$$AB = \alpha', \quad BC = \pm \beta, \quad CA = \gamma.$$

Hier geldt het bovenste teeken, als  $\beta$  positief, het onderste als  $\beta$  negatief is (daar in den bolvormigen driehoek de absolute waarden der zijden in aanmerking komen). Uit een eenvoudige figuur 1) blijkt het verder, dat in het eerste geval de hoek  $B = 90^\circ - \omega'$ , in het tweede geval  $B = 90^\circ + \omega'$  is: In beide gevallen heeft men derhalve

$$\cos \gamma = \cos \alpha' \cos \beta + \sin \alpha' \sin \beta \sin \omega'$$

en hierdoor gaat (40) over in

$$(b_0^2 - b^2) \sin \alpha \cos \alpha = b'^2 (\sin \alpha' \cos \alpha' + \sin^2 \alpha' \sin \omega' \operatorname{tg} \beta) \dots (41)$$

Bij de theorie van NEUMANN hebben verder de aethertrillingen dezelfde richting, die bij onze beschouwingwijze aan de magnetiseerende kracht toekomt. Wij zullen nu bewijzen, dat, wanneer wij de componenten der magnetiseerende kracht vervangen door de verplaatsingen der aetherdeeltjes, onze formules dezelfde worden als die, welke bij NEUMANN's theorie voorkomen.

De vergelijkingen (29), (30) en (31), waarvan de beteekenis deze is, dat  $L$ ,  $M$ ,  $N$  doorlopend zijn, moeten dan natuurlijk overgaan in de drie eerste vergelijkingen van NEUMANN, die de continuïteit der verplaatsingen uitdrukken. In plaats van (32) mogen wij verder een of andere betrekking nemen, uit (29)—(32) afgeleid. Vermenigvuldigen wij daartoe (29) met (31), (30) met (32) en tellen de uitkomsten op, dan komt er

$$(1 - a^2) \sin^3 \alpha \cos \alpha = a^2 (\sin^3 \alpha' \cos \alpha' + \sin^4 \alpha' \sin \omega' \operatorname{tg} \beta).$$

Wordt de magnetiseerende kracht bij een der lichtbundels voor-

1) Bij het ontwerpen dezer figuur moet de gesteldheid van het gekozen assenstelsel (p. 59), benevens het omtrent het teeken van  $\beta$  (p. 106) en omtrent het azimuth (p. 114) gezegde, in aanmerking worden genomen.

gesteld door  $g \cos \psi$  dan bestaat blijkens de vergelijking (20) tusschen de amplitudines

$$g_0, g, g'$$

het verband

$$g_0 : g : g' = \sin \alpha : a \sin \alpha : a' \sin \alpha'$$

en hierdoor gaat bovenstaande vergelijking over in

$$(g_0^2 - g^2) \sin \alpha \cos \alpha = g'^2 (\sin \alpha' \cos \alpha' + \sin^2 \alpha' \sin \omega' \operatorname{tg} \beta).$$

Komen in de plaats van de componenten  $L, M, N$  de verplaatsingen der aetherdeeltjes, dan moeten hierin  $g_0, g$  en  $g'$  door  $b_0, b$  en  $b'$  vervangen worden, waardoor men juist tot (41) komt.

Hiermede is aangetoond, dat de magnetiseerende kracht in de eene theorie en de verplaatsing der aetherdeeltjes in de andere op dezelfde wijze wordt bepaald. Gemakkelijk kan men daaruit afleiden, dat men bij beide beschouwingswijzen tot dezelfde resultaten moet komen.

Nadat het ons aldus gebleken is, dat de hypothese van MAXWELL even goed van alle bij de kristallen waargenomen verschijnselen rekenschap kan geven als de theorie van NEUMANN, kan ons de keus tusschen beide niet moeilijk vallen. Want, zooals wij in het eerste hoofdstuk zagen, NEUMANN kon zijne resultaten alleen verkrijgen door de voorwaarden van het vraagstuk gedeeltelijk achterwege te laten. Daardoor missen zijne beschouwingen een vasten grondslag. Bij de nieuwe theorie zijn daarentegen steeds alle omstandigheden in aanmerking genomen, en hierom verdient zij ontegenzeggelijk de voorkeur boven die van NEUMANN.

## VIJFDE HOOFDSTUK.

### DE TOTALE REFLECTIE.

§ 1. In de vorige hoofdstukken werd stilzwijgend ondersteld, dat bij de terugkaatsing van het licht ook een gebroken straal ontstaat, een onderstelling, die niet altijd vervuld is, daar er totale terugkaatsing kan plaats hebben. Thans zullen wij de wijzigingen bespreken, die de verkregen resultaten in dit geval ondergaan.

Reeds FRESNEL 1) slaagde er in, uit zijne vergelijkingen voor de gedeeltelijke terugkaatsing uitdrukkingen af te leiden, die van alle eigenschappen van het totaal gereflecteerde licht rekenschap geven. Toch kan men niet zeggen, dat zijne behandeling van dit onderwerp niets te wenschen overlaat. Zooals men weet is het uitgangspunt zijner beschouwingen het optreden van imaginaire grootheden in de voor de amplitudo van het teruggekaatste licht gevonden uitdrukking. Te recht is FRESNEL van oordeel, dat, ondanks die imaginaire grootheden, de formules nog steeds de oplossing van het vraagstuk bevatten. Hij maakt vervolgens de gissing, dat een complexe uitdrukking voor de amplitudo gelijk staat met een bepaalde phaseverandering en werkelijk levert hem dit vergelijkingen op, die door de waarnemingen gestaafd worden. Waarom die gissing juist moet zijn wordt echter niet recht duidelijk, terwijl bovendien de theorie van FRESNEL in zoo verre een leemte vertoont,

---

1) FRESNEL, Oeuvres complètes, T. I, p. 781 en vlg.

dat zij niet weet aan te geven, op welke wijze bij de totale reflectie de lichtbeweging in het tweede medium indringt.

Dat werkelijk dat indringen plaats heeft was aan FRESNEL bekend en hij spreekt zelf de wenschelijkheid uit, om ook dit verschijnsel uit de theorie af te leiden en aldus een volkomen verklaring van de totale reflectie te leveren. Hij heeft zich dan ook reeds voorgesteld, de zaak aan een strenger onderzoek te onderwerpen, maar hiervan is in zijne *Oeuvres complètes* niets te vinden.

Later zijn echter de vergelijkingen voor de totale terugkaatsing langs veel meer bevredigenden weg afgeleid. Zoo vindt men b.v. bij EISENLOHR 1) formules, die het vraagstuk geheel oplossen, ook wat de beweging in de tweede middenstof betreft. Vreemd mag het daarom zeker heeten, dat men in de meeste — althans in de mij bekende — leerboeken nog steeds bij de theorie van FRESNEL blijft staan, ofschoon deze stellig door een betere kan vervangen worden.

§ 2. Zien wij vooreerst, wat er bij de totale terugkaatsing van het gereflecteerde en gebroken licht wordt. Wij bepalen ons daarbij tot isotrope middenstoffen, daar toch bij de kristallen dezelfde redeneeringen kunnen toegepast worden. Wij komen daarbij (ofschoon langs eenigszins verschillenden weg) tot dezelfde formules als EISENLOHR, met dit onderscheid intusschen, dat wij de begrippen en de notatie der electromagnetische theorie ten grondslag leggen.

Is vooreerst het invallende licht in het invalsvlak gepolariseerd, dan wordt bij de gewone terugkaatsing de geheele lichtbeweging bepaald door de in § 6 van het derde hoofdstuk voor  $\eta$ ,  $L$ ,  $N$  aangegeven waarden, waarbij, zooals wij toen vonden

$$a_1 = - \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

en

$$a_2 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} (1 + a_1) = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \cdot \frac{2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

is. Bovendien is  $p_1' = p_1'' = p_2$ ,  $\alpha_1'' = \alpha_1$  en  $\sin \alpha_2 = n \sin \alpha_1$ , wanneer wij den brekingsindex  $\frac{1}{n}$  noemen. Zoo lang aan de hier neergeschreven voorwaarden voldaan is, maken de waarden van  $\eta$ ,

1) Pogg. Ann. 104, p. 350 en 360.

$L$ ,  $N$  een juiste oplossing van de bewegingsvergelijkingen en de grensvoorwaarden uit. Dit zal ook nog het geval zijn, wanneer onze voorwaarden voor  $\alpha_2$  een onbestaanbare waarde geven, mits men bij alle herleidingen de in het algemeen voor complexe groot-heden geldige regels in het oog houdt. Daardoor verkrijgt men dan voor  $\eta$ ,  $L$  en  $N$  een stelsel complexe waarden, die echter nog steeds aan alle vergelijkingen van het vraagstuk voldoen.

Werkelijk wordt  $\alpha_2$  onbestaanbaar, wanneer  $n > 1$  is en de invalshoek den grenshoek overschrijdt. Dan toch wordt  $\sin \alpha_2 > 1$ , en dus  $\cos \alpha_2 = i \sqrt{n^2 \sin^2 \alpha_1 - 1}$ . Hierdoor worden de uitdrukkingen voor  $a_1$  en  $a_2$  complex; gemakkelijk vindt men

$$a_1 = \frac{1 + n^2 \cos 2 \alpha_1}{n^2 - 1} - i \cdot \frac{2 n \cos \alpha_1 \sqrt{n^2 \sin^2 \alpha_1 - 1}}{n^2 - 1}, \dots (1)$$

$$a_2 = 2 \frac{\cos^2 \alpha_1}{n^2 - 1} - i \cdot \frac{2 \cos \alpha_1 \sqrt{n^2 \sin^2 \alpha_1 - 1}}{n(n^2 - 1)}, \dots (2)$$

waarvoor wij korthedshalve schrijven

$$a_1 = b + c i, \quad a_2 = b' + c' i.$$

Voor het invallende licht blijft natuurlijk

$$\eta_1' = \cos \frac{2 \pi}{T} \left( t - \frac{x}{v_1} \cos \alpha_1 - \frac{z}{v_1} \sin \alpha_1 + p \right); \dots (3)$$

de uitdrukking voor het teruggekaatste licht wordt

$$\eta_1'' = (b + c i) \cos \frac{2 \pi}{T} \left( t + \frac{x}{v_1} \cos \alpha_1 - \frac{z}{v_1} \sin \alpha_1 + p \right), \dots (4)$$

en eindelijk die voor het gebroken licht

$$\eta_2 = (b' + c' i) \cos \frac{2 \pi}{T} \left( t - \frac{x}{v_2} \sqrt{n^2 \sin^2 \alpha_1 - 1} \cdot i - \frac{z}{v_1} \sin \alpha_1 + p \right).$$

Stelt men

$$\frac{2 \pi}{T} \left( t - \frac{z}{v_1} \sin \alpha_1 + p \right) = \chi \dots (5)$$

en

$$\frac{2 \pi}{T} \cdot \frac{1}{v_2} \sqrt{n^2 \sin^2 \alpha_1 - 1} = r, \dots (6)$$

dan geeft de laatste vergelijking

$$\eta_2 = \frac{1}{2} \{ b' (e^{r\chi} + e^{-r\chi}) \cos \chi - c' (e^{r\chi} - e^{-r\chi}) \sin \chi \} + \\ + i \cdot \frac{1}{4} \{ b' (e^{r\chi} - e^{-r\chi}) \sin \chi + c' (e^{r\chi} + e^{-r\chi}) \cos \chi \} \dots (7)$$



Bij (3), (4) en (7) behooren dan verder de volgende uitdrukkingen voor de magnetiseerende kracht

$$L_1' = 4 \pi A v_1 \sin \alpha_1 \cdot \eta_1', \quad N_1' = -4 \pi A v_1 \cos \alpha_1 \cdot \eta_1',$$

$$L_1'' = 4 \pi A v_1 \sin \alpha_1 \cdot \eta_1'', \quad N_1'' = 4 \pi A v_1 \cos \alpha_1 \cdot \eta_1'',$$

$$L_2 = n \cdot 4 \pi A v_2 \sin \alpha_1 \cdot \eta_2, \quad N_2 = -i \cdot 4 \pi A v_2 \sqrt{n^2 \sin^2 \alpha_1 - 1} \cdot \eta_2.$$

Hiermede is het stelsel complexe waarden, dat aan onze vergelijkingen voldoet, geheel aangegeven.

Nu zijn echter zoowel de bewegingsvergelijkingen als de grensvoorwaarden lineair ten opzichte van  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $N$ ,  $\varphi$  en hunne differentiaalquotienten, terwijl er geen term voorkomt, die niet een dezer functiën bevat. In dit geval is het bekend, dat, wanneer een stel complexe waarden aan de vergelijkingen voldoet, ook een juiste oplossing verkregen wordt, wanneer men overal alleen het reële of alleen het imaginaire gedeelte neemt. Doen wij dit, dan komen wij tot de twee volgende oplossingen

$$a. \eta_1' = \cos \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{x}{v_1} \cos \alpha_1 - \frac{z}{v_1} \sin \alpha_1 + p \right),$$

$$\eta_1'' = b \cos \frac{2\pi}{T} \left( t + \frac{x}{v_1} \cos \alpha_1 - \frac{z}{v_1} \sin \alpha_1 + p \right),$$

$$\eta_2 = \frac{1}{2} \left\{ b' (e^{rx} + e^{-rx}) \cos \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{z}{v_1} \sin \alpha_1 + p \right) - c' (e^{rx} - e^{-rx}) \sin \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{z}{v_1} \sin \alpha_1 + p \right) \right\},$$

$$b. \eta_1' = 0,$$

$$\eta_1'' = c \cos \frac{2\pi}{T} \left( t + \frac{x}{v_1} \cos \alpha_1 - \frac{z}{v_1} \sin \alpha_1 + p' \right),$$

$$\eta_2 = \frac{1}{2} \left\{ b' (e^{rx} - e^{-rx}) \sin \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{z}{v_1} \sin \alpha_1 + p' \right) + \right.$$

$$\left. + c' (e^{rx} + e^{-rx}) \cos \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{z}{v_1} \sin \alpha_1 + p' \right) \right\},$$

waarbij wij in het tweede stel  $p'$  in plaats van  $p$  hebben geschreven, daar hier  $p'$  elke willekeurige waarde mag hebben. De uitdrukkingen voor de magnetiseerende kracht zijn kortheidshalve achterwege gelaten, daar zij gemakkelijk aan de gegeven vormen zijn toe te voegen.

Men moet  $a$  en  $b$  als twee bijzondere oplossingen onzer vergelijkingen beschouwen en men kan daaruit, daar deze lineair zijn, op

bekende wijze zoovele oplossingen afleiden, als men wil. Is echter het invallende licht, dus  $\eta_1'$ , gegeven, dan mag men nog slechts in  $b$  alle grootheden met een willekeurige constante  $C$  vermenigvuldigen en ze vervolgens bij de overeenkomstige waarden van  $a$  optellen. Daar hierbij nog  $C$  en  $p'$  willekeurig zijn, ontstaat de vraag, hoe wij zullen beslissen, welke oplossing aan de werkelijkheid beantwoordt.

Daartoe is het niet genoeg, dat een stel waarden aan de bewegingsvergelijkingen voldoet, maar wij moeten overwegen, of de daardoor uitgedrukte bewegingstoestand wel ontstaan kan, wanneer eerst alleen in het eerste medium beweging bestond en van daar uit aan het tweede werd meêgedeeld. Ofschoon nu het onderzoek naar de wijze, waarop die mededeeling plaats heeft, zeer omslachtig is, kan men toch ééne zaak gerustelijk aannemen, dat er nl. geen bewegingstoestand kan ontstaan, waarbij in het tweede lichaam, bij toenemenden afstand van het grensvlak, de amplitudo der trillingen hoe langer hoe grooter wordt. Door dit in aanmerking te nemen komen wij tot een bijzondere oplossing der bewegingsvergelijkingen, die, zooals ons zal blijken, met de werkelijkheid overeenstemt. Immers, daar in de tweede middenstof  $x$  positief is, moeten alle termen die  $e^{rx}$  bevatten, verdwijnen. En dit is alleen mogelijk, wanneer  $C = 1$ ,  $p' = p - \frac{1}{4} T$  wordt gesteld. Hierdoor komt men tot het resultaat

$$\eta_1' = b \cos \frac{2\pi}{T} \left( t + \frac{x}{v_1} \cos \alpha_1 - \frac{z}{v_1} \sin \alpha_1 + p \right) + \\ + c \sin \frac{2\pi}{T} \left( t + \frac{x}{v_1} \cos \alpha_1 - \frac{z}{v_1} \sin \alpha_1 + p \right), \dots (8)$$

$$\eta_2 = b' e^{-rx} \cos \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{z}{v_1} \sin \alpha_1 + p \right) + \\ + c' e^{-rx} \sin \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{z}{v_1} \sin \alpha_1 + p \right) \dots \dots (9)$$

Men zou hierbij gemakkelijk de uitdrukkingen voor de magnetiseerende kracht kunnen voegen; men zou dan vinden, dat ook hierbij de termen met  $e^{rx}$  zijn weggevallen.

Van de beide formules (8) en (9) komt inderdaad de eerste, die het teruggekaatste licht bepaalt, overeen met de resultaten van FRESNEL. Verder wordt door de tweede aangegeven, hoe bij de totale reflectie de lichtbeweging in het tweede medium doordringt. Uit den factor  $e^{-rx}$  blijkt, dat hier de amplitudo bij verwijdering

van het grensvlak afneemt, en wel zeer snel. Immers men kan, als  $l$  de golflengte in het tweede medium is, volgens (6) schrijven

$$r x = 2 \pi \cdot \frac{x}{l} \sqrt{n^2 \sin^2 \alpha_1 - 1}.$$

Voor afstanden derhalve van het grensvlak, die zeer groot zijn ten opzichte van de golflengte, wordt ook  $r x$  zeer groot, dus  $e^{-r x}$  zeer klein, zoodat men daar de ingedrongen beweging niet zal kunnen bemerken. Wel is dit mogelijk, zoolang  $x$  slechts eenige malen de golflengte bevat.

§ 3. Op dezelfde wijze kan men te werk gaan, wanneer het invallende licht loodrecht op het invalsvlak gepolariseerd is. Daar wij in § 7 van het derde hoofdstuk vonden, dat er, ten gevolge van onze onderstelling omtrent  $s$ , geen longitudinale trillingen ontstaan, heeft men, evenals daar, slechts met de uitdrukkingen voor de transversale beweging te doen. Hier is voor het teruggekaatste licht

$$a_1 = \frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2)}{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2)},$$

wat voor de totale terugkaatsing wederom den vorm

$$a_1 = b + c i$$

aanneemt, waarbij thans

$$\text{en } \left. \begin{aligned} b &= \frac{\cos^2 \alpha_1 - n^2 (n^2 \sin^2 \alpha_1 - 1)}{\cos^2 \alpha_1 + n^2 (n^2 \sin^2 \alpha_1 - 1)} \\ c &= - \frac{2 n \cos \alpha_1 \sqrt{n^2 \sin^2 \alpha_1 - 1}}{\cos^2 \alpha_1 + n^2 (n^2 \sin^2 \alpha_1 - 1)} \end{aligned} \right\} \dots \dots (10)$$

is. Evenzoo wordt ook  $a_2$  onbestaanbaar en men vindt voor  $\xi, \zeta, M$  een stel complexe uitdrukkingen. Door van de verschillende oplossingen, die zich hieruit laten afleiden, die te kiezen, waarbij de amplitudo in het tweede medium niet voortdurend aangroeit bij toenemenden afstand van het grensvlak, verkrijgt men voor het teruggekaatste licht weer hetzelfde resultaat als FRESNEL en vindt men voor het tweede medium een dergelijke beweging als in de vorige §.

§ 4. Het onderzoek der totale reflectie heeft ons thans een bewegingstoestand leeren kennen, geheel verschillende van de golvende beweging, waarmeê wij gewoonlijk te doen hebben, en

gekenmerkt door de exponentieele grootheden, die in de uitdrukking er voor optreden. Het kan gebeuren, dat men bij eenig onderzoek verschillende van die trillingstoestanden te beschouwen heeft. Zoo kan b.v. de ingedrongen beweging teruggekaatst worden en men zal alsdan een gereflecteerde beweging van dezelfde soort hebben. Daarbij mag dan weer de beweging niet voortdurend sterker worden bij verwijdering van het terugkaatsende vlak, zoodat hier geen factor van den vorm  $e^{-rx}$  mag voorkomen.

Om op een geschikte wijze vraagstukken van de boven aangegeven soort te behandelen, is het wenschelijk de verschillende bewegingen, die wij hebben leeren kennen, onder denzelfden vorm te kunnen voorstellen. De leer der complexe grootheden geeft hiervoor het middel aan de hand.

Wij hebben tot nog toe een bijzondere oplossing der bewegingsvergelijkingen gebruikt, die onmiddellijk een bundel gepolariseerd licht voorstelt. Was b.v. het licht in het  $xz$ -vlak gepolariseerd, dan werd elke lichtbundel voorgesteld door uitdrukkingen van den vorm

$$\left. \begin{aligned} \eta &= a \cos \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{x}{v} \cos \alpha - \frac{z}{v} \sin \alpha + p \right), \\ L &= 4\pi A v \sin \alpha \cdot \eta, \quad N = -4\pi A v \cos \alpha \cdot \eta, \end{aligned} \right\} \dots (11)$$

waarbij  $\alpha$  voor invallend of gebroken licht scherp, voor een teruggekaatsten straal stomp is. In plaats van (11) nemen wij nu complexe uitdrukkingen, waarbij de goniometrische functie door een exponentieele vervangen is, en dat wel zoo, dat men, door alleen het reële gedeelte te nemen, juist (11) verkrijgt. Dit is het geval, wanneer men stelt

$$\left. \begin{aligned} [\eta] &= a e^{\pm i} \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{x}{v} \cos \alpha - \frac{z}{v} \sin \alpha + p \right), \\ [L] &= 4\pi A v \sin \alpha \cdot [\eta], \quad [N] = -4\pi A v \cos \alpha \cdot [\eta], \end{aligned} \right\} \dots (12)$$

waarbij het teeken van den exponent voorloopig willekeurig is. Men overtuigt zich gemakkelijk, dat werkelijk (12) even goed als (11) aan de bewegingsvergelijkingen voldoet. Men kan nu bij eenig vraagstuk vooreerst voor elken lichtbundel uitdrukkingen van den vorm (12) nemen, hierin alles zoo bepalen, dat aan de grensvoorwaarden voldaan is, en vervolgens overal alleen het reële gedeelte nemen, dat op zich zelf ook een juiste oplossing zal zijn. Wordt dan bij eenigen lichtbundel  $\cos \alpha$  imaginair, dan komt in dat reële

gedeelte een exponentieele grootheid voor. Bij een gebroken lichtbundel kan  $\cos \alpha$  den vorm  $k i$ , bij een teruggekaatsen den vorm  $-k i$  aannemen,  $k$  positief zijnde. In het eerste geval treedt de factor  $e^{\pm r x}$ , in het tweede  $e^{\mp r x}$  te voorschijn. Aan de conditie, dat de amplitudo bij verwijdering van het brekende of terugkaatsende vlak niet voortdurend mag toenemen, is derhalve zeker voldaan, wanneer men, zooals wij dit in 't vervolg zullen doen, in (12) het onderste teeken neemt.

Wij zullen in het vervolg de *symbolische* waarden (12), waaruit de werkelijke worden afgeleid door alleen het reële deel te nemen, door insluiting in haakjes van deze onderscheiden.

Het spreekt van zelf dat men, wanneer het licht in een ander dan het  $xz$ -vlak gepolariseerd is, evenzoo te werk kan gaan.

Wilde men, langs den hier aangewezen weg, de terugkaatsing behandelen van licht, dat in het invalsvlak gepolariseerd is, dan moest men het invallende, teruggekaatste en gebroken licht eerst voorstellen door de symbolische uitdrukkingen

$$[\eta_1'] = e - i \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{x}{v_1} \cos \alpha_1 - \frac{z}{v_1} \sin \alpha_1 + p \right),$$

$$[\eta_1''] = a_1 e - i \frac{2\pi}{T} \left( t + \frac{x}{v_1} \cos \alpha_1 - \frac{z}{v_1} \sin \alpha_1 + p \right),$$

$$[\eta_2] = a_2 e - i \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{x}{v_2} \cos \alpha_2 - \frac{z}{v_2} \sin \alpha_2 + p \right).$$

Uit de grensvoorwaarden vindt men dan, als vroeger,

$$a_1 = -\frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}, \quad a_2 = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \cdot \frac{2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}.$$

Ten slotte moest men dan alleen het bestaanbare gedeelte nemen. Daarbij moet dan onderscheiden worden, of de invalshoek kleiner of grooter dan de grenshoek is. In het eerste geval zijn  $\cos \alpha_2$ ,  $a_1$  en  $a_2$  bestaanbaar en men komt dan tot de resultaten van het derde hoofdstuk. In het tweede geval is  $\cos \alpha_2$  imaginair, dus  $a_1$  en  $a_2$  complex en door nu alleen het reële deel te nemen verkrijgt men de boven voor de totale reflectie gevonden formules.

Het gebruik der symbolische waarden stelt ons dus in staat, de gedeeltelijke en de totale terugkaatsing op dezelfde wijze te behandelen 1).

1) De methode, die wij hier leerden kennen, is steeds door CAUCHY bij vraagstukken omtrent trillende bewegingen gebezigd.

§ 5. Ik zou hierbij niet zoo lang hebben stil gestaan, indien zich niet bij de totale reflectie eenige omstandigheden voordeden, waarvan de bespreking niet van belang ontbloomt is. Terwijl namelijk door JAMIN en QUINCKE is aangetoond, dat de formules voor het totaal gereflecteerde licht door de waarnemingen worden bevestigd, is de juistheid der formules voor het ingedrongen licht nog niet met denzelfden graad van zekerheid bewezen. En ik acht dit te meer van belang, omdat men soms omtrent de verschijnselen, waarvan hier sprake is, andere begrippen koestert dan die, waarop de hier gegeven uiteenzetting steunt. De zaak is b.v. zoo opgevat, alsof het licht, na tot op een bepaalde diepte in het tweede medium te zijn doorgedrongen, uit het inwendige daarvan werd teruggekaatsd en men meende dan in die dubbele terugkaatsing de oorzaak te zien van de phaseverandering bij de totale reflectie. Dit strookt niet met de boven gegeven beschouwingen. Deze gelden voor het geval dat de twee lichamen scherp van elkander zijn gescheiden. Al neemt nu ook de tweede middenstof aan de beweging deel, dit geeft ons nog geen recht, van een terugkaatsing uit het binnenste daarvan te spreken, iets, dat men zich trouwens niet gemakkelijk zal kunnen voorstellen.

Een tweede omstandigheid, die een verificatie der verkregen formules wenschelijk maakt, is deze, dat niet elke theorie dezelfde beweging in het tweede medium vereischt. Immers, wanneer men uitgaat van de onderstelling, dat het licht in trillingen eener veerkrachtige stof bestaat, dan ontstaat vooreerst een beweging in de tweede middenstof, zooals wij die boven hebben gevonden, beantwoordende aan een golfstelsel met transversale trillingen bij de gewone terugkaatsing. Maar, wanneer de trillingsrichting in het invalsvlak ligt, zou daar nog een tweede dergelijke beweging bijkomen, afkomstig van de longitudinale trillingen, die men in de berekening heeft moeten opnemen. Het zou nu kunnen gebeuren, dat bij verschijnselen, waar de eerste beweging merkbaar wordt, ook de tweede een rol speelt. Het is daarom als een steun voor de electromagnetische theorie niet geheel zonder gewicht, wanneer wij aantoonen, dat zich de waarnemingen omtrent het ingedrongen licht geheel laten verklaren door de opgestelde vergelijkingen, waarbij — ten gevolge onzer onderstelling omtrent  $\varepsilon$  — is aangenomen, dat er geene longitudinale trillingen ontstaan.

§ 6. Om te bewijzen, dat bij de totale reflectie ook het tweede

medium aan de beweging deel neemt, is reeds door NEWTON de volgende proef genomen. Een glazen prisma *A* met een gelijkbeenigen rechthoekigen driehoek tot grondvlak en een tweede prisma *B*, van *A* alleen verschillende door dat het schuine zijvlak niet plat, maar een weinig bol is, worden met deze zijvlakken tegen elkander gedrukt. Men kan dan op bekende wijze een lichtbundel door het schuine zijvlak van *A* een inwendige terugkaatsing doen ondergaan onder een invalshoek, grooter dan de grenshoek. Is *B* niet aanwezig, dan is in dit geval de terugkaatsing totaal en neemt men geen gebroken straal waar. Is echter *B* tegen *A* aangedrukt, dan gebeurt er op de plaats, waar de beide glasstukken het naast bij elkander zijn, iets anders. Daar ontstaat wel een gebroken straal, die zich in *B* voortplant, terwijl de intensiteit van het gereflecteerde licht kleiner is geworden; het gevolg daarvan is, dat men op die plaats in het teruggekaatste licht een donkere, daarentegen in het doorgelaten licht een heldere vlek waarneemt. Uit deze proef volgt met zekerheid, dat de lichtbeweging in de dunne luchtlaag tusschen de beide prisma's doordringt.

Uitvoeriger is het beschreven verschijnsel beschouwd door QUINCKE. In een eerste reeks van onderzoekingen 1) stelde hij zich de vraag, hoe diep de beweging in het tweede medium kan indringen; de grootste diepte, tot op welke zij kan doorgaan, zou gegeven worden door den afstand der prisma's aan den rand der vlek. Volgens de hier gegeven theorie kan men eigenlijk niet spreken van de grootste diepte, tot op welke de beweging zich uitstrekt (daar zij, met afnemende amplitudo, tot op elken afstand doordringt); wel van de grootste diepte, op welke de amplitudo nog groot genoeg is om een gebroken straal op te leveren, die door ons oog kan worden waargenomen. Hierbij komt dus aan den eenen kant de gevoeligheid van het oog des waarnemers, aan den anderen kant de intensiteit van het invallende licht in aanmerking. In overeenstemming hiermede werd dan ook gevonden, dat de rand der centrale vlek steeds vloeiend uitloopt, en dat de middellijn ervan bij zonlicht veel grooter is dan bij kunstlicht.

Hebben dus de metingen van de bedoelde diepte geen absolute waarde voor de theorie, zij hebben wel degelijk een betrekkelijke

---

1) Pogg. Ann. 127, p. 1.

waarde, wanneer zij nl. aangeven, welken invloed verschillende omstandigheden er op hebben.

Hieromtrent vond QUINCKE het volgende:

a. De afstand, tot op welken het licht indringt, neemt met toenemenden invalshoek af.

b. Bij invalshoeken, die den grenshoek slechts weinig overschrijden, dringt het loodrecht op het invalsvlak gepolariseerde licht, bij grooteren invalshoek het in het invalsvlak gepolariseerde 't verst in het tweede medium door.

c. De bedoelde afstand neemt met de golflengte toe. Daaruit laat het zich verklaren, dat de donkere vlek in het gereflecteerde licht een violetten, daarentegen de lichte vlek in het doorgaande licht een rooden rand heeft.

d. Brengt men tusschen de twee prisma's een andere doorschijnende stof dan lucht, b.v. water of terpentijn, dan wordt de diepte, tot op welke het licht indringt, des te grooter, naarmate de brekingsindex meer nadert tot dien van het glas.

§ 7. Een theorie van het beschreven verschijnsel is reeds gegeven door STOKES 1). Daar hem intusschen geen nauwkeurige metingen ten dienste stonden kan het zijn nut hebben, de uitkomsten der theorie met de latere waarnemingen van QUINCKE te vergelijken.

De verklaring van de zaak is eenvoudig, nu wij gevonden hebben, dat bij de totale reflectie de lichtbeweging in het tweede medium doordringt. Wordt die ingedrongen beweging door een andere middenstof gestoord, dan zal zij tot een gebroken straal in de laatste aanleiding kunnen geven en tevens gedeeltelijk teruggekaatst worden. De teruggekaatste trillingen zullen weer in de eerste middenstof overgaan en daar de eigenschappen van het gereflecteerde licht wijzigen.

Zooals men ziet is de verklaring analoog met die der ringen van NEWTON bij gedeeltelijke reflectie en men zal dan ook hier, strikt genomen, de herhaalde terugkaatsingen aan de beide grensvlakken in rekening moeten brengen.

Verbeelden wij ons dan nu een dunne laag van een doorschijnende middenstof (b.v. lucht), aan weerszijden begrensd door dezelfde glassoort met den brekingsindex  $n (> 1)$  ten opzichte van de tusschenliggende stof. Zij de vergelijking van het eerste grensvlak

1) Cambridge Phil. Trans., vol. VIII, part 5, 1848.



$x = 0$ , die van het tweede  $x = d$ , zoodat  $d$  de dikte der laag is. Verder make een lichtstraal in het glas den hoek  $\alpha_1$ , in het andere medium den hoek  $\alpha_2$  met de normaal der grensvlakken, dan is

$$\sin \alpha_2 = n \sin \alpha_1,$$

welke vergelijking een onbestaanbare waarde voor den hoek  $\alpha_2$  kan opleveren.

Stellen wij de amplitudo van het invallende licht = 1, dan kunnen wij dit voorstellen door de symbolische uitdrukking

$$[q_0] = e^{-i} \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{x}{v_1} \cos \alpha_1 - \frac{z}{v_1} \sin \alpha_1 + p \right),$$

waarbij  $q_0$  de diëlectrische polarisatie voorstelt. Wij denken daarbij steeds aan een der twee gevallen, dat het licht in, of loodrecht op het invalsvlak gepolariseerd is; deze gevallen kunnen echter tegelijk behandeld worden. Is, wanneer de amplitudo van het invallende licht = 1 is, die van het teruggekaatste licht  $a$  en die van het gebroken licht  $m$  bij den overgang uit glas in het tusschenliggende medium, daarentegen  $a'$  en  $m'$  bij den overgang hieruit in glas, dan is blijkens de formules van het derde hoofdstuk

$$a = - \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

voor licht in het invalsvlak gepolariseerd en, voor een polarisatie loodrecht daarop,

$$a = \frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2)}{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2)}.$$

Voor beide gevallen is

$$a' = -a, \quad m m' = 1 - a^2 \quad \dots \quad (13)$$

De invallende beweging  $[q_0]$  wordt aan het eerste grensvlak ( $x = 0$ ) gesplitst in een teruggekaatste en doorgelaten beweging. Voor de eerste heeft men

$$[q_1] = a e^{-i} \frac{2\pi}{T} \left( t + \frac{x}{v_1} \cos \alpha_1 - \frac{z}{v_1} \sin \alpha_1 + p \right)$$

en voor de tweede

$$[r_1] = m e^{-i} \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{x}{v_2} \cos \alpha_2 - \frac{z}{v_2} \sin \alpha_2 + p \right).$$

De laatste beweging plant zich voort tot aan het tweede grens-

vlak ( $x = d$ ) en geeft daar aanleiding tot een doorgelaten beweging in het tweede glasstuk

$$[q_1'] = m m' e^{-i} \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{x}{v_1} \cos \alpha_1 - \frac{z}{v_1} \sin \alpha_1 + p' \right),$$

en tot een teruggekaatste beweging in de dunne laag

$$[r_1'] = a' m e^{-i} \frac{2\pi}{T} \left( t + \frac{x}{v_2} \cos \alpha_2 - \frac{z}{v_2} \sin \alpha_2 + p'' \right).$$

De grootheden  $p'$  en  $p''$  worden hierbij bepaald door de voorwaarde, dat aan het tweede grensvlak, dus voor  $x = d$ , de exponenten in  $[r_1]$ ,  $[q_1']$  en  $[r_1']$  dezelfde moeten zijn. Daaruit volgt

$$p' = p - \frac{d}{v_2} \cos \alpha_2 + \frac{d}{v_1} \cos \alpha_1$$

en

$$p'' = p - 2 \frac{d}{v_2} \cos \alpha_2.$$

Verder doet de beweging  $[r_1']$  aan het eerste grensvlak een doorgelaten beweging  $[q_2]$  in het eerste glasstuk en een teruggekaatste trillingstoestand  $[r_2]$  in de dunne laag ontstaan. Men heeft daarvoor

$$[q_2] = a' m m' e^{-i} \frac{2\pi}{T} \left( t + \frac{x}{v_1} \cos \alpha_1 - \frac{z}{v_1} \sin \alpha_1 + p'' \right)$$

en

$$[r_2] = a'^2 m e^{-i} \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{x}{v_2} \cos \alpha_2 - \frac{z}{v_2} \sin \alpha_2 + p'' \right).$$

Met de laatste beweging gebeurt weer hetzelfde als met  $[r_1]$ . Blijkens de waarde van  $p''$  is echter

$$[r_2] = a'^2 e^{2i\gamma} [r_1],$$

wanneer men

$$\gamma = \frac{2\pi}{T} \frac{d}{v_2} \cos \alpha_2$$

stelt. Hiervoor kan men ook schrijven, als  $l$  de golflengte in het tusschenliggende medium is,

$$\gamma = 2\pi \frac{d}{l} \cos \alpha_2 \dots \dots \dots (14)$$

Daar nu  $[r_2]$  alleen door een constanten factor  $a'^2 e^{2i\gamma}$  van  $[r_1]$

verschilt, zullen ook de symbolische uitdrukkingen voor de bewegingen, die uit  $[r_2]$  ontstaan, door vermenigvuldiging met dien factor uit de overeenkomstige, bij  $[r_1]$  behoorende groottheden kunnen afgeleid worden. De beweging  $[r_2]$  wordt derhalve aan het tweede grensvlak gesplitst in een doorgelaten beweging

$$[q_2'] = a'^2 e^{2i\gamma} [q_1']$$

en in teruggekaatste trillingen  $[r_2']$ , die, als zij door het eerste grensvlak worden gestoord, wederom twee trillingstoestanden opleveren, nl. in het eerste glasstuk

$$[q_3] = a'^2 e^{2i\gamma} [q_2]$$

en in de dunne laag

$$[r_3] = a'^2 e^{2i\gamma} [r_2] = a'^4 e^{4i\gamma} [r_1].$$

Ook met  $[r_3]$  moet weer evenals met  $[r_1]$  worden gehandeld en men verkrijgt daardoor de bewegingen

$$[q_3'] = a'^4 e^{4i\gamma} [q_1']$$

in het tweede glasstuk en

$$[q_4] = a'^4 e^{4i\gamma} [q_2]$$

in het eerste.

Aldus kan men voortgaan en de wet, waaraan de uitdrukkingen voor de verschillende trillingstoestanden onderworpen zijn, is na het bovenstaande duidelijk. Voor de totale teruggekaatste beweging in het eerste glasstuk heeft men nu

$$[Q] = [q_1] + [q_2] + [q_3] + [q_4] + \text{enz.},$$

of

$$[Q] = [q_1] + [q_2] (1 + a'^2 e^{2i\gamma} + a'^4 e^{4i\gamma} + \text{enz.}).$$

De hierin voorkomende reeks is een meetkundige, waarvan de som is

$$\frac{1}{1 - a'^2 e^{2i\gamma}}.$$

Stelt men verder

$$\frac{2\pi}{T} \left( t + \frac{x}{v_1} \cos \alpha_1 - \frac{z}{v_1} \sin \alpha_1 + p \right) = \psi,$$

dan is

$$[q_1] = a e^{-i\psi}$$

en

$$[q_2] = a' m m' e^{-i(\psi - \gamma)},$$

zoodat

$$[Q] = a e^{-i\psi} + \frac{a' m m' e^{-i(\psi - \gamma)}}{1 - a'^2 e^{2i\gamma}}$$

wordt, of, als men (13) in aanmerking neemt, na eenige herleiding

$$[Q] = a \frac{1 - e^{2i\gamma}}{1 - a'^2 e^{2i\gamma}} e^{-i\psi} \dots \dots \dots (\text{A})$$

Evenzoo heeft men voor de totale doorgelaten beweging in het tweede glasstuk

$$\begin{aligned} [Q] &= [q_1'] + [q_2'] + [q_3'] + \text{enz.} = \\ &= [q_1'] (1 + a'^2 e^{2i\gamma} + a'^4 e^{4i\gamma} + \text{enz.}) = \frac{[q_1']}{1 - a'^2 e^{2i\gamma}}. \end{aligned}$$

Nemen wij nu

$$\frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{x}{v_1} \cos \alpha_1 - \frac{z}{v_1} \sin \alpha_1 + \frac{d}{v_1} \cos \alpha_1 + p \right) = \psi',$$

dan is

$$[q_1'] = m m' e^{-i(\psi' - \gamma)} = (1 - a^2) e^{-i(\psi' - \gamma)},$$

zoodat wij voor het doorgelaten licht verkrijgen

$$[Q] = \frac{(1 - a^2) e^{i\gamma}}{1 - a^2 e^{2i\gamma}} e^{-i\psi'} \dots \dots \dots (\text{B})$$

Wij merken nog op, dat de grootheden  $\psi$  en  $\psi'$  steeds reëel zijn en niet afhangen van de ligging van het polarisatievlak in het invallende licht.

§ 8. Wil men uit de symbolische uitdrukkingen (A) en (B) tot de werkelijke lichtbeweging besluiten, dan moet alleen het bestaanbare gedeelte worden genomen. Is hierbij de invalshoek kleiner dan de grenshoek, dan zijn  $\cos \alpha_2$ ,  $a$  en  $\gamma$  bestaanbare grootheden. De exponentieele vormen  $e^{i\gamma}$  en  $e^{2i\gamma}$  leveren dan uitdrukkingen op, waarin  $\sin \gamma$  en  $\cos \gamma$  voorkomen en dien ten gevolge wordt de amplitudo van het teruggekaatste licht een periodieke functie van  $\gamma$ , dus van de dikte  $d$  der laag. Van daar dat, wanneer die dikte niet overal dezelfde is, in dit geval donkere en lichte interferentiestreepen worden waargenomen (de ringen van NEWTON), waarvan de verklaring geheel uit de formules (A) en (B) is af te leiden.

Geheel anders wordt de zaak, zoodra de invalshoek den grenshoek overschrijdt. Dan wordt  $\gamma$  imaginair, zoodat wij kunnen stellen

$$\gamma = i \gamma',$$

waarbij

$$\gamma' = 2\pi \frac{d}{l} \sqrt{n^2 \sin^2 \alpha_1 - 1} \dots \dots \dots (15)$$

is.

Verder neemt  $a$  den complexen vorm

$$a = b + c i \dots \dots \dots (16)$$

aan; de grootheden  $b$  en  $c$  zijn voor de twee hoofdgevallen in §§ 2 en 3 aangegeven. Voor het eerste geval is

$$b = \frac{1 + n^2 \cos 2\alpha_1}{n^2 - 1}, \quad c = -\frac{2n \cos \alpha_1 \sqrt{n^2 \sin^2 \alpha_1 - 1}}{n^2 - 1}, \quad (17)$$

voor het tweede

$$b = \frac{\cos^2 \alpha_1 - n^2 (n^2 \sin^2 \alpha_1 - 1)}{\cos^2 \alpha_1 + n^2 (n^2 \sin^2 \alpha_1 - 1)}, \quad c = -\frac{2n \cos \alpha_1 \sqrt{n^2 \sin^2 \alpha_1 - 1}}{\cos^2 \alpha_1 + n^2 (n^2 \sin^2 \alpha_1 - 1)}, \quad (18)$$

zoodat voor beide gevallen

$$b^2 + c^2 = 1 \dots \dots \dots (19)$$

is.

Stelt men nu in (A)

$$a \cdot \frac{1 - e^{2i\gamma}}{1 - a^2 e^{2i\gamma}} = B + C i$$

en in (B)

$$\frac{(1 - a^2) e^{i\gamma}}{1 - a^2 e^{2i\gamma}} = D + E i,$$

dan moet vooreerst de waarde van  $B$ ,  $C$ ,  $D$  en  $E$  nader beschouwd worden.

Men vindt door een gemakkelijke herleiding

$$\begin{aligned} B + C i &= (1 - e^{-2\gamma'}) \cdot \frac{a}{1 - a^2 e^{-2\gamma'}} = (e^{2\gamma'} - 1) \frac{a}{e^{2\gamma'} - a^2} = \\ &= (e^{2\gamma'} - 1) \cdot \frac{b + c i}{e^{2\gamma'} - (b + c i)^2} \end{aligned}$$

en daaruit, als men (19) in aanmerking neemt,

$$B = \frac{b(e^{2\gamma'} - 1)^2}{(e^{2\gamma'} - 1)^2 + 4c^2 e^{2\gamma'}}$$

$$C = \frac{c(e^{2\gamma'} + 1)(e^{2\gamma'} - 1)}{(e^{2\gamma'} - 1)^2 + 4c^2 e^{2\gamma'}}$$

Hieruit laat zich afleiden

$$B^2 + C^2 = \frac{(e^{2\gamma'} - 1)^2}{(e^{2\gamma'} - 1)^2 + 4c^2 e^{2\gamma'}} \dots \dots \dots (20)$$

Om de waarden van  $D$  en  $E$  te beoordeelen merken wij op, dat men heeft

$$1 - a^2 = 1 - (b + ci)^2 = 1 - b^2 + c^2 - 2bci = 2c^2 - 2bci = -2ci(b + ci) = -2ci \cdot a,$$

waaruit volgt

$$D + Ei = -2ci \frac{e^{-\gamma'}}{1 - e^{-2\gamma'}} (B + Ci) = 2c \cdot \frac{e^{\gamma'}}{e^{2\gamma'} - 1} (C - Bi).$$

Dit geeft ons

$$D = 2c \cdot \frac{e^{\gamma'}}{e^{2\gamma'} - 1} C, E = -2c \cdot \frac{e^{\gamma'}}{e^{2\gamma'} - 1} B,$$

dus

$$D^2 + E^2 = 4c^2 \frac{e^{2\gamma'}}{(e^{2\gamma'} - 1)^2} (B^2 + C^2),$$

of, volgens (20),

$$D^2 + E^2 = \frac{4c^2 e^{2\gamma'}}{(e^{2\gamma'} - 1)^2 + 4c^2 e^{2\gamma'}} \dots \dots \dots (21)$$

terwijl

$$\frac{E}{D} = -\frac{B}{C} \dots \dots \dots (22)$$

is.

De vormen (A) en (B) gaan nu over in

$$[Q] = (B + Ci)e^{-i\psi}, \quad [Q'] = (D + Ei)e^{-i\psi'}$$

en hieruit volgt voor de werkelijke beweging

$$Q = B \cos \psi + C \sin \psi, \quad Q' = D \cos \psi' + E \sin \psi',$$

of, in een geschikteren vorm,

$$Q = \sqrt{B^2 + C^2} \cos(\psi - \delta), \quad Q' = \sqrt{D^2 + E^2} \cos(\psi' - \delta'), \dots (23)$$

wanneer men

$$\left. \begin{aligned} \sin \delta &= \frac{C}{\sqrt{B^2 + C^2}}, & \cos \delta &= \frac{B}{\sqrt{B^2 + C^2}}, \\ \sin \delta' &= \frac{E}{\sqrt{D^2 + E^2}}, & \cos \delta' &= \frac{D}{\sqrt{D^2 + E^2}} \end{aligned} \right\} \dots (24)$$

stelt. Hieruit en uit (22) volgt nog, als men in aanmerking neemt, dat  $c$  negatief is en dus  $E$  en  $B$  dezelfde,  $D$  en  $C$  tegengestelde teekens hebben,

$$\delta' = \delta + \frac{1}{2} \pi \dots \dots \dots (25)$$

Door deze vergelijkingen wordt het teruggekaatste en doorgelaten licht bepaald voor het geval, dat het licht in of loodrecht op het invalsvlak is gepolariseerd. De grootheden  $\delta$  en  $\delta'$  geven de phase dezer lichtbundels aan, terwijl de amplitudines door  $\sqrt{B^2 + C^2}$  en  $\sqrt{D^2 + E^2}$  worden gegeven.

§ 9. Neemt men de intensiteit van het invallende licht als eenheid, dan wordt die van den teruggekaatsen of gebroken bundel door het vierkant der amplitudo gemeten. Daaruit volgt voor deze lichtstralen

$$J = B^2 + C^2, \quad J' = D^2 + E^2,$$

dus, blijkens (20) en (21),

$$J + J' = 1,$$

wat als een eerste bevestiging onzer uitkomsten kan aangemerkt worden.

Wij hebben dan verder slechts  $J$  te beschouwen, daar  $J' = 1 - J$  hieruit onmiddellijk kan worden gevonden. Uit de uitdrukking

$$J = \frac{(e^2 \gamma' - 1)^2}{(e^2 \gamma' - 1)^2 + 4 c^2 e^2 \gamma'}$$

blijkt vooreerst, dat  $J$  niet meer, zooals bij gedeeltelijke terugkaatsing, een periodieke functie van  $\gamma'$  of van de dikte der laag is. Van daar, dat bij de boven beschreven proef met de beide prisma's geen interferentiestreepen meer worden waargenomen

onder de invalshoeken der totale reflectie. Integendeel neemt  $J$  geleidelijk toe, wanneer  $d$ , en daardoor  $\gamma'$ , grooter wordt. Immers, stelt men kortheidshalve

$$e^2 \gamma' = q,$$

dan kan  $J$  in den volgenden vorm geschreven worden

$$J = \frac{1}{1 + 4e^2 \frac{q}{(q-1)^2}} \dots \dots \dots (26)$$

Differentieert men  $\frac{q}{(q-1)^2}$  naar  $q$ , dan komt er  $-\frac{q+1}{(q-1)^3}$ , wat steeds negatief is, daar  $\gamma$  positief en dus  $q > 1$  moet zijn.

Daaruit volgt, dat bij toeneming van  $d$ ,  $\gamma'$  en  $q \frac{q}{(q-1)^2}$  steeds af- en dus  $J$  toeneemt.

Wordt de dikte der laag en dus  $\gamma' = 0$ , dan wordt blijkens onze formule ook  $J = 0$ . Dit moest ook zoo zijn, want de twee glasstukken vormen dan één lichaam en in het binnenste daarvan heeft geene terugkaatsing plaats.

Kan daarentegen de dikte der laag ten opzichte van de golflengte als oneindig groot worden aangezien, dan is  $\gamma' = \infty$  en men vindt  $J = 1$ . Zijn derhalve de stukken glas zoo ver van elkander verwijderd, dan komt men tot het gewone geval der totale reflectie terug, zoodat dan het tweede glasstuk zonder invloed is.

Tusschen deze twee uitersten verandert de intensiteit langzamerhand van 0 tot 1. En hiermede is de verklaring der centrale vlek bij de proef van NEWTON gegeven.

Bij dezelfde dikte der luchtlaag en denzelfden invalshoek verkrijgt  $\gamma'$  niet voor alle lichtsoorten dezelfde waarde. Ziet men vooreerst van de dispersie af, dan blijft voor twee lichtstralen met verschillende golflengte  $c$  dezelfde, maar  $\gamma'$  en dus volgens het bovenstaande ook  $J'$  verkrijgen (blijkens (15)) een des te grootere waarde, naarmate de golflengte kleiner wordt. Bij dezelfde dikte wordt dus het violette licht het sterkst teruggekaatst, het roode het meest doorgelaten en daaruit laat zich de aan den rand der vlek waargenomen kleuring verklaren (zie § 6, c). De dispersie, die ook  $c$  doet veranderen met de golflengte, oefent hierbij een kleinen invloed uit; die verandering van  $c$  is echter zoo klein, dat die van  $\frac{q}{(q-1)^2}$  de overhand behoudt.



Tot betere beoordeeling van de hier gegeven theorie heb ik voor eenige gevallen de intensiteit van het teruggekaatste en doorgelaten licht berekend. Daarbij heb ik ondersteld, dat het licht in het invalsvlak gepolariseerd is en dat de afstand der glasstukken het vierde deel is der golflengte in lucht van de Fraunhofersche lijn *D*. Daarbij kwam ik tot de volgende uitkomsten:

*a.* Flintglas — lucht — flintglas.

Geel licht (streep *D*).

$$n = 1,6160, \quad \text{Grenshoek} = 38^{\circ}14', \quad \text{Invalshoek} = 45^{\circ}.$$

$$J = 0,611, \quad J' = 0,389.$$

*b.* In plaats van geel blauw licht (streep *F*).

$$n = 1,628, \quad \text{Grenshoek} = 37^{\circ}54', \quad \text{Invalshoek} = 45^{\circ}.$$

$$J = 0,731, \quad J' = 0,269.$$

De vergelijking van deze beide resultaten bevestigt het boven omtrent den invloed der golflengte gezegde.

*c.* Alles als bij *a*, maar de invalshoek =  $70^{\circ}$ .

$$J = 0,933, \quad J' = 0,067.$$

In overeenstemming hiermede is de opgave van QUINCKE, dat de middellijn der vlek kleiner wordt bij grooteren invalshoek (§ 6, *a*).

*d.* Flintglas — terpentijn — flintglas.

Geel licht (*D*).

$$n = 1,0911, \quad \text{Grenshoek} = 66^{\circ}25', \quad \text{Invalshoek} = 70^{\circ}.$$

$$J = 0,279, \quad J' = 0,721.$$

Vergelijkt men *c* met *d*, dan ziet men hierin een bevestiging van hetgeen QUINCKE omtrent den invloed der tusschenliggende stof opgeeft (§ 6, *d*).

Dat eindelijk ook het in § 6, *b* gezegde met de theorie in overeenstemming is blijkt van zelve uit de volgende §§.

§ 10. De amplitudo en phase van het teruggekaatste of doorgelaten licht zijn niet dezelfde voor de beide hoofdgevallen, die wij, wat de polarisatie van het licht betreft, hebben onderscheiden. Duiden wij door de indices *p* en *s* aan, of het licht in, of loodrecht op het invalsvlak gepolariseerd is, dan zijn in het eerste geval de amplitudines

$$\sqrt{B_p^2 + C_p^2} \quad \text{en} \quad \sqrt{D_p^2 + E_p^2},$$

en de grootheden, die de phase bepalen,

$$\delta_p \quad \text{en} \quad \delta'_p.$$

In het tweede geval komt in plaats hiervan

$$\sqrt{B_s^2 + C_s^2} \quad \text{en} \quad \sqrt{D_s^2 + E_s^2}, \quad \delta_s \quad \text{en} \quad \delta_s'.$$

Het gevolg van de genoemde omstandigheid is dat, bij een willekeurige lineaire polarisatie van het invallende licht, de teruggekaatste en gebroken stralen elliptisch gepolariseerd zijn. Men kan bij het teruggekaatste licht door den compensator van BABINET de verhouding der amplitudines

$$k = \sqrt{\frac{B_s^2 + C_s^2}{B_p^2 + C_p^2}}$$

en het phaseverschil

$$\delta_s - \delta_p$$

meten. Evenzoo bij het gebroken licht de grootheden

$$k' = \sqrt{\frac{D_s^2 + E_s^2}{D_p^2 + E_p^2}} \quad \text{en} \quad \delta_s' - \delta_p'.$$

Werkelijk heeft QUINCKE 1) voor een aantal gevallen deze metingen verricht. Het phaseverschil  $\Delta$  gaf hij daarbij in kwart golf lengten aan, zoodat

$$\Delta = \frac{2}{\pi} (\delta_s - \delta_p), \quad \Delta' = \frac{2}{\pi} (\delta_s' - \delta_p')$$

is.

Uit de vergelijkingen van § 8 laten zich formules ter bepaling van  $k$ ,  $k'$ ,  $\Delta$  en  $\Delta'$  afleiden.

Wat het doorgelaten licht betreft heeft men, blijkens de formule (21), daar voor de beide hoofdgevallen  $\gamma'$  dezelfde waarde heeft,

$$\begin{aligned} k'^2 &= \frac{D_s^2 + E_s^2}{D_p^2 + E_p^2} = \frac{4 c_s^2 e^{2\gamma'}}{(e^{2\gamma'} - 1)^2 + 4 c_s^2 e^{2\gamma'}} : \frac{4 c_p^2 e^{2\gamma'}}{(e^{2\gamma'} - 1)^2 + 4 c_p^2 e^{2\gamma'}} = \\ &= \frac{1 + 4 c_p^2 \frac{q}{(q-1)^2}}{\frac{c_p^2}{c_s^2} + 4 c_p^2 \frac{q}{(q-1)^2}}. \end{aligned}$$

Hierbij is, evenals boven

$$q = e^{2\gamma'}$$

gesteld. De grootheid  $\gamma'$  is door (15) bepaald, waarvoor men ook, als  $G$  de grenshoek is, kan schrijven

1) Pogg. Ann. 127, p. 199.

$$\gamma' = 2 \pi n \frac{d}{l} \sqrt{\sin(\alpha_1 + G) \sin(\alpha_1 - G)}.$$

Hieruit volgt nog

$$\log q = 4 \pi n \frac{d}{l} \cdot \log e \cdot \sqrt{\sin(\alpha_1 + G) \sin(\alpha_1 - G)}.$$

Stelt men derhalve

$$4 \pi n \frac{d}{l} \log e = s,$$

welke grootheid nu niet meer van den invalshoek afhangt, dan heeft men ter berekening van  $q$  de vergelijking

$$\log q = s \sqrt{\sin(\alpha_1 + G) \sin(\alpha_1 - G)}.$$

Verder kunnen de in § 8 voor  $c_p$  en  $c_s$  aangegeven waarden in een meer geschikten vorm worden geschreven, wanneer men, behalve  $G$ , nog een tweeden hulphoek  $H$  invoert, die gegeven wordt door de betrekking

$$\cot H = n.$$

( $H$  is dus de polarisatiehoek bij den overgang uit het glas in de tusschenliggende stof).

Men vindt dan gemakkelijk

$$c_p = -2 \frac{n^2}{n^2 - 1} \cos \alpha_1 \sqrt{\sin(\alpha_1 + G) \sin(\alpha_1 - G)},$$

$$c_s = c_p \frac{\sin^2 H}{\sin(\alpha_1 + H) \sin(\alpha_1 - H)}.$$

Brengt men deze waarden in de voor  $k'^2$  gevonden uitdrukking over en stelt daarbij

$$\tau = 16 \left( \frac{n^2}{n^2 - 1} \right)^2 \frac{q}{(q - 1)^2},$$

dan verkrijgt men

$$k'^2 = \frac{1 + \tau \cos^2 \alpha_1 \sin(\alpha_1 + G) \sin(\alpha_1 - G)}{\left[ \frac{\sin(\alpha_1 + H) \sin(\alpha_1 - H)}{\sin^2 H} \right]^2 + \tau \cos^2 \alpha_1 \sin(\alpha_1 + G) \sin(\alpha_1 - G)} \quad (27)$$

Voor het phaseverschil in het doorgelaten licht volgt uit de vergelijkingen (24)

$$\sin \frac{1}{2} \pi \Delta' = \sin(\delta_s' - \delta_p') = \frac{E_s D_p - E_p D_s}{\sqrt{(D_p^2 + E_p^2)(D_s^2 + E_s^2)}} = k' \frac{E_s D_p - E_p D_s}{D_s^2 + E_s^2}.$$

Brengt men hierin de waarden van  $D$  en  $E$  uit § 8 over, dan komt er na eenige herleiding

$$\sin \frac{1}{2} \pi \Delta' = k' \frac{q+1}{q-1} \cdot \frac{c_p}{c_s} \cdot \frac{b_p c_s - b_s c_p}{1 + 4 c_p^2 \frac{q}{(q-1)^2}}.$$

Nu volgt uit de in die § opgegeven waarden van  $b$  en  $c$

$$\begin{aligned} b_p c_s - b_s c_p &= - \frac{2 n \cos \alpha_1 \sqrt{n^2 \sin^2 \alpha_1 - 1}}{(n^2 - 1) \{ \cos^2 \alpha_1 + n^2 (n^2 \sin^2 \alpha_1 - 1) \}} \times \\ &\times \{ 1 + n^2 \cos 2 \alpha_1 - \cos^2 \alpha_1 + n^2 (n^2 \sin^2 \alpha_1 - 1) \} = \\ &= - \frac{2 n (n^2 - 1) \sin^2 \alpha_1 \cos \alpha_1 \sqrt{n^2 \sin^2 \alpha_1 - 1}}{\cos^2 \alpha_1 + n^2 (n^2 \sin^2 \alpha_1 - 1)} = \\ &= - 2 n \sin^2 \alpha_1 \cos \alpha_1 \sqrt{n^2 \sin^2 \alpha_1 - 1} \cdot \frac{c_s}{c_p} \end{aligned}$$

en door dit en de waarde van  $c_p$  in de uitdrukking voor het phaseverschil te substitueeren verkrijgt men

$$\sin \frac{1}{2} \pi \Delta' = - 2 n^2 \sin^2 \alpha_1 \cdot k' \frac{q+1}{q-1} \cdot \frac{\cos \alpha_1 \sqrt{\sin(\alpha_1 + G) \sin(\alpha_1 - G)}}{1 + \tau \cos^2 \alpha_1 \sin(\alpha_1 + G) \sin(\alpha_1 - G)}. \quad (28)$$

Onderzoekt men het licht, dat door den uitersten rand der centrale vlek gegaan is, dan zal men zonder groote fout voor  $k'$  de waarde mogen nemen, waartoe die grootheid nadert bij voortdurende toeneming van den afstand der twee glasstukken. Wordt echter  $\gamma' = \infty$ , dan wordt  $\tau = 0$ , zoodat men voor den rand heeft

$$k' = \frac{\sin^2 H}{\sin(\alpha_1 + H) \sin(\alpha_1 - H)} \dots \dots \dots (29)$$

Voor het teruggekaatste licht zal ik alleen een formule voor  $k$  aangeven. Uit de vergelijkingen van § 8 volgt

$$k = \sqrt{\frac{B_s^2 + C_s^2}{B_p^2 + C_p^2}} = \frac{c_p}{c_s} \sqrt{\frac{D_s^2 + E_s^2}{D_p^2 + E_p^2}},$$

of

$$k = \frac{\sin(\alpha_1 + H) \sin(\alpha_1 - H)}{\sin^2 H} k', \dots \dots (30)$$

waarbij  $k'$  de waarde is, die voor het bij dezelfde dikte doorgelaten licht geldt.

§ 11. QUINCKE heeft vooreerst uit zijne waarnemingen afgeleid, dat de grootheden  $\Delta$  en  $\Delta'$ , die het phaseverschil aangeven bij het teruggekaatste en het doorgelaten licht, 2, dus een halve golflengte, verschillen.

Dit blijkt b.v. uit de volgende opgaven:

Tabel XI c van QUINCKE.

Flintglas-lucht.

$$n = 1,6160, \quad G = 38^{\circ}14'.$$

(Licht, dat door een dunne luchtlaag doorgelaten of teruggekaast is.)

$\alpha_1$	$\Delta'$	$\Delta$	$\alpha_1$	$\Delta'$	$\Delta$
38°50'	-0,237	-2,237	45°	-0,452	-2,408
39 27	-0,270	-2,241	48 5'	-0,535	-2,529
40 3	-0,309	-2,288	51 10	-0,499	-2,516
41 55	-0,364	-2,362	57 13	-0,481	-2,488
43 8	-0,393	-2,393	63 1	-0,418	-2,379

De theorie heeft ons de vergelijking (25) opgeleverd; wij hebben dus

$$\delta_p' = \delta_p + \frac{1}{2} \pi, \quad \delta_s' = \delta_s + \frac{1}{2} \pi$$

en hieruit volgt

$$\delta_s - \delta_p = \delta_s' - \delta_p',$$

derhalve

$$\Delta = \Delta'.$$

Dat QUINCKE  $\Delta$  en  $\Delta'$  niet gelijk vindt, maar juist een halve golflengte van elkander verschillende, is alleen te wijten aan de door hem bij het aangeven van het phaseverschil bij het teruggekaatste licht gevolgde handelwijze. Wanneer wij het phaseverschil 0 noemen, is het bij hem een halve golflengte. Dit in aanmerking nemende ziet men, dat dit resultaat van de theorie door de waarneming wordt bevestigd.

Stelt men zich voor, dat de dikte der luchtlaag voortdurend toe-

neemt, dan zal  $\Delta'$  naderen tot de waarde, die men bij het licht waarneemt, dat door den uitersten rand der centrale vlek gegaan is;  $\Delta$  daarentegen wordt het phaseverschil voor het gewone, totaal gereflecteerde licht. Beide waarden moeten dus gelijk zijn of, bij QUINCKE, 2 verschillen. Dit werd inderdaad bevestigd. Bij flintglas en lucht b.v. werd in de genoemde gevallen voor  $\Delta$  en  $\Delta'$  gevonden :

Tabel XI b.

$\alpha_1$	$\Delta$	$\Delta'$	$\alpha_1$	$\Delta$	$\Delta'$
38°50'	-2,248	-0,149	46°52'	-2,610	-0,602
39 27	-2,334	-0,328	47 28	-2,624	-0,617
40 3	-2,425	-0,402	48 5	-2,625	-0,630
40 40	-2,442	-0,399	48 42	-2,606	-0,579
41 18	-2,484	-0,469	51 10	-2,588	-0,635
41 55	-2,528	-0,521	57 13	-2,519	-0,562
43 8	-2,549	-0,558	63 1	-2,446	-0,463
45	-2,588	-0,594			

De theorie geeft derhalve het juiste verband aan, dat er bestaat tusschen  $\Delta'$  bij het licht, dat door den rand der vlek gegaan is, en  $\Delta$  bij de gewone totale terugkaatsing. Het is echter bewezen, dat in het laatste geval de waarnemingen met de theorie overeenstemmen; derhalve moet dit ook in het eerste geval, wat  $\Delta'$  betreft, zoo zijn, zoodat wij ons met die grootheid voor den rand der vlek niet verder behoeven bezig te houden.

In een aantal gevallen heeft QUINCKE  $k'$  gemeten voor licht, dat door den rand, en tevens  $k'$  en  $\Delta'$  voor licht, dat door het midden der centrale vlek gegaan is. Ik heb uit de formules der vorige § die grootheden voor eenige gevallen berekend. Voor het midden der vlek is daarbij eerst uit de waarde, die  $k'$  voor den eersten invalshoek heeft,  $\log s$  berekend en daarmee vervolgens de andere gezochte grootheden.

Aldus kwam ik tot de volgende resultaten.

## XI a.

Flintglas-lucht.

$$n = 1,6160; \quad G = 38^{\circ}14'; \quad H = 31^{\circ}45'.$$

$$\log s = 0, 59051.$$

$\alpha_1$	Midden				Rand	
	$k'$		$\Delta'$		$k'$	
	waargen.	ber.	waargen.	ber.	waargen.	ber.
40° 3'	1,589	1,589	-0,399	-0,381	2,049	2,019
41 18	1,507	1,499	-0,394	-0,433	1,817	1,745
43 8	1,378	1,352	-0,470	-0,492	1,557	1,453
46 52	1,120	1,075	-0,526	-0,556	1,132	1,083
51 10	0,883	0,846	-0,596	-0,566	0,889	0,839
63 1	0,562	0,538	-0,463	-0,447	0,581	0,535

## XII a.

Flintglas-water.

$$n = 1,2096; \quad G = 55^{\circ}46'; \quad H = 39^{\circ}35'.$$

$$\log s = 0,00930.$$

$\alpha_1$	Midden				Rand	
	$k'$		$\Delta'$		$k'$	
	waargen.	ber.	waargen.	ber.	waargen.	ber.
56° 2'	1,027	1,027	-0,063	-0,063	1,358	1,441
57 13	1,023	1,025	-0,065	-0,067	1,359	1,350
63 1	1,013	1,007	-0,106	-0,091	1,031	1,046

## XIV a.

Kroonglas-lucht.

$$n = 1,5149; \quad G = 41^{\circ}19'; \quad H = 33^{\circ}26'.$$

$$\log s = 9,52214.$$

$\alpha_1$	Midden				Rand	
	$k'$		$\Delta'$		$k'$	
	waargen.	ber.	waargen.	ber.	waargen.	ber.
42°22'	1,008	1,008	-0,047	-0,054	2,000	2,016
43 41	0,993	1,007	-0,047	-0,058	1,663	1,750
45	1,216	1,007	-0,270	-0,062	1,394	1,545
49 37	1,031	1,002	-0	-0,072	1,077	1,097
58 3	0,963	0,983	-0,025	-0,118	0,738	0,729
70 6	0,941	0,895	-0,117	-0,199	0,552	0,523

De waarnemingen voor het midden der vlek schijnen mij hier vrij groote fouten te vertoonen. QUINCKE geeft dan ook aan, dat deze metingen werden verricht ongeveer een jaar na het samenstellen der prisma's. In dien tijd kan echter de oppervlakte van het glas aanmerkelijk zijn gewijzigd.

## XIII a.

Flintglas-terpentijn.

$$n = 1,0911; \quad G = 66^{\circ}25'; \quad H = 42^{\circ}30'.$$

$\alpha_1$	Rand	
	$k'$	
	waargen.	ber.
66°49'	1,115	1,175
68 26	1,080	1,118
69 28	1,037	1,085



## XV a.

Kroonglas-water.

$$n = 1,1339; \quad G = 61^{\circ}52'; \quad H = 41^{\circ}25'.$$

$\alpha_1$	Rand	
	$k'$	
	waargen.	ber.
62°26'	1,220	1,257
64 26	1,137	1,164
71 13	0,957	0,954

QUINCKE heeft eindelijk bij de twee flintglasprisma's, naast het licht, dat door een dunne luchtlaag gegaan is, ook het op 't zelfde punt teruggekaatste licht onderzocht. Daar wij reeds boven over het phaseverschil hebben gesproken heb ik alleen voor een paar invalshoeken  $k'$ ,  $\Delta'$  en  $k$  berekend.

## XI c.

Flintglas-lucht.

 $n$ ,  $G$  en  $H$  als bij XI a.

$\alpha_1$	Doorgelaten				Teruggekaast	
	$k'$		$\Delta'$		$k$	
	waargen.	ber.	waargen.	ber.	waargen.	ber.
38°50'	1,437	1,389	-0,237	-0,300	0,583	0,583
51 10	0,937	0,866	-0,499	-0,523	0,960	1,032

Hierbij was eerst uit de waarde van  $k$  voor den eersten invalshoek de dikte der laag berekend en daarbij gevonden

$$\log \left( 4 \pi \frac{d}{l} \right) = 0,56288.$$

Over het algemeen vertoonen, naar 't mij voorkomt, de berekende

waarden een bevredigende overeenstemming met de metingen van QUINCKE. Ziet men van XIV *a* af, dan bestaat steeds bij beide, wat het grooter en kleiner worden betreft, dezelfde gang. Wel zijn de afwijkingen iets grooter dan die, welke bij QUINCKE's bepalingen omtrent het gewone, totaal gereflecteerde licht bestaan, maar het komt mij voor, dat die omstandigheid in de mindere nauwkeurigheid haar oorsprong vindt, waarvoor de hier besproken proeven vatbaar zijn.

## ZESDE HOOFDSTUK.

---

### DE OPTISCHE EIGENSCHAPPEN DER METALEN.

§ 1. Dat de metalen zich geheel anders dan de doorschijnende stoffen tegenover het licht gedragen bleek vooral, toen men de wijze, waarop zij dit terugkaatsen, aan een nauwgezet onderzoek onderwierp. Ik zal de verschijnselen, die zich daarbij voordoen, hier bekend onderstellen en dus niet in een uitvoerige beschouwing treden van de hieromtrent door verschillende onderzoekers genomen proeven. Het aantal waarnemingen is hier aanzienlijk en ook de theorie liet zich niet lang wachten. Weldra gaven NEUMANN en CAUCHY vergelijkingen, waaruit de waargenomen verschijnselen konden afgeleid worden. Beiden deelden hunne formules zonder bewijs mede; wat die van CAUCHY betreft is echter deze leemte later door anderen, nl. door BEER en EISENLOHR aangevuld. Door deze natuurkundigen werd bewezen, dat men tot de formules van CAUCHY kan geraken door in rekening te brengen, dat zich een lichtbundel in een metaal slechts met voortdurend kleiner wordende amplitudo kan voortplanten. Aldus werden de verschijnselen der terugkaatsing in rechtstreeksch verband gebracht met het voornaamste optische kenmerk der metalen, de ondoorschijnendheid.

Wij zullen ons hier met het onderzoek hebben bezig te houden, of de hypothese van MAXWELL omtrent den aard van het licht op behoorlijke wijze van de bij metalen waargenomen verschijnselen rekenschap kan geven. Het groote verschil tusschen de metalen en de vroeger onderzochte stoffen vloeit bij deze onderstelling uit hun

geleidingsvermogen voort. Wij beginnen derhalve nogmaals met de bewegingsvergelijkingen der electriciteit op te stellen, thans voor een homogeen, isotroop, geleidend lichaam. Daarbij nemen wij voorloopig de geldigheid der wet van OHM aan, terwijl wij bovendien onderstellen, dat ook hier nog diëlectrische polarisatie bestaat. Om echter niet reeds nu den schijn aan te nemen, dat de laatste onderstelling onvoorwaardelijk noodig is, zullen wij in de vergelijkingen (I) — (V) van het tweede hoofdstuk in de plaats van  $\xi, \eta, \zeta$  de componenten  $u, v, w$  van den geleidingsstroom invoeren, zoodat wij

$$\xi = \varepsilon x u, \quad \eta = \varepsilon x v, \quad \zeta = \varepsilon x w$$

stellen. Tevens vervangen wij weder  $\lambda, \mu, \nu$  door  $\theta L, \theta M, \theta N$ , waarbij  $L, M, N$  de componenten der magnetiseerende kracht zijn. Onze vergelijkingen nemen dan den volgende vorm aan

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} &= \frac{1 + 4\pi\theta}{x} A \frac{\partial L}{\partial t}, \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{1 + 4\pi\theta}{x} A \frac{\partial M}{\partial t}, \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1 + 4\pi\theta}{x} A \frac{\partial N}{\partial t}, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (I)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{x} \Delta \varphi + \frac{A^2}{x} k \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \dots \dots \dots (II)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} &= A \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} - 4\pi\varepsilon x \frac{\partial u}{\partial t} - 4\pi u \right], \\ \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} &= A \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t} - 4\pi\varepsilon x \frac{\partial v}{\partial t} - 4\pi v \right], \\ \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} &= A \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial t} - 4\pi\varepsilon x \frac{\partial w}{\partial t} - 4\pi w \right], \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (III)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = -\Delta \chi.$$

Hierbij moeten nog de vergelijkingen (18) en (40) van het tweede hoofdstuk gevoegd worden. Bij de eerste moeten wij opmerken, dat  $u, v, w$  daar de totale stroomcomponenten aanwijzen. Wij hebben hier aan die grootheden de beteekenis gegeven, dat zij alleen den geleidingsstroom voorstellen; de componenten van den geheelen stroom zijn dan

$$u + \varepsilon x \frac{\partial u}{\partial t}, \quad v + \varepsilon x \frac{\partial v}{\partial t}, \quad w + \varepsilon x \frac{\partial w}{\partial t}$$

en hierdoor wordt (18)

$$P + \varepsilon x \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} (\Delta \varphi), \quad \dots \dots \dots \text{(IV)}$$

waarbij

$$P = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

is gesteld.

Voor (40) schrijven wij hier

$$\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{1}{4\pi\theta} \Delta \chi.$$

Door vervolgens  $\chi$  te elimineeren komt er

$$\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = 0 \quad \dots \dots \dots \text{(V)}$$

en  $\chi$  kan nu verder buiten beschouwing gelaten worden, terwijl wij in (I)–(V) onze bewegingsvergelijkingen hebben.

§ 2. Om vooreerst te onderzoeken, op welke wijze zich in den geleider transversale electriche trillingen met een plat vlak tot golf-front kunnen voortplanten, gaan wij uit van de symbolische uitdrukkingen

$$\left. \begin{aligned} [u] &= [w] = 0, \\ [v] &= a e^{-i \frac{2\pi}{T} (t - xR + y)}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \text{(1)}$$

Zooals men ziet is, bij de keus van dezen vorm der bijzondere oplossing, aangenomen, dat de voortplantingsrichting met de  $x$ -, de trillingsrichting met de  $y$ -as samenvalt. Uit (1) volgt vooreerst  $P=0$ . Dan geeft (IV)  $\varphi=0$  en hiermede is ook aan (II) voldaan. Verder vindt men uit (I)

$$[L] = 0, \quad [M] = 0,$$

$$[N] = -\frac{xR}{A(1 + 4\pi\theta)} a e^{-i \frac{2\pi}{T} (t - xR + y)}.$$

Aan (V) en aan de eerste en derde der vergelijkingen (III) is door de aangegeven waarden reeds voldaan; de tweede daarentegen geeft de voorwaarde

$$R^2 = 4\pi\varepsilon A^2(1 + 4\pi\theta) + i \frac{2T}{x} A^2(1 + 4\pi\theta) \dots \dots \text{(2)}$$

In twee opzichten verschilt dit resultaat van hetgeen wij vroeger bij isoleerende lichamen vonden. Vooreerst wordt  $R^2$  onbestaanbaar en in de tweede plaats afhankelijk van den oscillatietijd. Hetzelfde is ook met  $R$  het geval, zoodat men

$$R = q + r i \dots \dots \dots (3)$$

mag stellen, waarbij  $q$  en  $r$  uit de constanten van het medium en uit den trillingstijd kunnen worden afgeleid.

Neemt men deze waarde van  $R$  in aanmerking, dan kan voor  $[v]$  en  $[N]$  geschreven worden

$$[v] = a e^{-\frac{2\pi}{T} r x - i \frac{2\pi}{T} (t - q x + p)},$$

$$[N] = -(q + r i) \frac{x}{A(1 + 4\pi\theta)} a e^{-\frac{2\pi}{T} r x - i \frac{2\pi}{T} (t - q x + p)}$$

en neemt men hiervan alleen het reële gedeelte, dan wordt de uitdrukking voor de werkelijke beweging

$$v = a e^{-\frac{2\pi}{T} r x} \cos \frac{2\pi}{T} (t - q x + p),$$

$$N = -a e^{-\frac{2\pi}{T} r x} \frac{x}{A(1 + 4\pi\theta)} \left[ q \cos \frac{2\pi}{T} (t - q x + p) + r \sin \frac{2\pi}{T} (t - q x + p) \right].$$

§ 3. Uit deze uitdrukkingen blijkt, dat bij de voortplanting der trillingen in het metaal de amplitudo in de voortplantingsrichting hoe langer hoe kleiner wordt, dat er dus absorptie plaats heeft. Dit had men, ook zonder eenige berekening, kunnen inzien. Immers, in een geleider wordt steeds een deel van het arbeidsvermogen der electriche beweging in warmte omgezet. Bestaat dus het licht in electriche stroomingen, dan moet in een geleider de lichtbeweging gedeeltelijk in warmte veranderd, d. w. z. geabsorbeerd worden.

Werkelijk zijn alle goede, metallieke geleiders zeer weinig doorschijnend, terwijl de meeste lichamen, die het licht bijna onverzwakt doorlaten, isolatoren zijn.

MAXWELL 1), die het eerst op het verband tusschen het gelei-

1) Electr. and Magn. §§ 798—800.

dingsvermogen en de ondoorschijnendheid wees, heeft de intensiteit van het licht, dat door een dun metaalblad wordt doorgelaten, met zijne theorie vergeleken. Uit de vergelijkingen (2) en (3) volgt

$$2 q r = \frac{2 T}{\kappa} A^2 (1 + 4 \pi \theta),$$

dus

$$r = \frac{T v}{\kappa} A^2 (1 + 4 \pi \theta),$$

daar, blijkens de laatste formules van de vorige §,  $\frac{1}{q}$  de voortplantingssnelheid  $v$  is. Kent men deze dus en den weerstand  $\kappa$ , dan kan men  $r$  berekenen en dus vinden, hoe sterk het licht geabsorbeerd wordt. Zeer nauwkeurig kan deze berekening nooit zijn, omdat men  $\kappa$  niet met groote juistheid kent, en  $v$  nog veel minder. Omtrent de wijze van berekenen geeft MAXWELL verder niets aan; hij zegt alleen, dat een dun goudblaadje hem veel doorschijnender bleek te zijn, dan met de theorie overeenkomt.

Aangezien nu  $r$  en dus de absorptie des te kleiner wordt, naarmate  $\kappa$  toeneemt, is deze afwijking in dien zin, dat het metaal voor snel afwisselende stroomen, zooals de lichttrillingen, een kleiner geleidingsvermogen schijnt te bezitten dan voor de stroomen, die wij als zoodanig kunnen waarnemen.

En dit moet zoo zijn, wanneer men aanneemt, dat bij veranderlijke stroomen de wet van OHM slechts bij benadering geldig is, een onderstelling, die wij reeds in het tweede hoofdstuk hebben besproken. Immers, onderstellen wij, dat bij het optreden eener electromotorische kracht de stroom niet onmiddellijk begint met de door de wet van OHM gegeven intensiteit, maar dat er een zekere tijd noodig is, om hem zoo ver te doen aangroeien, dan kan het gebeuren, dat, bij stroomen van zoo korten duur als de lichttrillingen, de electromotorische kracht niet lang genoeg in dezelfde richting werkt, om den stroom met zijn volle sterkte te doen optreden. Dan moet echter de stroomsterkte steeds kleiner zijn, dan zij volgens de wet van OHM zijn moest, m. a. w. het metaal zal zich ongeveer gedragen, alsof het geleidingsvermogen kleiner was dan voor de gewone electriche stroomen.

Vertoont dus reeds bij de metalen de theorie afwijkingen van de feiten, nog grooter verschil openbaart zich bij de electrolyten. Wel

is hier het geleidingsvermogen veel kleiner dan bij de metalen, maar toch niet zoo gering, dat men zou mogen verwachten, dat verscheidene dezer lichamen, zooals dit toch het geval is, volkomen doorschijnend zijn 1). Het is de vraag, hoe men deze moeilijkheid zal oplossen. MAXWELL zegt hieromtrent het volgende:

We may suppose, that in the case of the rapidly alternating forces which come into play during the propagation of light, the electromotive force acts for so short a time in one direction that it is unable to effect a complete separation between the combined molecules. When, during the other half of the vibration, the electromotive force acts in the opposite direction it simply reverses what it did during the first half. There is thus no true conduction through the electrolyte, no loss of electric energy, and consequently no absorption of light.

Ik betwijfel het, of hiermede de zwaarigheid voldoende wordt opgelost. De beschouwingen van CLAUSIUS over de electrolyse hebben het waarschijnlijk gemaakt, dat de electromotorische kracht bij dit verschijnsel de verbonden moleculen niet behoef te scheiden. Integendeel zal zelfs de zwakste electromotorische kracht onmiddellijk de moleculaire beweging in den electrolyt influenceeren en ik zie niet in, waarom, al werkt die kracht nog zoo kort, hierbij de weerstanden tegen de beweging niet even goed zullen optreden als bij stroomen van langeren duur. Komen echter die weerstanden in het spel, dan zou een deel van het arbeidsvermogen der electriche beweging in warmte overgaan en dus het licht geabsorbeerd worden.

Waarschijnlijker komt het mij voor, dat wij ook bij de electrolyten, evenals bij de metalen, de verklaring van de besproken afwijking moeten zoeken in het onvoldoende der wet van OHM. En dat dit vooral bij electrolyten van grooten invloed moet kunnen zijn is zeker, want wij weten, dat daar bij de electriche beweging een zekere massa der gewone stof in beweging gebracht moet worden.

---

1) Integendeel, wanneer men de formules der vorige § op electrolyten toepast, dan leert de berekening, dat een laag van deze lichamen, waarvan de dikte eenige millimeters bedraagt, het licht aanmerkelijk zou moeten absorbeeren.



Intusschen spreekt het van zelf, dat voor een in alle opzichten juiste behandeling van dit onderwerp de moleculaire theorie der electrolyse verder ontwikkeld zou moeten worden.

§ 4. Wij zullen ons verder bepalen tot de metalen en wel tot het verschijnsel, dat bij deze het best is waargenomen, de terugkaatsing van het licht.

Daartoe is in de eerste plaats noodig, dat wij de uitdrukkingen opstellen voor een trillende beweging, die zich niet meer volgens een der assen, maar in eenige andere richting voortplant. Dit is na het onderzoek van § 2 gemakkelijk (door een verandering van coördinaatassen) te bereiken. Men verkrijgt daarbij het volgende resultaat.

Ligt de voortplantingsrichting in het  $xz$ -vlak en maakt zij met de  $x$ -as den hoek  $\alpha$ , dan kan men, wanneer de trillingen overal loodrecht op genoemd vlak staan, schrijven

$$[v] = a e^{-i\psi},$$

$$[L] = \frac{\kappa R}{A(1 + 4\pi\theta)} a \sin \alpha \cdot e^{-i\psi},$$

$$[N] = -\frac{\kappa R}{A(1 + 4\pi\theta)} a \cos \alpha \cdot e^{-i\psi},$$

$$\psi = \frac{2\pi}{T} (t - x R \cos \alpha - z R \sin \alpha + p).$$

Ligt daarentegen de trillingsrichting in het  $xz$ -vlak, dan kan de beweging worden voorgesteld door

$$[u] = -a \sin \alpha \cdot e^{-i\psi},$$

$$[w] = a \cos \alpha \cdot e^{-i\psi},$$

$$[M] = \frac{\kappa R}{A(1 + 4\pi\theta)} a e^{-i\psi},$$

waarbij  $\psi$  wederom dezelfde waarde heeft als boven.

Deze uitdrukkingen voldoen aan de bewegingsvergelijkingen voor elke waarde van den hoek  $\alpha$ , ook wanneer  $\alpha$ ,  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$  complexe grootheden zijn geworden.

§ 5. Vervolgens hebben wij de voorwaarden noodig, waaraan aan de grens van een isolator en een metaal voldaan moet zijn. Daarbij voorzien wij de grootheden, die bij beide door dezelfde letter zijn voorgesteld, ter onderscheiding van de indices 1 en 2. Nemen wij

weder het grensvlak tot  $yz$ -vlak dan geven ons de voorwaarden (A) van het tweede hoofdstuk

$$\frac{\eta_1}{\varepsilon_1} = \varkappa v, \quad \frac{\xi_1}{\varepsilon_1} = \varkappa w \dots \dots \dots (4)$$

en

$$\frac{\xi_1}{\varepsilon_1} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_1 = \varkappa u + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_2 \dots \dots \dots (5).$$

Evenzoo worden de vergelijkingen (B).

$$L_1 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial x}\right)_1 = L_2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial x}\right)_2 \dots \dots \dots (6)$$

en

$$M_1 = M_2, \quad N_1 = N_2 \dots \dots \dots (7).$$

Hierbij komen nog (19) en (40\*). Bij de eerste moeten wij voor  $u_1, v_1, w_1$  nemen

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial t}, \quad \frac{\partial \eta_1}{\partial t}, \quad \frac{\partial \zeta_1}{\partial t},$$

en voor  $u_2, v_2, w_2$

$$u + \varepsilon_2 \varkappa \frac{\partial u}{\partial t}, \quad v + \varepsilon_2 \varkappa \frac{\partial v}{\partial t}, \quad w + \varepsilon_2 \varkappa \frac{\partial w}{\partial t},$$

zoodat deze vergelijking wordt

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial t} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_1 = u + \varepsilon_2 \varkappa \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_2 \dots (8).$$

Eindelijk geeft (40\*)

$$\theta_1 L_1 - \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial \chi}{\partial x}\right)_1 = \theta_2 L_2 - \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial \chi}{\partial x}\right)_2 \dots \dots (9).$$

Vooreerst kan uit (6) en (9)  $\chi$  geëlimineerd worden; bepaalt men zich ook hier tot het geval, dat de verhouding  $\frac{1 + 4\pi\theta_2}{1 + 4\pi\theta_1} = 1$  mag gesteld worden, (wat alleen bij de sterk magnetische metalen niet geoorloofd is) dan komt er

$$L_1 = L_2 \dots \dots \dots (10)$$

Differentieert men verder (5) naar  $t$ , dan kan men uit de aldus verkregen betrekking en (8) de differentiaalquotienten van  $\varphi$  elimineeren. Dit geeft

$$\left(1 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_1}\right) \frac{\partial \xi_1}{\partial t} = u + \varepsilon_2 \varkappa \left(1 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_2}\right) \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Daar wij steeds ondersteld hebben, dat voor een isoleerende stof  $\epsilon$  zeer groot is, mag men in het eerste lid dezer vergelijking den tweeden term ten opzichte van den eersten verwaarloozen. Bij het metaal weten wij voorloopig omtrent  $\epsilon_2$  niets, maar toch ziet men gemakkelijk in, dat men in het tweede lid onzer vergelijking den derden term mag weglaten, daar hij zeer klein wordt ten opzichte van den eersten. Immers men kan voor den derden term schrijven

$$\frac{\kappa}{4\pi} \frac{\partial u}{\partial t},$$

of, als  $\kappa$  de waargenomen waarde van den weerstand is, blijkens (16) van het tweede hoofdstuk,

$$\frac{1}{1 + 4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\kappa}{4\pi} \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Neemt men nu de waarde van  $\kappa'$  en van  $T$  bij de lichttrillingen in aanmerking, dan vindt men, dat bij de metalen reeds

$$\frac{\kappa'}{4\pi} \frac{\partial u}{\partial t}$$

kleiner is dan  $u$ , zoodat men, daar  $\epsilon_0$  zeer groot is, zonder eenigen twijfel den boven neergeschreven term met betrekking tot  $u$  mag verwaarloozen.

Onze vergelijking wordt derhalve

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial t} = u + \epsilon_2 \kappa \frac{\partial u}{\partial t} \dots \dots \dots (11)$$

en de beteekenis hiervan is, dat de component van den totalen stroom loodrecht op het grensvlak doorlopend is, zoodat aan de grens geen opeenhooping van electriciteit plaats heeft. Daarbij moet dan aangenomen worden

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_1 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_2,$$

wat dan ook uit (8) volgt.

Wij zullen nu wederom bewijzen, dat men door alleen transversale trillingen in de berekening op te nemen aan de aldus gewijzigde grensvoorwaarden voldoen kan. Men kon ook hier evenals in het derde hoofdstuk beginnen met de onderstelling, dat ook longitudinale trillingen optreden; uit de verkregen resultaten zou dan blijken, dat de amplitudo dezer trillingen ten opzichte van die der transversale mag verwaarloosd worden.

Beschouwt men alleen transversale trillingen, dan is, daar overal  $\varphi = 0$  is, aan de voorwaarden, dat  $\varphi$  en de differentiaalquotienten ervan doorlopend moeten zijn, van zelve voldaan. Wij hebben dan nog slechts met de vergelijkingen (4), (7), (10) en (11) te doen.

§ 6. I. Is vooreerst het invallende licht in het invalsvlak gepolariseerd, dan kunnen wij het voorstellen door

$$\begin{aligned} [\eta_1'] &= e^{-i\psi_1'}, \\ [L_1'] &= \frac{4\pi A}{R_1} \sin \alpha_1 \cdot e^{-i\psi_1'}, \\ [N_1'] &= -\frac{4\pi A}{R_1} \cos \alpha_1 \cdot e^{-i\psi_1'}, \\ \psi_1' &= \frac{2\pi}{T} (t - x R_1 \cos \alpha_1 - z R_1 \sin \alpha_1 + p), \quad R_1 = \frac{1}{v_1}. \end{aligned}$$

Evenzoo schrijven wij voor het teruggekaatste licht

$$\begin{aligned} [\eta_1''] &= a_1 e^{-i\psi_1''}, \\ [L_1''] &= \frac{4\pi A}{R_1} \sin \alpha_1'' \cdot a_1 e^{-i\psi_1''}, \\ [N_1''] &= \frac{4\pi A}{R_1} \cos \alpha_1'' \cdot a_1 e^{-i\psi_1''}, \\ \psi_1'' &= \frac{2\pi}{T} (t + x R_1 \cos \alpha_1'' - z R_1 \sin \alpha_1'' + p), \end{aligned}$$

voor de beweging in het metaal eindelijk (§ 4)

$$\begin{aligned} [v] &= a_2 e^{-i\psi_2}, \\ [L_2] &= \frac{\kappa R_2}{A(1 + 4\pi\theta_2)} \sin \alpha_2 \cdot a_2 e^{-i\psi_2}, \\ [N_2] &= -\frac{\kappa R_2}{A(1 + 4\pi\theta_2)} \cos \alpha_2 \cdot a_2 e^{-i\psi_2}, \\ \psi_2 &= \frac{2\pi}{T} (t - x R_2 \cos \alpha_2 - z R_2 \sin \alpha_2 + p). \end{aligned}$$

Hierbij zijn  $\alpha_1$ ,  $\alpha_1''$ ,  $\alpha_2$  de hoeken van inval, terugkaatsing en breking, alle zoo gerekend, dat de cosinus positief is. De grootheden  $p$  zijn bij de drie bewegingen gelijk gesteld, daar toch bij verandering van  $p$  de geheele vorm  $e^{-i\psi}$  slechts met zekeren factor vermenigvuldigd wordt, dien men ook bij  $a$  kan voegen.

Aan het grensvlak, dus voor  $x=0$ , volgt vooreerst uit de eerste der vergelijkingen (4)

$$\frac{1}{s_1} e^{-i\psi_1'} + \frac{a_1}{s_1} e^{-i\psi_1''} = z a_2 e^{-i\psi_2} \dots (12)$$

Daar dit voor alle punten van het grensvlak moet gelden en  $a_1$  en  $a_2$  niet van  $z$  afhangen, vindt men hieruit gemakkelijk, dat aan de grens

$$\psi_1' = \psi_1'' = \psi_2$$

moet zijn, waaruit volgt

$$\alpha_1 = \alpha_1''$$

en

$$R_1 \sin \alpha_1 = R_2 \sin \alpha_2 \dots (13)$$

De eerste vergelijking drukt de wet der terugkaatsing uit, de tweede die der breking in denzelfden vorm als bij isolatoren 1).

Thans wordt (12)

$$\frac{1 + a_1}{s_1} = z a_2 \dots (14)$$

Aan de vergelijking (11), de tweede van (4) en de eerste van (7) is van zelve voldaan. De tweede van (7) geeft ons de betrekking

$$\frac{4\pi A}{R_1} (1 - a_1) \cos \alpha_1 = \frac{x R_2}{A (1 + 4\pi \theta_2)} a_2 \cos \alpha_2,$$

welke, na vermenigvuldiging met

$$A (1 + 4\pi \theta_1) = A (1 + 4\pi \theta_2)$$

den vorm aanneemt

$$R_1 \frac{1 - a_1}{s_1} \cos \alpha_1 = R_2 x a_2 \cos \alpha_2,$$

of, volgens (13),

$$\frac{1 - a_1}{s_1} \sin \alpha_2 \cos \alpha_1 = z a_2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \dots (15)$$

Eindelijk geeft de vergelijking (10)

$$\frac{4\pi A}{R_1} (1 + a_1) \sin \alpha_1 = \frac{x R_2}{A (1 + 4\pi \theta_2)} a_2 \sin \alpha_2$$

1) Ik heb hier de wet van breking uit de grensvoorwaarden afgeleid, daar  $\alpha_2$  bij metalen een complexe waarde verkrijgt, zoodat het gewone bewijs voor die wet hier niet doorgaat.

en past men hierop dezelfde transformatie toe, die wij zooeven bezigden, dan komt men tot (14) terug. Derhalve zijn (14) en (15) de eenige voorwaarden ter bepaling van  $a_1$  en  $a_2$ ; men vindt daaruit

$$a_1 = - \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)},$$

zoodat het teruggekaatste licht wordt voorgesteld door

$$[\eta''] = - \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} e^{-i \frac{2\pi}{T} (t + x R_1 \cos \alpha_1 - z R_1 \sin \alpha_1 + p)} \quad \dots \quad (\text{A})$$

§ 7. II. Is ten tweede het invallende licht loodrecht op het invalsvlak gepolariseerd, dan kunnen wij de invallende, teruggekaatste en gebroken beweging voorstellen door

$$[\xi_1'] = - \sin \alpha_1 \cdot e^{-i \psi_1'}, \quad [\xi_1''] = \cos \alpha_1 \cdot e^{-i \psi_1'},$$

$$[M_1'] = \frac{4 \pi A}{R_1} e^{-i \psi_1'},$$

$$[\xi_1''] = - a_1 \sin \alpha_1'' \cdot e^{-i \psi_1''}, \quad [\xi_1'''] = - a_1 \cos \alpha_1'' \cdot e^{-i \psi_1''},$$

$$[M_1'''] = \frac{4 \pi A}{R_1} a_1 e^{-i \psi_1''},$$

$$[u] = - a_2 \sin \alpha_2 \cdot e^{-i \psi_2}, \quad [w] = a_2 \cos \alpha_2 \cdot e^{-i \psi_2},$$

$$[M_2] = \frac{\varkappa R_2}{A(1 + 4 \pi \theta_2)} a_2 e^{-i \psi_2},$$

waarbij  $\psi_1'$ ,  $\psi_1''$  en  $\psi_2$  dezelfde beteekenis hebben als in de vorige §.

Uit de grensvoorwaarden laat zich ook hier op dezelfde wijze de wet der terugkaatsing en de vergelijking (13) afleiden, wat de waarden van  $\psi_1'$ ,  $\psi_1''$  en  $\psi_2$  aan het grensvlak wederom gelijk maakt.

Alsdan geeft de tweede der vergelijkingen (4)

$$\frac{1 - a_1}{\varepsilon_1} \cos \alpha_1 = \varkappa a_2 \cos \alpha_2 \quad \dots \quad (16)$$

Evenzoo geeft de eerste van (7)

$$\frac{4 \pi A}{R_1} (1 + a_1) = \frac{\varkappa R_2}{A(1 + 4 \pi \theta_2)} a_2,$$

wat, na herleiding, overgaat in

$$\frac{1 + a_1}{\varepsilon_1} \sin \alpha_2 = \varkappa a_2 \sin \alpha_1 \quad \dots \quad (17)$$

Eindelijk volgt uit de vergelijking (11), na deeling door  $i e^{-i\psi_1}$ ,

$$(1 + a_1) \cdot \frac{2\pi}{T} \sin \alpha_1 = a_2 \sin \alpha_2 \left( \varepsilon_2 \times \frac{2\pi}{T} + i \right).$$

Neemt men nu in aanmerking, dat uit de waarden van  $R_1$  en  $R_2$  volgt

$$\begin{aligned} R_2^2 &= 4\pi \varepsilon_2 A^2 (1 + 4\pi \theta_2) + i \cdot \frac{2T}{x} \cdot A^2 (1 + 4\pi \theta_2) = \\ &= R_1^2 \left( \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} + i \frac{T}{2\pi} \frac{1}{x \varepsilon_1} \right) = R_1^2 \frac{T}{2\pi} \frac{1}{x \varepsilon_1} \left( \varepsilon_2 \times \frac{2\pi}{T} + i \right), \end{aligned}$$

dan kan men voor de verkregen vergelijking schrijven

$$(1 + a_1) \frac{2\pi}{T} \sin \alpha_1 = a_2 \sin \alpha_2 \frac{R_2^2}{R_1^2} \frac{2\pi}{T} \times \varepsilon_1,$$

of, als men (13) in het oog houdt,

$$\frac{1 + a_1}{\varepsilon_1} \sin \alpha_2 = x a_2 \sin \alpha_1,$$

wat dezelfde vergelijking als (17) is. Daar aan de overige grensvoorwaarden van zelve voldaan is hebben wij ter bepaling van  $a_1$  en  $a_2$  alleen (16) en (17). Men vindt daaruit

$$a_1 = \frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2)}{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2)},$$

zoodat het teruggekaatste licht nu wordt voorgesteld door

$$[Q] = \frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2)}{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2)} e^{-i \frac{2\pi}{T} (t + z R_1 \cos \alpha_1 - z R_1 \sin \alpha_1 + p)} \dots (B)$$

$Q$  is hierbij de (geheele) diëlectrische polarisatie.

§ 8. De symbolische uitdrukkingen (A) en (B) hebben denzelfden vorm als die, welke voor niet-geleiders gelden. Maar zoodra men, om de werkelijke teruggekaatste beweging te verkrijgen, alleen het reële gedeelte neemt houdt de overeenstemming op. Want bij de metalen moeten wij in 't oog houden, dat  $R_2$  en daardoor  $\alpha_2$  complex worden, terwijl deze grootheden bij niet-geleiders bestaanbaar zijn.

Om na te gaan, wat er nu van (A) en (B) wordt, zal ik eenige herleidingen volgen, die door EISENLOHR 1) bij de afleiding der

1) Pogg. Ann. 104, p. 368.

vergelijkingen van CAUCHY zijn gebezigd. EISENLOHR verkrijgt nl. die formules door in de voor doorschijnende lichamen geldige uitdrukkingen voor den brekingsindex een complexe uitdrukking  $\theta e^{i s}$  te stellen; van daar dat het verdere onderzoek naar de door (A) en (B) voorgestelde beweging grootendeels met dat van EISENLOHR samenvalt. Noemen wij de standvastige verhouding

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = n$$

ook hier den brekingsindex, dan is, blijkens (13) en (3)

$$n = \frac{R_2}{R_1} = \frac{q}{R_1} + \frac{r}{R_1} i.$$

Voeren wij in plaats van  $q$  en  $r$  twee nieuwe constanten  $\sigma$  en  $\tau$  in, zoodat

$$n = \frac{q}{R_1} + \frac{r}{R_1} i = \sigma e^{i \tau} \dots \dots \dots (18)$$

is, dan zijn deze met  $q$  en  $r$  door de volgende betrekkingen verbonden

$$\sigma \cos \tau = \frac{q}{R_1}, \quad \sigma \sin \tau = \frac{r}{R_1}$$

en  $\sigma$  en  $\tau$  beantwoorden aan  $\theta$  en  $s$  bij EISENLOHR.

Blijkens (13) wordt nu

$$\sin \alpha_2 = \frac{\sin \alpha_1}{\sigma} e^{-i \tau},$$

dus

$$\cos \alpha_2 = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha_1}{\sigma^2} e^{-2i \tau}} = \varrho e^{i \omega}$$

waarbij de grootheden  $\varrho$  en  $\omega$  bepaald zijn door

$$\left. \begin{aligned} \varrho^2 \cos 2 \omega &= 1 - \frac{\sin^2 \alpha_1 \cos 2 \tau}{\sigma^2}, \\ \varrho^2 \sin 2 \omega &= \frac{\sin^2 \alpha_1 \sin 2 \tau}{\sigma^2}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (19).$$

Geschikter is ter bepaling van  $\omega$  de hieruit door deeling volgende vergelijking

$$\cot 2 \omega = \frac{\sigma^2}{\sin^2 \alpha_1 \sin 2 \tau} - \cot 2 \tau, \dots \dots (20)$$



waaruit men, na eenige herleiding, kan afleiden

$$\cot(2\omega + \tau) = \cot \tau \cos \left\{ 2 \operatorname{B}g \operatorname{tg} \left( \frac{\sin \alpha_1}{\sigma} \right) \right\}. \quad (21)$$

Substitueert men de waarden van  $\sin \alpha_2$  en  $\cos \alpha_2$  in

$$-\frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \quad \text{en} \quad \frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2)}{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2)},$$

dan komt er

$$-\frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} = \frac{1 - \frac{\sigma \varrho}{\cos \alpha_1} e^{i(\tau + \omega)}}{1 + \frac{\sigma \varrho}{\cos \alpha_1} e^{i(\tau + \omega)}} = a' + a'' i,$$

waarbij

$$a' = \frac{1 - m^2}{1 + 2m \cos(\tau + \omega) + m^2}, \quad a'' = -\frac{2m \sin(\tau + \omega)}{1 + 2m \cos(\tau + \omega) + m^2},$$

$$m = \frac{\sigma \varrho}{\cos \alpha_1}$$

is. Evenzoo

$$\frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2)}{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2)} = -\frac{1 - \frac{\sigma \cos \alpha_1}{\varrho} e^{i(\tau - \omega)}}{1 + \frac{\sigma \cos \alpha_1}{\varrho} e^{i(\tau - \omega)}} = b' + b'' i$$

en hier is

$$b' = -\frac{1 - m'^2}{1 + 2m' \cos(\tau - \omega) + m'^2}, \quad b'' = \frac{2m' \sin(\tau - \omega)}{1 + 2m' \cos(\tau - \omega) + m'^2},$$

$$m' = \frac{\sigma \cos \alpha_1}{\varrho}.$$

De formules (A) en (B) voor het teruggekaatste licht worden nu

$$[\eta_1''] = (a' + a'' i) e^{-i\psi_1''}, \quad [Q] = (b' + b'' i) e^{-i\psi_1''}$$

en door hier alleen het reële deel te nemen verkrijgt men

$$\eta_1'' = \sqrt{a'^2 + a''^2} \cos(\psi_1'' - d_p), \quad Q = \sqrt{b'^2 + b''^2} \cos(\psi_1'' - d_s),$$

waarbij

$$d_p = \operatorname{B}g \operatorname{tg} \frac{a''}{a'}, \quad d_s = \operatorname{B}g \operatorname{tg} \frac{b''}{b'}$$

is.

Is derhalve het licht in het invalsvlak gepolariseerd, dan wordt de intensiteit van het teruggekaatste licht gegeven door

$$I_p = a'^2 + a''^2 = \frac{(1 - m^2)^2 + 4 m^2 \sin^2(\tau + \omega)}{\{1 + 2 m \cos(\tau + \omega) + m^2\}^2} =$$

$$= \frac{1 + m^2}{\cos(\tau + \omega) \cdot 2 m} - 1$$

$$= \frac{1 + m^2}{\cos(\tau + \omega) \cdot 2 m} + 1 = \operatorname{tg}(f - \frac{1}{4} \pi), \dots (22)$$

wanneer

$$\cot f = \cos(\tau + \omega) \cdot \frac{2 m}{1 + m^2},$$

of, blijkens de waarde van  $m$ ,

$$\cot f = \cos(\tau + \omega) \sin \left\{ 2 \operatorname{B}g \operatorname{tg} \left( \frac{\cos \alpha_1}{\sigma \varrho} \right) \right\} \dots (23)$$

gesteld wordt.

De grootheid  $d_p$ , die de phase bepaalt, wordt gegeven door

$$\operatorname{tg} d_p = \frac{a''}{a'} = -\sin(\tau + \omega) \cdot \frac{2 m}{1 - m^2},$$

of

$$\operatorname{tg} d_p = \sin(\tau + \omega) \operatorname{tg} \left\{ 2 \operatorname{B}g \operatorname{tg} \left( \frac{\cos \alpha_1}{\sigma \varrho} \right) \right\} \dots (24)$$

Is daarentegen het licht loodrecht op het invalsvlak gepolariseerd dan vindt men op dezelfde wijze voor de intensiteit

$$I_s = b'^2 + b''^2 = \operatorname{tg}(g - \frac{1}{4} \pi), \dots (25)$$

$$\cot g = \cos(\tau - \omega) \sin \left\{ 2 \operatorname{B}g \operatorname{tg} \left( \frac{\sigma \cos \alpha_1}{\varrho} \right) \right\} \dots (26)$$

en voor de phase

$$\operatorname{tg} d_s = \sin(\tau - \omega) \operatorname{tg} \left\{ 2 \operatorname{B}g \operatorname{tg} \left( \frac{\sigma \cos \alpha_1}{\varrho} \right) \right\} \dots (27)$$

§ 9. De opgestelde vergelijkingen veroorlooven uit de constanten van het metaal voor elk der beide hoofdgevallen de intensiteit en de phase van het teruggekaatste licht te berekenen. Daar echter deze grootheden niet voor beide trillingsrichtingen dezelfde waarde aannemen, zal, wanneer het invallende licht op willekeurige wijze lineair gepolariseerd is, de teruggekaatste straal elliptische polari-

satie vertoonen. Uit de daaromtrent verrichte waarnemingen is men in staat de verhouding der amplitudines  $k = \sqrt{\frac{I_s}{I_p}}$  en het phaseverschil  $d_s - d_p$  te vinden. Daar men vooral deze grootheden heeft gemeten, is het wenschelijk de theoretische waarden daarvoor op te stellen. Men bereikt dit het gemakkelijkst als men

$$\frac{b' + b'' i}{a' + a'' i} = c' + c'' i$$

stelt. Aangezien

$$b' + b'' i = \sqrt{I_s} (\cos d_s + i \sin d_s)$$

en

$$a' + a'' i = \sqrt{I_p} (\cos d_p + i \sin d_p)$$

is, wordt dan

$$c' + c'' i = k \{ \cos (d_s - d_p) + i \sin (d_s - d_p) \},$$

waaruit volgt

$$k = \sqrt{c'^2 + c''^2} \text{ en } \operatorname{tg} (d_s - d_p) = \frac{c''}{c'}.$$

Blijkens de oorspronkelijke uitdrukkingen voor  $a' + a'' i$  en  $b' + b'' i$  hebben wij

$$c' + c'' i = - \frac{\cos (\alpha_1 + \alpha_2)}{\cos (\alpha_1 - \alpha_2)} = - \frac{1 - \frac{\sin^2 \alpha_1}{\sigma \varrho \cos \alpha_1} e^{-i(\tau + \omega)}}{1 + \frac{\sin^2 \alpha_1}{\sigma \varrho \cos \alpha_1} e^{-i(\tau + \omega)}},$$

waaruit volgt, als men

$$\frac{\sin^2 \alpha_1}{\sigma \varrho \cos \alpha_1} = m''$$

stelt,

$$c' = - \frac{1 - m''^2}{1 + 2 m'' \cos (\tau + \omega) + m''^2}, \quad c'' = - \frac{2 m'' \sin (\tau + \omega)}{1 + 2 m'' \cos (\tau + \omega) + m''^2}.$$

Hieruit vindt men ten slotte, wanneer

$$k = \operatorname{tg} h$$

is,

$$\cos 2 h = \cos (\tau + \omega) \sin \left\{ 2 \operatorname{B}g \operatorname{tg} \left( \frac{\sin^2 \alpha_1}{\sigma \varrho \cos \alpha_1} \right) \right\}, \quad \dots (28)$$

$$\operatorname{tg} (d_s - d_p) = \sin (\tau + \omega) \operatorname{tg} \left\{ 2 \operatorname{B}g \operatorname{tg} \left( \frac{\sin^2 \alpha_1}{\sigma \varrho \cos \alpha_1} \right) \right\}. \quad \dots (29)$$

De hier verkregen vergelijkingen zijn dezelfde als die, welke door CAUCHY aangegeven en door EISENLOHR afgeleid zijn. Het is echter door JAMIN en QUINCKE bewezen, dat deze formules op bevredigende wijze met de waarnemingen overeenstemmen, niet alleen wanneer de terugkaatsing in de lucht, maar, volgens den laatsten natuurkundige, ook wanneer zij in een andere doorschijnende middestof plaats heeft.

Aldus zien wij, dat de hypothese van MAXWELL ook hier tot vergelijkingen van den juisten vorm voert. Gaan wij thans na, hoe het met de waarde der daarin voorkomende constanten gesteld is.

§ 10. Bij de waarnemingen komt vooral één bijzonder geval ter sprake, dat nl. het phaseverschil  $d_s - d_p = \frac{1}{2} \pi$  (een kwart golf-lengte) wordt. Dit heeft voor één bepaalden invalshoek, den *hoofd-invalshoek*  $A$  plaats en men noemt de waarde  $H$ , die  $h$  of  $Bg \operatorname{tg} k$  in dit geval aanneemt, het *hoofdazimuth*. Deze twee grootheden hangen op bepaalde wijze met de constanten  $\sigma$  en  $\tau$  samen. Uit (29) volgt nl., daar  $\operatorname{tg} (d_s - d_p)$  voor  $\alpha_1 = A \infty$  moet worden,

$$\sigma q_a = \operatorname{tg} A \sin A \dots \dots \dots (30)$$

en uit (28) vindt men dan

$$\tau + \omega_a = 2 H \dots \dots \dots (31)$$

Hierbij zijn  $q_a$  en  $\omega_a$  de waarden, die  $q$  en  $\omega$  voor  $\alpha_1 = A$  aannemen. Verder heeft men

$$\frac{\operatorname{tg} (\tau - \omega)}{\operatorname{tg} (\tau + \omega)} = \frac{\sin 2 \tau - \sin 2 \omega}{\sin 2 \tau + \sin 2 \omega},$$

dus voor den hoofd-invalshoek volgens (19)

$$\frac{\operatorname{tg} (\tau - \omega_a)}{\operatorname{tg} (\tau + \omega_a)} = \frac{\sigma^2 q_a^2 - \sin^2 A}{\sigma^2 q_a^2 + \sin^2 A}$$

en dit gaat, ten gevolge van (30) over in

$$\frac{\operatorname{tg} (\tau - \omega_a)}{\operatorname{tg} (\tau + \omega_a)} = -\cos 2 A \dots \dots \dots (32)$$

Men kan, wanneer  $A$  en  $H$  uit de waarnemingen bekend zijn, uit (31) en (32) gemakkelijk  $\tau$  en  $\omega_a$  berekenen. Vervolgens kan  $\sigma$  bepaald worden uit (20), waarvoor men ook kan schrijven

$$\sigma = \operatorname{tg} A \sqrt{\frac{\cos (\tau + \omega_a)}{\cos (\tau - \omega_a)}} \dots \dots \dots (33)$$

Langs dezen weg heeft EISENLOHR uit de door JAMIN voor den

hoofdinvashoek en het hoofdazimuth gegeven waarden voor eenige metalen en voor verschillende streepen van het spectrum de constanten  $\sigma$  en  $\tau$  (bij hem  $\theta$  en  $\epsilon$ ) bepaald. Uit de aldus samengestelde tabel is het volgende een uittreksel

	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>H</i>
Zilver . . . . . <i>A</i>	72°30'	71°30'	69°34'	66°12'
<i>H</i>	40 9	40 19	39 46	39 50
$\tau$	79 15	79 29	77 54	77 16
log $\sigma$	0,4595	0,4283	0,3703	0,2740
Zink . . . . . <i>A</i>	74°27'	73°28'	72°32'	71°18'
<i>H</i>	18 45	21 13	22 44	25 18
$\tau$	35 24	39 57	42 38	47 19
log $\sigma$	0,5442	0,5117	0,4824	0,4435
Spiegelmetaal <i>A</i>	74° 7'	73°35'	73° 4'	71°56'
<i>H</i>	27 21	25 52	26 15	28 0
$\tau$	52 27	49 16	49 53	53 4
log $\sigma$	0,5237	0,5090	0,4929	0,4568

§ 11. Vergelijken wij thans deze waarden van  $\sigma$  en  $\tau$  met onze theorie. Uit (18) volgt

$$\frac{R_2^2}{R_1^2} = \sigma^2 e^{2i\tau};$$

aan den anderen kant blijkt uit de vroeger voor  $R_1$  en  $R_2$  opgestelde waarden, dat

$$\frac{R_2^2}{R_1^2} = \frac{s_2}{s_1} + i \frac{T}{2\pi} \cdot \frac{1}{\kappa s_1}$$

is, zoodat de betrekking

$$\sigma^2 e^{2i\tau} = \frac{s_2}{s_1} + i \frac{T}{2\pi} \cdot \frac{1}{\kappa s_1} \dots \dots \dots (34)$$

moet gelden. Daaruit leiden wij af

$$\sigma^2 \cos 2\tau = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \text{ en } \sigma^2 \sin 2\tau = \frac{T}{2\pi} \cdot \frac{1}{\kappa \varepsilon_1}.$$

De eerste dezer vergelijkingen levert echter een ernstige moeilijkheid op. Want  $\tau$  is, zooals men in bovenstaande tabel ziet, in vele gevallen grooter dan  $45^\circ$ . Dan is  $\cos 2\tau$  negatief, en zou dit ook met  $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$  het geval moeten zijn, wat niet mogelijk is. Zonder eenigen twijfel is derhalve de theorie, zooals wij die boven gegeven hebben, niet juist.

Het is de vraag, of de oorzaak hiervan gezocht moet worden in den grondslag der electromagnetische theorie, dan wel in eenige bijzondere onderstelling, die wij gemaakt hebben. Tot nog toe heeft deze theorie ons zoo juiste uitkomsten opgeleverd, dat ik tot het laatste gevoelen overhel. Te meer omdat de moeilijkheid kan opgelost worden door in onze beschouwingen een verandering te brengen, waarop wij reeds zijn voorbereid, door nl. de absolute juistheid der wet van OHM voor veranderlijke stroomen te doen vallen.

Toen wij in het tweede hoofdstuk deze wet bespraken, zagen wij reeds, dat de meest waarschijnlijke betrekking tusschen de electromotorische kracht en de stroomcomponenten wordt uitgedrukt door

$$X = \kappa u + g \frac{\partial u}{\partial t}, \quad Y = \kappa v + g \frac{\partial v}{\partial t}, \quad Z = \kappa w + g \frac{\partial w}{\partial t} \quad \dots \quad (35)$$

Bij het opstellen der bewegingsvergelijkingen en grensvoorwaarden is nu  $X = \kappa u$ ,  $Y = \kappa v$ ,  $Z = \kappa w$  gesteld, zoodat wij thans, wanneer wij van de uitdrukkingen (35) willen uitgaan, alle vergelijkingen zouden moeten wijzigen. Bepalen wij ons echter tot trillende bewegingen, dan zijn die veranderingen op zeer eenvoudige wijze aan te geven. Vooreerst is het gemakkelijk in te zien, dat ook de gewijzigde bewegingsvergelijkingen lineair zullen zijn, zoodat men nog op dezelfde wijze met symbolische uitdrukkingen mag werken als wij dit tot nog toe gedaan hebben. Bij bewegings-toestanden, zooals wij die hier onderzoeken, worden de stroomcomponenten voorgesteld door vergelijkingen van den vorm

$$[u] = a e^{-i \frac{2\pi}{T} (t-D)},$$

waarbij  $D$  van  $t$  onafhankelijk is. Dan is blijkens (35)

$$[X] = \left( \kappa - ig \frac{2\pi}{T} \right) [u], \quad [Y] = \left( \kappa - ig \frac{2\pi}{T} \right) [v], \quad [Z] = \left( \kappa - ig \frac{2\pi}{T} \right) [w].$$

Deze uitdrukkingen zijn van denzelfden vorm als die, welke wij vroeger aangenomen hebben; alleen is  $\kappa$  vervangen door  $\kappa - i g \frac{2\pi}{T}$ .

Doet men dit in onze formules, dan moet men een symbolische oplossing verkrijgen, die aan de gewijzigde voorwaarden van het vraagstuk voldoet, en men moet daaruit wederom door alleen het reële deel te nemen de juiste uitdrukkingen voor de werkelijke beweging kunnen afleiden.

Het geheele onderzoek van de vorige §§ blijft derhalve onveranderd; alleen verandert de waarde van  $\frac{R_2^2}{R_1^2}$ .

Vroeger was

$$\frac{R_2^2}{R_1^2} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} + i \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot \frac{1}{\kappa \varepsilon_1};$$

dit wordt nu

$$\frac{R_2^2}{R_1^2} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} + i \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot \frac{1}{\left(\kappa - i g \frac{2\pi}{T}\right) \varepsilon_1},$$

of, als wij kortheidshalve  $\frac{2\pi g}{\kappa T} = s$  stellen,

$$\frac{R_2^2}{R_1^2} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} + i \frac{T}{2\pi \kappa \varepsilon_1} \cdot \frac{1}{1 - is} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} + \frac{T}{2\pi \kappa \varepsilon_1} \cdot \frac{i - s}{1 + s^2}.$$

Zal dit nu  $= \sigma^2 e^{2i\tau}$  zijn, dan moet men hebben

$$\sigma^2 \cos 2\tau = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \frac{T}{2\pi \kappa \varepsilon_1} \cdot \frac{s}{1 + s^2} \dots \dots \dots (36)$$

en

$$\sigma^2 \sin 2\tau = \frac{T}{2\pi \kappa \varepsilon_1} \cdot \frac{1}{1 + s^2} \dots \dots \dots (37)$$

Nu kan werkelijk  $\cos 2\tau$  een negatieve waarde aannemen, zooals wij zagen, dat het geval is.

§ 12. Deze vergelijkingen kunnen iets eenvoudiger geschreven worden. Vooreerst stellen wij, als  $\varepsilon_1$  op de lucht betrekking heeft

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = K.$$

Ten tweede merken wij op, dat in onze formules  $\kappa$  de werkelijke

waarde van den weerstand voorstelt, die, blijkens (16) van het tweede hoofdstuk, met de waargenomen waarde aldus samenhangt

$$x = \frac{x'}{1 + 4 \pi \epsilon_1},$$

waarvoor men kan stellen

$$x \epsilon_1 = \frac{x'}{4 \pi}.$$

Hierdoor worden (36) en (37)

$$\sigma^2 \cos 2 \tau = K - \frac{2 T}{x'} \cdot \frac{s}{1 + s^2} \dots \dots \dots (38)$$

en

$$\sigma^2 \sin 2 \tau = \frac{2 T}{x'} \cdot \frac{1}{1 + s^2}, \dots \dots \dots (39)$$

waarbij valt op te merken, dat in ons maatstelsel  $x'$  op dezelfde wijze van de keus der eenheden afhangt als een tijd, zoodat  $\frac{2 T}{x'}$  een onbenoemd getal is, van die keus geheel onafhankelijk.

Zijn nu  $\sigma$  en  $\tau$  bekend en kent men bovendien den weerstand  $x'$  in absolute maat, dan kan men uit (39)  $s$ , vervolgens uit (38)  $K$  bepalen. Voor geen metaal is  $x'$  met voldoende nauwkeurigheid bekend (tenzij voor zuiver koper), en bovendien is het de vraag, hoe groot  $x'$  is voor de metaalplaten, waarbij de terugkaatsing onderzocht is. Intusschen zal men niet al te ver van de waarheid verwijderd zijn, wanneer men voor zilver aanneemt

$$x' = \frac{1}{5.10^{17}} \text{ seconden.}$$

Hieruit, met de waarden van  $\sigma$  en  $\tau$  voor de Fraunhofer'sche lijn  $D$ , vind ik voor dit metaal ongeveer

$$s = 25, K = 70.$$

Daaruit zou volgen, dat in metalen niet alleen een zeer groote polarisatie der moleculen bestond, maar dat bovendien bij stroomen van zoo korten duur als de lichttrillingen de afwijking van de wet van OHM zeer groot is. Immers, in plaats van de waarde  $[X] = x [u]$ , zou men daarbij  $[X] = x (1 - 25 i) [u]$  in rekening moeten brengen.

Schijnt dit resultaat vreemd, toch geloof ik niet, dat het



met eenig bekend feit in tegenspraak is. Want bij proeven met constante stroomen, die het nauwkeurigst zijn genomen, zal men niet licht iets van de polarisatie der moleculen bemerken. Wat verder de afwijking van de wet van OHM betreft, vindt men gemakkelijk uit het bovenstaande, dat zij bij de veranderlijke stroomen, die men als zoodanig kan waarnemen, volstrekt onmerkbaar moet zijn, aangezien de verandering der stroomsterkte daarbij veel te langzaam is. Bij oscillerende stroomen b.v. moeten de uitdrukkingen

$$[X] = \left( \kappa - i g \frac{2 \pi}{T} \right) [u], \text{ enz.}$$

worden gebezigd. Daar nu bij dergelijke stroomen  $T$  duizenden malen grooter is dan bij de lichttrillingen, zal daar de tweede term gerustelijk achterwege gelaten kunnen worden.

Met dat al wil ik geenszins de voor  $s$  en  $K$  gevonden waarden als een definitief resultaat beschouwen. Daartoe zijn in de eerste plaats de waarnemingen nog veel te onvolkomen 1). Maar bovendien kunnen wij er niet aan twifelen, dat de gegeven theorie nog slechts als een eerste benadering mag aangemerkt worden. Misschien zal zij belangrijke wijzigingen ondergaan, zoodra onze begrippen omtrent het zeer ingewikkelde verschijnsel, dat wij beweging der electriciteit in geleiders noemen, helderder zijn geworden. Blijkt daarbij het boven omtrent de afwijking van de wet van OHM gezegde werkelijk juist te zijn, dan zou men een resultaat verkregen hebben, dat voor de electriciteitsleer van belang zou zijn. Men zou dan eens de grootte der afwijking nauwkeurig kunnen bepalen en aldus zou er eenig licht verspreid worden omtrent de massa der stof, die bij een electrischen stroom in beweging verkeert.

§ 13. Een paar zaken zullen wij ten slotte met een enkel woord bespreken, al is het dan ook slechts om te zien, hoever wij nog van een volledige kennis van de optische eigenschappen der metalen verwijderd zijn.

1) De waarden, die men bij een zelfde metaal, in verschillende gevallen, voor  $A$  en  $H$  heeft gevonden, loopen zeer uiteen. Onzuiverheden en veranderingen der oppervlakte spelen hierbij zonder twijfel een voornaam rol. Ook is het mogelijk, dat de temperatuur hier van invloed is, daar, zooals men weet, de weerstand in hooge mate daarvan afhankelijk is.

Vooreerst de door JAMIN opgemerkte en in de tabel van § 10 aangegeven afhankelijkheid van den trillingstijd. Daar in onze formules  $T$  voorkomt, had ik verwacht, dat zij van die afhankelijkheid op bevredigende wijze rekenschap zouden kunnen geven. Het bleek mij echter, dat dit niet het geval is. Dit bewijst ons, dat hier nog omstandigheden in het spel moeten komen, wier invloed wij bij ons onderzoek verwaarloosd hebben. Het laat zich trouwens verwachten, dat de oorzaken, die bij doorschijnende stoffen de kleurschifting ten gevolge hebben, ook hier zullen optreden.

In de tweede plaats de terugkaatsing door een metaal, wanneer zij niet in de lucht, maar in een andere isoleerende middenstof plaats heeft. QUINCKE 1) geeft hieromtrent de volgende waarden voor hoofdinvalshoek en hoofdzimuth op:

Terugkaatsing op zilver

	in	$A$	$H$	$n$
I	Lucht . . . .	74°19'	43°48'	1
	Water . . . .	71 28	44 3	1,336
	Terpentijn . .	69 16	43 21	1,474
II	Lucht . . . .	74 50	43 20	1
	Flintglas. . .	69 48	41 22	1,626
III	Lucht . . . .	75 57	44 1	1
	Kroonglas . .	69 5	42 28	1,515.

Hierbij is  $n$  de brekingsindex van de stof, waarin de terugkaatsing plaats heeft, terwijl de bij elkaar gevoegde opgaven op hetzelfde zilver betrekking hebben en dus met elkander vergeleken kunnen worden.

Volgens onze theorie, zoowel als volgens die van EISENLOHR, wordt de brekingsindex bij een metaal gegeven door

$$\frac{R_2}{R_1} = \sigma e^{i\tau}$$

Neemt men nu in plaats van lucht een medium met den brekingsindex  $n$ , dan wordt  $R_1$  door  $n R_1$  vervangen, terwijl  $R_2$  onver-

1) Pogg. Ann. 128, p. 561.

anderd blijft. Derhalve moet in dit geval  $\tau$  nog dezelfde waarde hebben maar  $\sigma$   $n$  maal kleiner zijn geworden.

Ik heb uit de opgaven van QUINCKE  $\sigma$  en  $\tau$  berekend en daarbij de volgende waarden verkregen:

	$\tau$	$\log \sigma$	$\log \sigma$ (uit de waarde voor lucht)	
I	Lucht . . .	87°24'	0,5174	
	Water . . .	87 52	0,4257	0,3916
	Terpentijn.	86 9	0,3595	0,3489
II	Lucht . . .	86 24	0,5351	
	Flintglas .	81 37	0,2077	0,3240
III	Lucht . . .	87 54	0,5744	
	Kroonglas.	84 4	0,3545	0,3940

De laatste kolom bevat de waarde van  $\log \sigma$ , zooals zij volgens het bovengezegde uit die, welke voor de lucht geldt, berekend kan worden.

Slechts in zooverre bestaat hier zeker overeenstemming dat  $\sigma$ , volgens de theorie zoowel als de ervaring des te kleiner is, naarmate  $n$  grooter wordt. Maar er bestaan zoo groote afwijkingen, dat er of aan de nauwkeurigheid der waarnemingen, of aan de juistheid der theorie nog zeer veel moet ontbreken.

---

Vatten wij thans, aan het einde van deze beschouwingen gekomen, het besprokene kortelijk samen. De voornaamste verschijnselen, die zich bij de terugkaatsing en breking van het licht voordoen, hebben ons het middel geleverd om de deugdelijkheid op de proef te stellen van de verschillende begrippen, die men zich omtrent den aard der lichtbeweging heeft gevormd. Eerst uitgaande van de meening, dat de lichttrillingen als bewegingen van een veerkrachtig lichaam zouden zijn op te vatten, zagen wij ons weldra tot verschillende bijzonderstellingen gedwongen en het gelukte zelfs niet, die zoo te kiezen, dat van alle verschijnselen rekenschap werd

gegeven. De theorie van MAXWELL daarentegen werd door het gedrag der isoleerende lichamen steeds bevestigd en vereischte bij de metalen alleen een onderstelling, die zeer waarschijnlijk is en reeds vroeger gemaakt was. Verder hadden wij bij die theorie slechts noodig te stellen, dat  $\epsilon$  een zeer groot getal is, waardoor verschillende moeilijkheden uit den weg werden geruimd. Het gevolg van deze hypothese was, dat wij slechts transversale trillingen in rekening behoeften te brengen, en dat bovendien de vergelijkingen voor de grens van twee lichamen zoo werden gewijzigd, dat wij daar met geen opeenhooping van electriciteit te doen hadden. In alle gevallen, waarop wij de theorie hebben toegepast, komt dus de beweging der electriciteit overeen met die eener onsamendrukbare vloeistof en daardoor zijn de verkregen uitkomsten onafhankelijk van eenige moeilijkheden, die wij bij de opstelling van de algemeene bewegingsvergelijkingen der electriciteit aantreffen.

Zoo brengt ons het onderzoek der terugkaatsing en breking tot de slotsom, dat aan MAXWELL's hypothese de voorrang boven de vroegere undulatietheorie moet toegekend worden. Ook de andere lichtverschijnselen belooft, in verband met die hypothese beschouwd, veel bij te dragen tot vermeerdering onzer kennis. Men denke slechts aan de kleurschifting, de draaiing van het polarisatievlak en de wijze, waarop deze met de moleculaire structuur samenhangt; verder aan de mechanische krachten, die misschien bij de lichtverschijnselen kunnen optreden en aan den invloed, dien uitwendige krachten, of de beweging der middenstoffen daarop uitoefenen. Eindelijk aan de emissie en absorptie van het licht en de stralende warmte.

Met betrekking tot de laatste verschijnselen ligt een belangrijke gevolgtrekking uit MAXWELL's theorie voor de hand. Wanneer het waar is, dat licht en stralende warmte in elektrische trillingen bestaan, dan is de onderstelling zeer natuurlijk, dat ook in de moleculen der lichamen, die deze trillingen in het omringende medium opwekken, elektrische bewegingen plaats hebben, waarvan de intensiteit met de temperatuur toeneemt. Dit denkbeeld, dat niet nieuw is, maar vooral aan de electromagnetische theorie van het licht een hoogen graad van waarschijnlijkheid ontleent, schijnt mij toe, zeer vruchtbaar te zijn. In de theorie der warmte mag men misschien van de beschouwing dier elektrische bewegingen niet onbelangrijke resultaten verwachten, vooral met 't oog op de energie

der bewegingen. die in de moleculen plaats hebben, en waarvan het bedrag tot nog toe tot groote moeilijkheden aanleiding gaf. Op het gebied der electriciteitsleer zou het genoemde denkbeeld kunnen voeren tot een verklaring van de warmteontwikkeling door den stroom, van de thermostroomen en de daarmede verwante verschijnselen. Eindelijk zou de theorie van het licht hebben aan te wijzen, hoe de bedoelde electricische bewegingen met den physischen en chemischen toestand der stof samenhangen, een samenhang, die aan de, in verrassende resultaten zoo rijke, spectraalanalyse ten grondslag ligt.

Wel verre dus van een definitieven vorm te hebben aangenomen eischt de theorie van MAXWELL nog opheldering van vele zaken, waarvan thans de verklaring niet, of slechts in ruwe trekken te geven is. Maar juist hierin is voor een deel het nut van elke uitbreiding onzer natuurkennis gelegen, dat zij ons duidelijker voor oogen stelt, wat er nog te doen overblijft, en de richting aangeeft, waarin men zich met goed gevolg bij verder onderzoek zal kunnen bewegen.

Faint, illegible text, possibly bleed-through from the reverse side of the page. The text is arranged in several lines and is mostly obscured by the paper's texture and discoloration.

## STELLINGEN.

---

### I.

De meening, dat het licht zou bestaan in trillingen eener veerkrachtige stof, wordt in vele opzichten door de verschijnselen der terugkaatsing en breking weersproken.

### II.

De electromagnetische theorie van het licht kan van die verschijnselen een bevredigende verklaring geven.

### III.

De door FRESNEL gegeven theorie der totale reflectie behoort verlaten te worden.

## IV.

De optische eigenschappen der metalen maken het niet alleen waarschijnlijk, dat de wet van OHM voor veranderlijke stroomen niet geldig is, maar geven zelfs recht tot de verwachting, dat men eens het bedrag der afwijking van die wet zal kunnen vaststellen.

## V.

Het is hoogst waarschijnlijk, dat in de moleculen van elk lichaam elektrische bewegingen plaats hebben, en dat men die in de theorie der warmte en bij het verklaren van de betrekkingen, die er tusschen deze en de electriciteit zijn opgemerkt, in rekening zal moeten brengen.

## VI.

Bij de elektrische verschijnselen speelt elke middenstof — ook het luchtledige — een voorname rol.

## VII.

De pogingen, door c. NEUMANN aangewend, om de electrodynameische en inductie-werkingen uit een voortplanting der potentiaal af te leiden, kunnen niet als geslaagd beschouwd worden.

## VIII.

De door SCHÖNBEIN gegeven verklaring van het ontstaan van den galvanischen stroom moet in overeenstemming worden gebracht met de theorie der electrolyse van CLAUDIUS.

## IX.

Dat REGNAULT door zijne metingen van de voortplantingssnelheid van het geluid (Mémoires de l'Acad. de France, T. XXXVII) bewezen zou hebben, dat deze van de intensiteit afhangt, is aan ge-  
gronden twijfel onderhevig.



## X.

De theoretische beschouwingen, die REGNAULT over dit onderwerp geeft, zijn niet juist.

## XI.

Ten onrechte meent HANSEMANN (Pogg. Ann., Erg. VI) dat volgens de dynamische gastheorie de temperatuur van een gas niet op elke hoogte dezelfde zou moeten zijn.

## XII.

Bij de behandeling der harmonische kogelfunctiën (coëfficiënten van LAPLACE) is de meest geschikte methode die, welke door MAXWELL in zijn »Treatise on Electricity and Magnetism» is aangegeven.

## XIII.

Aan de migratie-theorie van WAGNER komt niet boven, wel naast de theorie van DARWIN een plaats toe.

## XIV.

Bij een rangschikking der elementen behoort het lood in dezelfde groep geplaatst te worden als het silicium en het tin.

## XV.

Ter verklaring van de oscillerende beweging der uitstrooming, die men bij de komeet van HALLEY heeft waargenomen, zijn de beschouwingen van BESSEL meer aannemelijk dan die van ZÖLLNER.

---

Faint, illegible text at the top of the page, possibly bleed-through from the reverse side.

110

Faint, illegible text in the middle section of the page.

111

Faint, illegible text at the bottom of the page.

## I N H O U D.

---

	Bladz.
Inleiding . . . . .	1
EERSTE HOOFDSTUK.	
De theorie van FRESNEL . . . . .	4
TWEEDE HOOFDSTUK.	
De bewegingsvergelijkingen der electriciteit . . . . .	28
DERDE HOOFDSTUK.	
De theorie van MAXWELL. Terugkaatsing en breking van het licht door isotrope, niet-geleidende stoffen . . . . .	70
VIERDE HOOFDSTUK.	
De terugkaatsing en breking van het licht door kristallen . . . . .	94
VIJFDE HOOFDSTUK.	
De totale reflectie . . . . .	122
ZESDE HOOFDSTUK.	
De optische eigenschappen der metalen . . . . .	151

---

