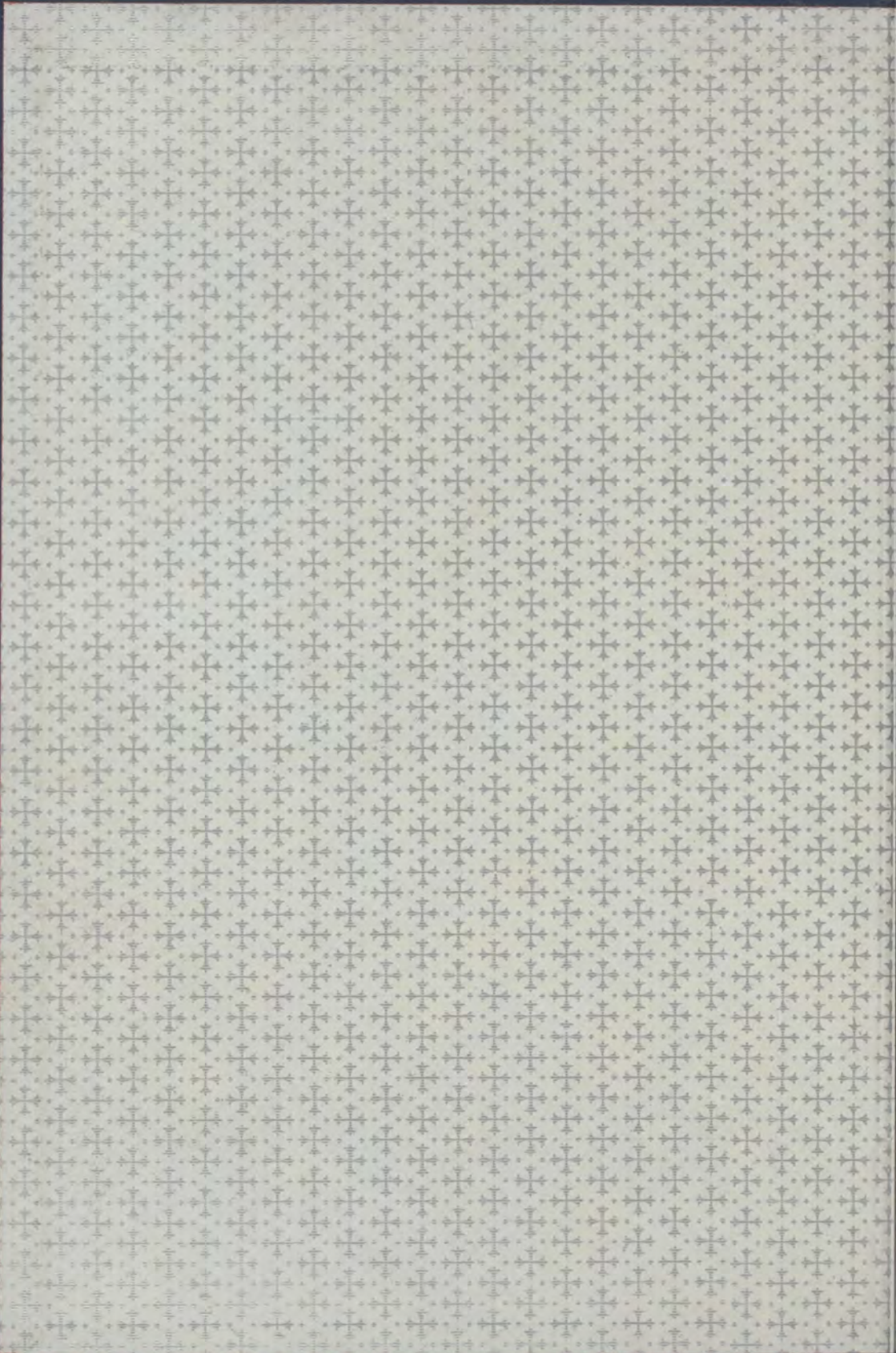
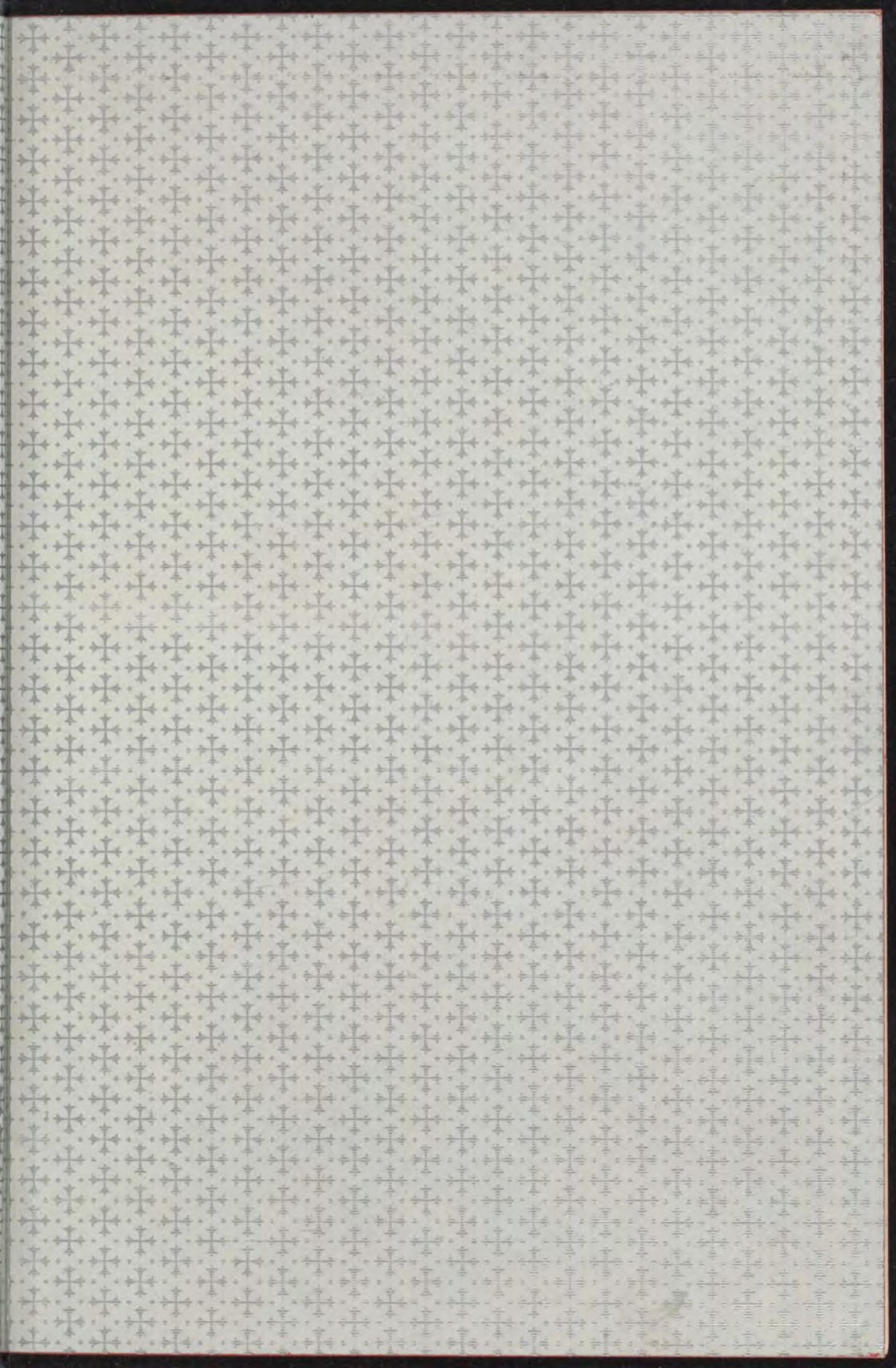


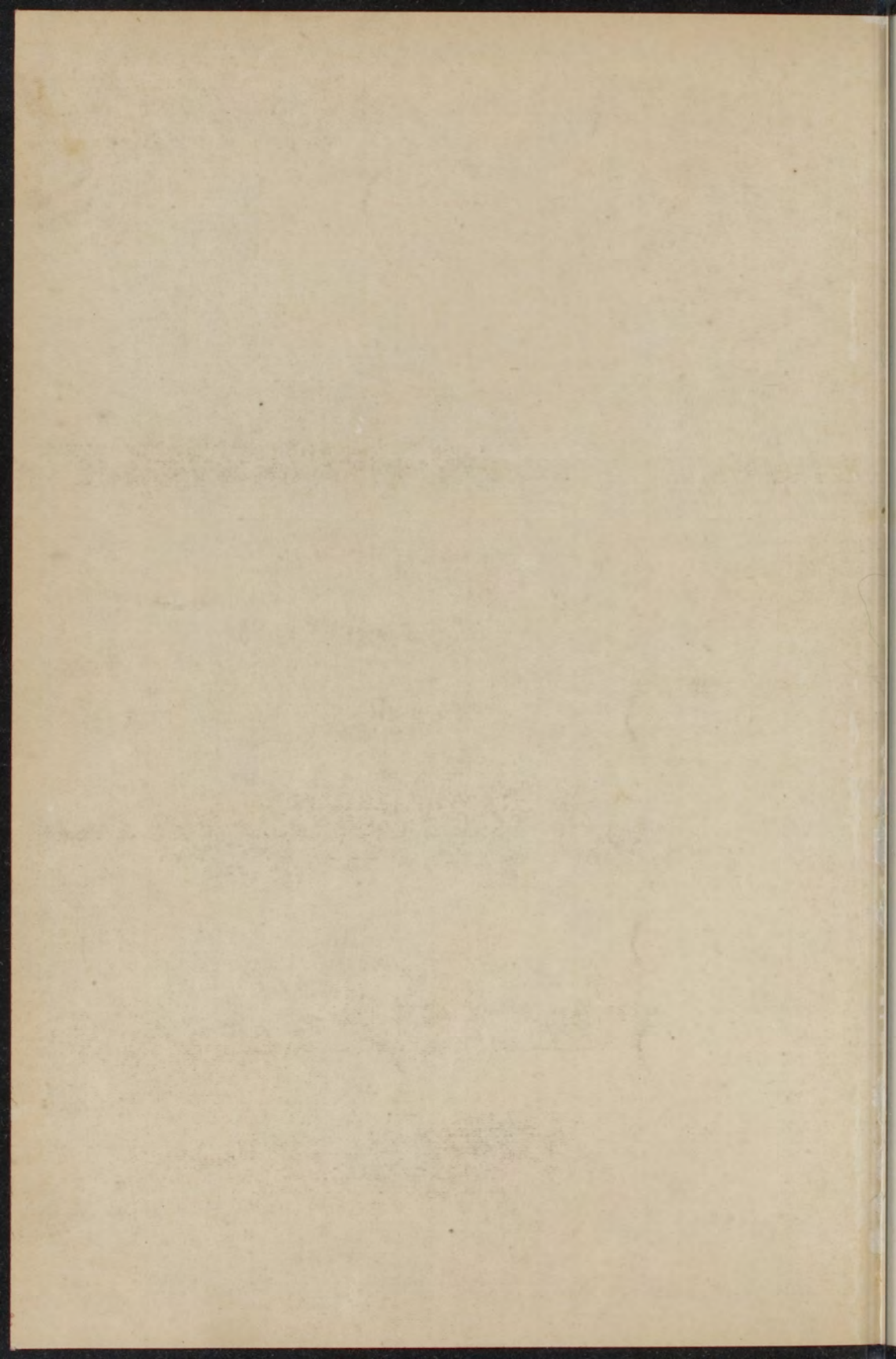
TOEPASSING
VAN HET
THEOREMA VAN FOURIER
IN DE THEORIE DER
BUIGINGSVERSCHIJNSELEN

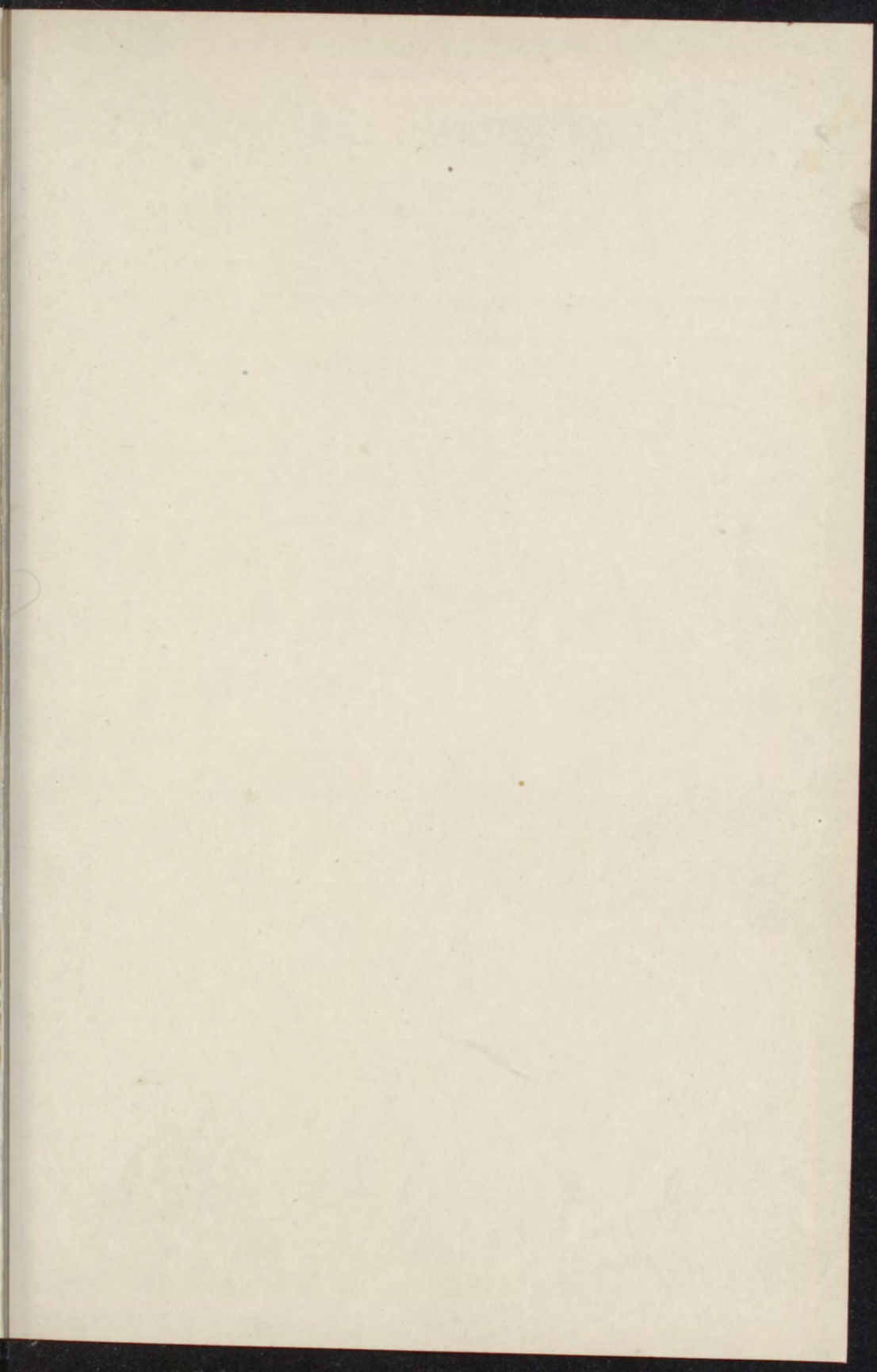
Diss Leiden

1900 nr 17









Universiteit Leiden



1 429 271 3

OVER DE TOEPASSING VAN HET THEOREMA VAN FOURIER

IN DE

THEORIE DER BUIGINGSVERSCHIJNSELEN.

Typ. J. VAN BOEKHOVEN, Utrecht.

8060.

OVER DE TOEPASSING VAN HET THEOREMA VAN FOURIER
 IN DE
 THEORIE DER BUIGINGSVERSCHIJNSELEN.

PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE

AAN DE RIJKSUNIVERSITEIT TE LEIDEN,

OP GEZAG VAN DEN RECTOR-MAGNIFICUS

D^R. H. A. LORENTZ,

HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE,

VOOR DE FACULTEIT TE VERDEDIGEN

op Woensdag den 4^{den} Juli 1900, des namiddags te 4 uren,

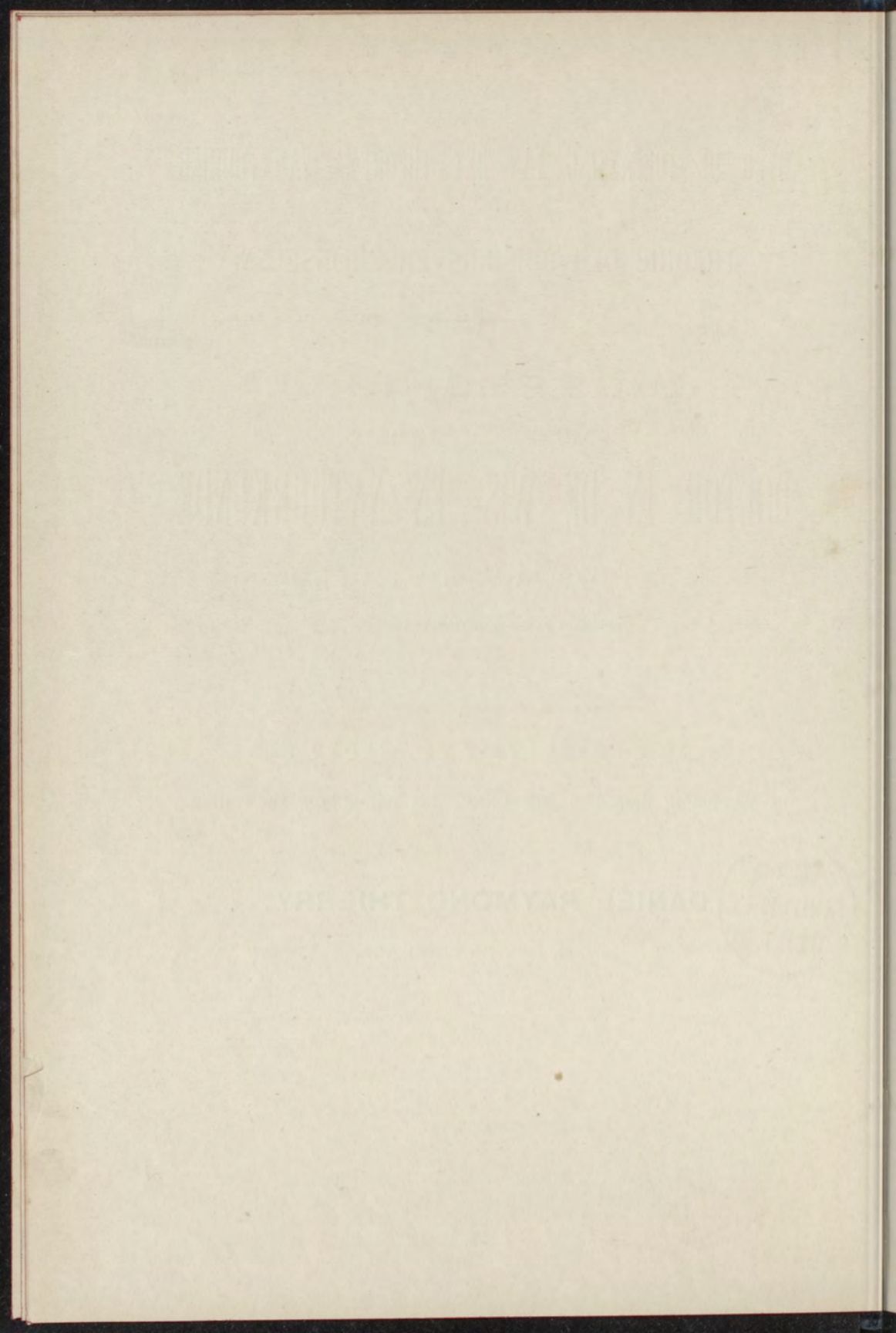
DOOR



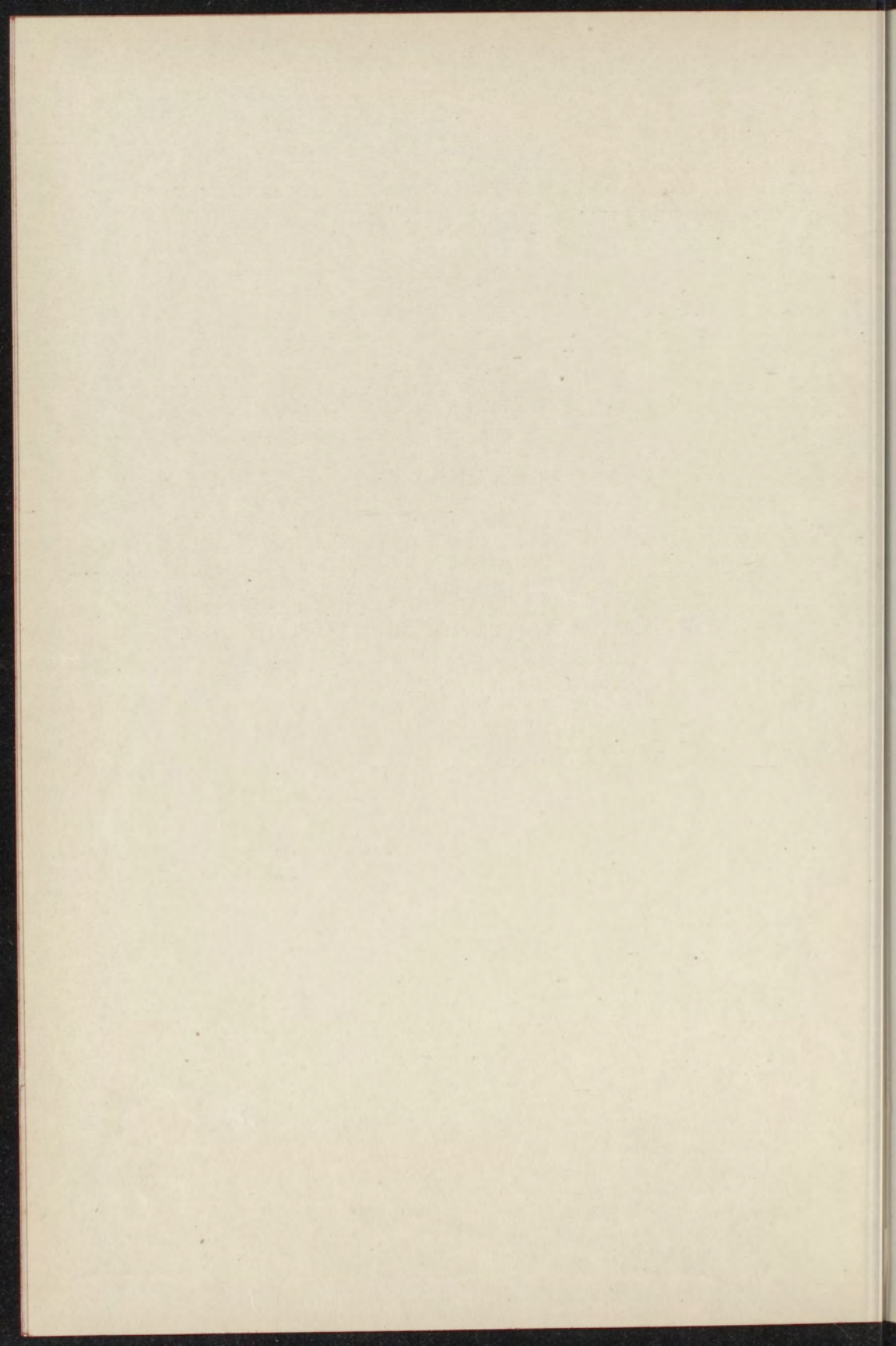
DANIËL RAYMOND THIERRY,

geboren te 's-GRAVENHAGE.

UTRECHT,
 J. H. VAN PEURSEM,
 1900.



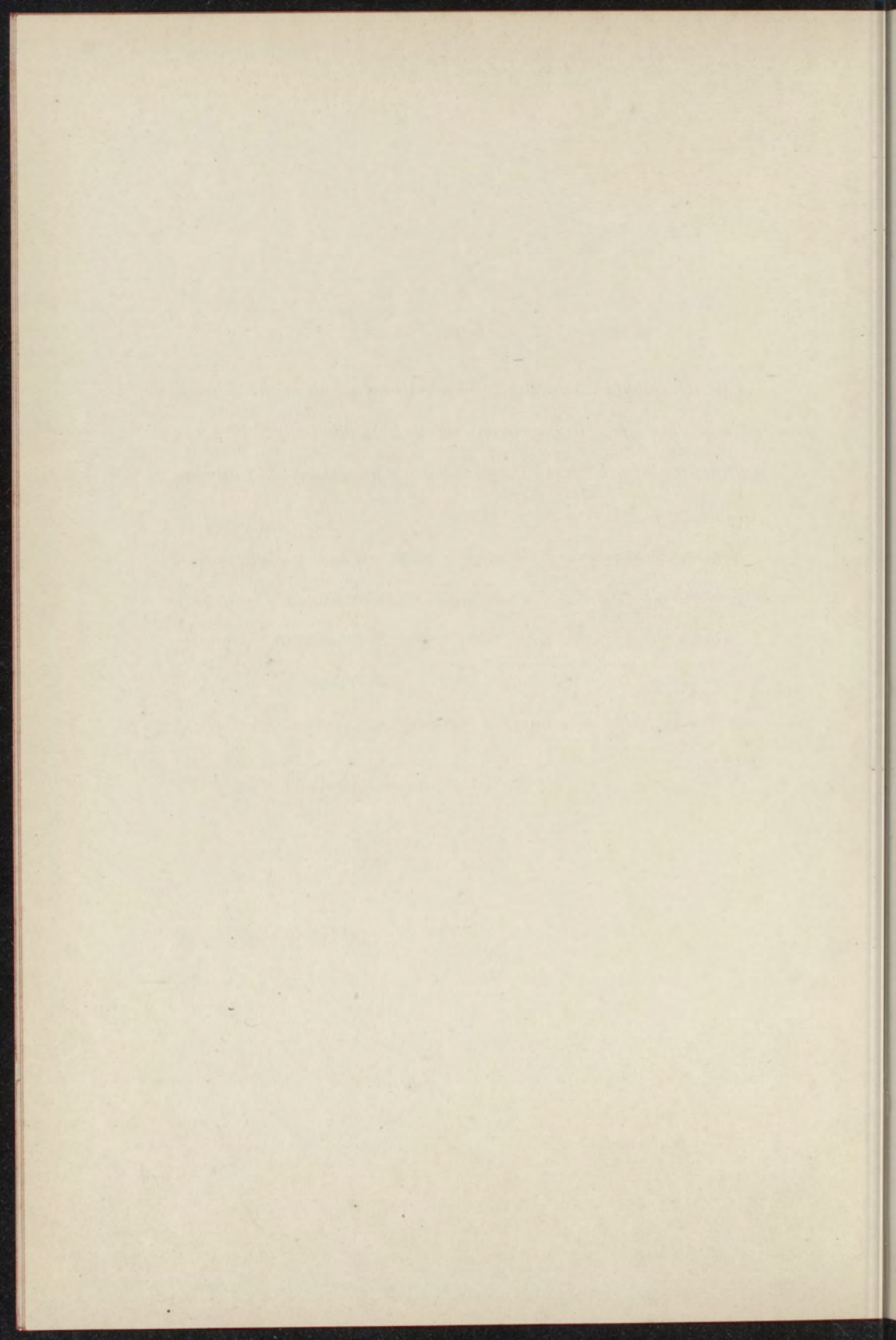
AAN DE NAGEDACHTENIS MIJNER OUDERS.



Bij het voltooiën van dit proefschrift betuig ik mijne erkentelijkheid aan de Hoogleeraren in de Faculteit der Wis- en Natuurkunde aan deze Universiteit, wier lessen ik indertijd het voorrecht heb gehad te volgen.

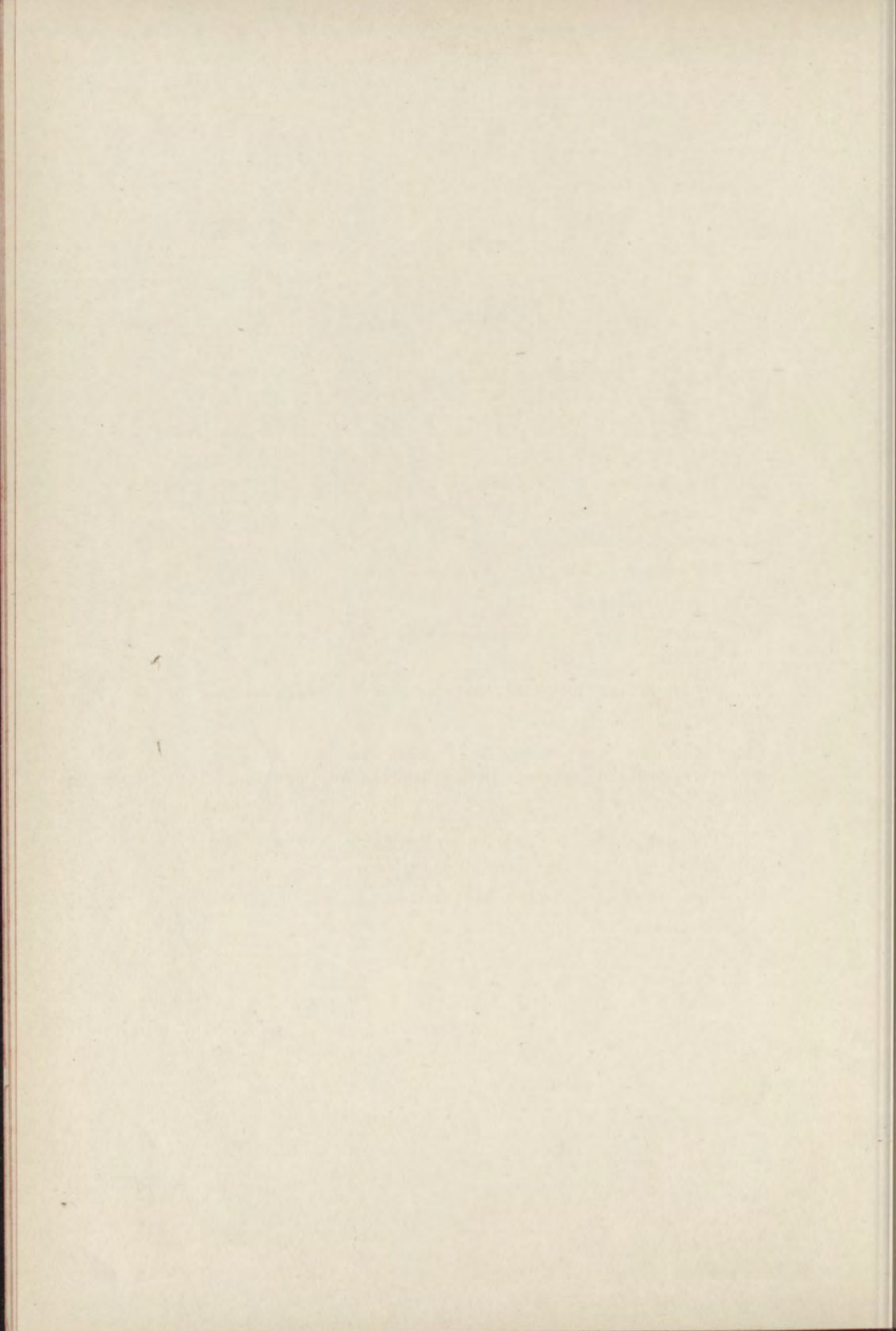
Een enkel woord van dankbare hulde zij ook gewijd aan de nagedachtenis van hen die niet meer onder de levenden behooren.

Inzonderheid geldt mijn dank U, Hooggeleerde LORENTZ, Hooggeachte Promotor! zoowel voor Uw onderwijs als voor Uwe welwillende hulp, mij bij de vervaardiging van dit proefschrift verleend.



INHOUD.

Hoofdst.	Bladz.
I. INLEIDING	1
II. Het Theorema van FOURIER	3
III. Diffractie door een onbepaald aantal openingen van willekeurige gedaante	9
IV. Diffractie door ééne spleetvormige opening	19
V. Het traliescherm	34
VI. Andere wijze van toepassing van het Theorema van FOURIER	48
VII. De werkelijke tralieschermen. Diffractie bij terugkaatsing.	54
VIII. De cirkelvormige opening	65
IX. Combinatie van verschillende diffracteerende openingen. Twee gekruiste spleten. De parallelogramvormige opening.	71
X. Twee gekruiste tralieschermen	75
XI. Combinatie van den enkelen en den dubbelen rooster met groote openingen van verschillenden vorm.	83
XII. Het onderzoek van Lord RAYLEIGH en dat van Dr. SIRKS	87
STELLINGEN	93



I.

INLEIDING.

Wij stellen ons voor, in dit proefschrift hoofdzakelijk die diffractieverschijnselen te behandelen, welke men waarneemt, wanneer het licht invalt op een ondoorschijnend scherm, waarin zich ééne of meer openingen van verschillende gedaante bevinden. De vraag bij het onderzoek der *Diffractie-* of *Buigingsverschijnselen* is steeds: te berekenen, van welken aard de lichtbeweging in eenig punt achter een gegeven scherm zal worden, wanneer de beweging vóór het scherm gegeven is. Het Theorema van FOURIER, dat wij bij de beschouwing en verklaring dezer verschijnselen zullen toepassen, geeft niet *eene nieuwe verklaring* daarvan aan de hand, maar toont op eene andere dan de gewone wijze het verband aan, dat er bestaat tusschen de invallende lichtbeweging en de daaruit ontstane golfstelsels of „lichtbundels”, die „de buigingsbundels” genoemd worden.

Wij zullen (althans vooreerst) aannemen, dat het scherm een onbegrensd, ondoorschijnend plat vlak is, welks dikte wij verwaarloozen, en waarin zich eene of meer openingen bevinden, welker gedaante wij vooreerst niet nader bepalen. Het invallende licht, dat wij homogeen onderstellen, bestaat

uit een stelsel platte golven: het is dus afkomstig van eene oneindig ver verwijderde bron (bij voorbeeld eene ster). De richting van het invallend licht nemen wij ter wille der algemeenheid scheef met betrekking tot het vlak van het scherm; alleen nemen wij den invalshoek klein. Omtrent de trillingsrichting in het invallende licht zullen wij vooreerst niets naders onderstellen, daar de resultaten, die men verkrijgt, van die richting onafhankelijk zijn.

Kiezen wij het vlak van het scherm tot $x y$ -vlak, en noemen wij de richtingshoeken van de invallende lichtstralen α, β, γ , dan wordt de evenwichtsverstoring bij de invallende lichtbeweging voorgesteld door:

$$q = a \cos 2 \pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma}{\lambda} \right),$$

waarin a, T en λ de gewone beteekenis hebben. Voor $z = 0$ gaat deze vergelijking over in:

$$q = a \cos 2 \pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x \cos \alpha + y \cos \beta}{\lambda} \right),$$

en dit is de lichtbeweging in het diffracterend vlak.

Daar de invallende beweging bekend is, is ook de beweging onmiddellijk achter het scherm bekend. Wij hebben echter alleen te rekenen met de doorschijnende deelen van het scherm, daar de evenwichtsverstoring achter de ondoorschijnende deelen $= 0$ is. Om nu de beweging achter het scherm na te gaan, hebben wij de totale verstoring op eene bepaalde wijze in elementaire verstoringen te ontbinden. Het Theorema van FOURIER stelt ons daartoe in staat.

II.

Het Theorema van Fourier.

FOURIER heeft aangetoond, dat men eene willekeurige periodieke functie met de periode P kan ontbinden in goniometrische functiën met de perioden $P, \frac{1}{2}P, \frac{1}{3}P, \dots$; en dat men zelfs eene geheel willekeurige, niet periodieke functie in goniometrische functiën kan splitsen ¹⁾.

Het bewijs voor het Theorema van FOURIER te geven, zou ons te ver afleiden: wij bepalen ons tot een kort overzicht.

Men heeft vooreerst, wanneer $f(x)$ willekeurig is, voor alle waarden van x tusschen $-\pi$ en $+\pi$:

$$f(x) = \frac{1}{2}b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \dots + b_n \cos nx + \dots + c_1 \sin x + c_2 \sin 2x + \dots + c_n \sin nx + \dots \quad (1)$$

waarin de coëfficiënten de waarden hebben:

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\xi) \cos m \xi \, d\xi,$$

$$c_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\xi) \sin m \xi \, d\xi.$$

¹⁾ FOURIER, Théorie analytique de la chaleur, chap III. Men zie verder: SCHLÖMILCH, Compendium der höheren Analysis, II: Die periodischen Reihen; RIEMANN, Partielle Differentialgleichungen und deren Anwendung auf physikalische Fragen, II Abschnitt.

Deze reeksontwikkeling gaat alleen door voor $-\pi < x < +\pi$. Is $f(x)$ periodiek met de periode 2π , dan geldt de reeks voor *alle* waarden van x .

Men kan echter eene functie $f(x)$ niet slechts voor het genoemde interval, maar voor alle waarden van x tusschen $-h$ en $+h$, waarbij de grootheid h willekeurig gekozen is, door eene dergelijke reeks als (1) voorstellen. Men heeft dan:

$$f(x) = \frac{1}{2} b_0 + b_1 \cos \frac{\pi x}{h} + b_2 \cos \frac{2\pi x}{h} + \dots + b_n \cos \frac{n\pi x}{h} + \dots + c_1 \sin \frac{\pi x}{h} + c_2 \sin \frac{2\pi x}{h} + \dots + c_n \sin \frac{n\pi x}{h} + \dots \quad (2)$$

waarin:

$$\left. \begin{aligned} b_m &= \frac{1}{h} \int_{-h}^{+h} f(\xi) \cos \frac{m\pi\xi}{h} d\xi, \\ c_m &= \frac{1}{h} \int_{-h}^{+h} f(\xi) \sin \frac{m\pi\xi}{h} d\xi. \end{aligned} \right\} \dots \quad (3)$$

Deze ontwikkeling, die bij eene willekeurige functie $f(x)$ alleen geldt voor $-h < x < +h$, zal klaarblijkelijk voor *alle* waarden van x doorgaan, wanneer de functie periodiek is met de periode $2h$. Dan bevat de vergelijking (2) dus de ontbinding eener periodieke functie in tal van goniometrische functiën.

In sommige gevallen komen bij de ontwikkeling alleen termen met een cosinus voor, in andere alleen termen met een sinus. Het eerste is het geval, wanneer de functie $f(x)$ de eigenschap heeft $f(-x) = f(x)$: dan toch worden de coëfficiënten $c = 0$. Het tweede geval heeft plaats, wanneer $f(-x) = -f(x)$ is, daar dan de b 's $= 0$ worden. Verandert bij omkeering van het teeken der veranderlijke de functie niet alleen van teeken maar ook in absolute waarde,

dan komen in de reeksontwikkeling sinussen en cosinussen beide voor.

Door de grootheid h in de formule (2), welke grootheid willekeurig kan worden gekozen, onbepaald te laten toenemen, komt men tot eene ontwikkeling, die, ook bij eene niet periodieke functie, voor alle waarden van x van $-\infty$ tot $+\infty$ doorgaat. Brengt men namelijk de waarden der coëfficiënten b en c (3) in (2) over, dan komt er na eenige herleiding:

$$f(x) = \frac{1}{h} \left[\frac{1}{2} \int_{-h}^{+h} f(\xi) d\xi + \sum_{m=1}^{m=\infty} \int_{-h}^{+h} f(\xi) \cos \frac{m\pi}{h} (x - \xi) d\xi \right] \dots (4)$$

Thans $\frac{m\pi}{h}$ door μ vervangende, en tot de limiet overgaande, vindt men ¹⁾:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\mu \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \mu (x - \xi) d\xi \dots (5)$$

Deze vorm, aldus uitgebreid, is de uitdrukking van het theorema van FOURIER voor ééne veranderlijke. De reeks (2) of (4), die *de Reeks van FOURIER* heet, is overgegaan in eene dubbele integraal: men noemt deze *de Integraal van FOURIER*.

Het is van belang, in dezen vorm (5) de afzonderlijke goniometrische deelen of termen goed te onderscheiden. Men verkrijgt zoodanigen term door aan den factor μ , waarmede x onder het cosinusteeken vermenigvuldigd is, eene bepaalde waarde toe te kennen: men neemt dus één element van die

¹⁾ FOURIER, Théorie etc. chap. IX sect. I. Zie ook SCHLÖMILCH en RIEMANN t. a. pl.

integraal, maar voert de integratie naar μ niet uit. Dus is één der genoemde deelen:

$$\frac{d\mu}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \mu (x - \xi) d\xi$$

of:

$$\frac{d\mu}{\pi} \cos \mu x \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \mu \xi d\xi + \frac{d\mu}{\pi} \sin \mu x \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \sin \mu \xi d\xi. \quad (6)$$

Is de functie $f(x)$ (en dus ook $f(\xi)$) gegeven, dan worden de hier voorkomende integralen bekende functiën van μ ; en is de waarde van μ vastgesteld, dan zijn de waarden der integralen geheel bekend. De uitdrukking (6) is dus van den vorm:

$$\frac{d\mu}{\pi} \left(\chi_1(\mu) \cos \mu x + \chi_2(\mu) \sin \mu x \right),$$

wat nog tot:

$$\frac{d\mu}{\pi} \chi(\mu) \cos(\mu x - r)$$

kan gebracht worden. Door dezen vorm naar μ te integreeren tusschen de grenzen 0 en ∞ verkrijgt men de geheele waarde van $f(x)$.

De periode van het ééne boven beschouwde gedeelte van $f(x)$ is $\frac{2\pi}{\mu}$. Daar μ alle waarden van 0 tot ∞ kan hebben, komen alle mogelijke perioden voor, en niet slechts enkele bepaalde perioden, zooals in (2) of (4). De coëfficiënt van elk periodiek gedeelte is nu echter, daar hij $d\mu$ als factor bevat, oneindig klein.

De reeks en de integraal van FOURIER gelden ook voor functiën van twee en meer veranderlijken. Wij hebben voor ons doel alleen de ontwikkeling eener functie van twee veranderlijken noodig.

Laat $f(x, y)$ eene gegeven functie zijn, die in eene dubbele reeks ontwikkeld moet worden. Wij beginnen met de ontwikkeling te laten gelden voor $-h < x < +h$ en $-k < y < +k$, en voor geene andere waarden. Schrijven we eerst de reeks (4) in de gedaante:

$$f(x) = \frac{1}{2h} \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \int_{-h}^{+h} f(\xi) \cos \frac{m\pi}{h} (x - \xi) d\xi; \quad (7)$$

de eerste term van (4) komt dan overeen met $m = 0$ in (7). Passen we nu de reeksontwikkeling (4) op $f(x, y)$ toe, dan vinden we vooreerst, wanneer we x als veranderlijke beschouwen:

$$f(x, y) = \frac{1}{2h} \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \int_{-h}^{+h} f(\xi, y) \cos \frac{m\pi}{h} (x - \xi) d\xi. \quad (8)$$

Op gelijke wijze is in deze reeks voor elke bepaalde waarde van ξ , wanneer we y als veranderlijke beschouwen:

$$f(\xi, y) = \frac{1}{2k} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \int_{-k}^{+k} f(\xi, \eta) \cos \frac{n\pi}{k} (y - \eta) d\eta. \quad (9)$$

Brengen we dit over in (8), dan verkrijgen we voor $f(x, y)$:

$$f(x, y) = \frac{1}{4hk} \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \int_{-h}^{+h} \int_{-k}^{+k} f(\xi, \eta) \times \\ \times \cos \frac{m\pi}{h} (x - \xi) \cos \frac{n\pi}{k} (y - \eta) d\xi d\eta. \quad (10)$$

Deze reeks geldt in het algemeen voor alle waarden van x tusschen $-h$ en $+h$ en van y tusschen $-k$ en $+k$, en voor geene buiten deze intervallen. Is echter $f(x, y)$ eene periodieke functie zoowel van x als van y , en is daarbij de periode met betrekking tot x , $2h$ en met betrekking tot y , $2k$, dan geldt zij voor *alle* waarden van de beide veranderlijken.

De functie $f(x, y)$ is zoo ontwikkeld in eene reeks, waarvan elke term periodiek is met betrekking tot x en y . Vat men de vier termen, die zich alleen onderscheiden door de teekens van m en n samen, dan verkrijgt men den algemeenen term:

$$\frac{1}{hk} \int_{-h}^{+h} \int_{-k}^{+k} f(\xi, \eta) \cos \frac{m\pi}{h}(x - \xi) \cos \frac{n\pi}{k}(y - \eta) d\xi d\eta. \quad (11)$$

Men heeft nu naar m en n van $+1$ tot $+\infty$ te sommeeren, en aan de aldus verkregen dubbele reeks nog den term — met den factor $\frac{1}{4hk}$ — toe te voegen, die uit (10) voor $m = 0$ en $n = 0$ volgt.

Men kan, evenals boven voor ééne veranderlijke gedaan is, ook hier van de reeks tot de integraal van FOURIER overgaan. Men laat daartoe beide h en k voortdurend aangroeien, en vindt dan, als men $\frac{m\pi}{h}$ en $\frac{n\pi}{k}$ door μ en ν vervangt, bij de grens:

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty d\mu d\nu \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \eta) \times \\ \times \cos \mu(x - \xi) \cos \nu(y - \eta) d\xi d\eta. \quad (12)$$

Hiermede is werkelijk de willekeurige functie $f(x, y)$ verdeeld in oneindig vele deelen, die elk op zich zelf goniometrische functiën zijn van x en y . Een dier deelen is:

$$\frac{d\mu d\nu}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \eta) \cos \mu(x - \xi) \cos \nu(y - \eta) d\xi d\eta. \quad (13)$$

III.

Diffractie door een onbepaald aantal openingen van willekeurige gedaante.

De lichtbeweging, die in de richting (α, β, γ) op het diffracterend vlak invalt, hebben wij voorgesteld door:

$$q = a \cos 2 \pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma}{\lambda} \right). \quad (14)$$

Denken we ons nu een vlak S *onmiddellijk* achter het diffracterend vlak, dan zal de lichtbeweging in de ruimte achter het scherm voortvloeien uit die in S . Wij hebben dus vooreerst na te gaan, wat er in dit vlak gebeurt.

Voor S is $z = 0$, en dus:

$$q = a \cos 2 \pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x \cos \alpha + y \cos \beta}{\lambda} \right) . . . \quad (15)$$

Had nu q *overal* in S deze waarde, dan zou de lichtbeweging in de ruimte aan de andere zijde van S gemakkelijk aan te geven zijn. De vergelijking (15) zou namelijk overal gelden, indien er in 't geheel geen scherm ware; en de beweging achter S zou dan klaarblijkelijk de ongestoorde voortzetting zijn van de invallende beweging, en dus, evenals deze, door de formule (14) worden voorgesteld. In het

algemeen kan men de beweging achter S aangeven, die tweegebracht wordt door eene over het geheele vlak uitgestrekte evenwichtsverstoring van den vorm (15), onverschillig hoe die evenwichtsverstoring tot stand kome. Immers men kan zich eene verstoring langs S , die door eene goniometrische functie van x en y wordt voorgesteld, altijd ontstaan denken uit een invallend stelsel platte golven; de beweging achter S , die uit de bedoelde verstoring voortvloeit, zal dus niets anders zijn dan de voortzetting van dat stelsel. Wij zullen dit denkbeeld straks nader uitwerken.

Gaan wij thans tot het vraagstuk der diffractie over. Wij onderstellen dat zich in het scherm een onbepaald aantal openingen van willekeurige gedaante bevinden. De functie ϱ heeft nu de waarde (15) alleen in de gedeelten van S , overeenkomende met die gedeelten van het scherm, welke de lichtbeweging doorlaten, terwijl zij achter de tusschengelegen ondoorschijnende gedeelten $= 0$ is: zij is dus niet periodiek. Wij kunnen haar echter door middel van het theorema van FOURIER ontbinden in een aantal andere functiën, die elk op zich zelve periodiek zijn met betrekking tot x en y . Aan elk dezer deelen beantwoordt een stelsel platte golven achter S , en te zamen geven zij de geheele lichtbeweging achter dat vlak. Wij hebben dus de lichtbeweging te zoeken, die aan elk dezer deelen beantwoordt.

Daar de lichtbeweging in S niet periodiek is, en er niets naders omtrent die lichtbeweging gegeven is, moeten wij om de functie $\varrho = f(x, y)$ (15) te ontbinden, *de integraal* en niet *de reeks* van FOURIER gebruiken. Wij hebben dan:

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty d\mu d\nu \int \int f(\xi, \eta) \times \\ \times \cos \mu (x - \xi) \cos \nu (y - \eta) d\xi d\eta.$$

Noemen wij een van de deelen dezer ontwikkeling u , dan is:

$$u = a \frac{d\mu}{\pi^2} \frac{d\nu}{\pi^2} \iint \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\xi \cos \alpha + \eta \cos \beta}{\lambda} \right) \times \\ \times \cos \mu (x - \xi) \cos \nu (y - \eta) d\xi d\eta \quad . \quad . \quad (16)$$

waarin nu, als men ξ en η als de coördinaten van een punt in S beschouwt, alleen over de deelen van S achter de openingen moet geïntegreerd worden. Hetzelfde geldt voor alle volgende integralen.

Door eene bekende formule voor het product van drie cosinussen toe te passen kan men u splitsen in vier deelen, die alle begrepen zijn in den vorm:

$$u = a \frac{d\mu}{4} \frac{d\nu}{\pi^2} \iint \cos \left\{ \left(2\pi \frac{t}{T} \pm \mu x \pm \nu y \right) - \right. \\ \left. - \left(\frac{2\pi \cos \alpha}{\lambda} \pm \mu \right) \xi - \left(\frac{2\pi \cos \beta}{\lambda} \pm \nu \right) \eta \right\} d\xi d\eta \quad . \quad (17)$$

Men moet hier namelijk de vier mogelijke combinaties der teekens voor μ en ν nemen.

Het eerste deel van u , beantwoordende aan de positieve teekens, zullen wij u_1 noemen. Stelt men:

$$\iint \cos \left\{ \left(\frac{2\pi \cos \alpha}{\lambda} + \mu \right) \xi + \right. \\ \left. + \left(\frac{2\pi \cos \beta}{\lambda} + \nu \right) \eta \right\} d\xi d\eta = A_1 \cos \Phi_1 \quad . \quad . \quad (18)$$

en

$$\iint \sin \left\{ \left(\frac{2\pi \cos \alpha}{\lambda} + \mu \right) \xi + \right. \\ \left. + \left(\frac{2\pi \cos \beta}{\lambda} + \nu \right) \eta \right\} d\xi d\eta = A_1 \sin \Phi_1 \quad . \quad . \quad (19)$$

dan wordt:

$$u_1 = a \frac{d\mu}{4} \frac{d\nu}{\pi^2} A_1 \cos \left(2\pi \frac{t}{T} + \mu x + \nu y - \Phi_1 \right) \quad (20)$$

Worden de in (18) en (19) aangegeven integraties uitgevoerd, dan verkrijgt men voor $A_1 \cos \Phi_1$ en $A_1 \sin \Phi_1$, dus ook voor A_1 en Φ_1 bekende functiën van μ en ν . Ook de drie andere deelen van u , nam. u_2 , u_3 , u_4 , kunnen op dezelfde wijze behandeld worden. Men verkrijgt dan uitdrukkingen, die resp. de factoren:

$$\cos\left(2\pi \frac{t}{T} + \mu x - \nu y - \Phi_2\right), \cos\left(2\pi \frac{t}{T} - \mu x + \nu y - \Phi_3\right)$$

$$\text{en} \quad \cos\left(2\pi \frac{t}{T} - \mu x - \nu y - \Phi_4\right)$$

bevatten.

Aan elk der deelen, waarin we de invallende lichtbeweging ontbonden hebben, beantwoordt een golfstelsel, dat zich in de ruimte achter het diffracterend vlak voortplant. De amplitudo's hangen af van integralen over de openingen, die men niet nader kan berekenen, zoolang men niet tot bijzondere gevallen overgaat.

Het is gemakkelijk aan te toonen, dat men bij de gewone methode tot dezelfde integralen komt als bij de toepassing van het theorema van FOURIER. Korteitshalve laten wij echter de nadere aanwijzing hiervan achterwege.

Denken wij ons nu een plat golfstelsel, dat zich in de ruimte achter S in eene richting $(\alpha', \beta', \gamma')$ voortplant, dan kan dit voorgesteld worden door:

$$\varrho' = \alpha' \cos \left\{ 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x \cos \alpha' + y \cos \beta' + z \cos \gamma'}{\lambda} \right) - \Phi_1 \right\}. \quad (21)$$

De lichtbeweging, door dit stelsel in het xy -vlak veroorzaakt, wordt voorgesteld door:

$$\varrho' = \alpha' \cos \left\{ 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x \cos \alpha' + y \cos \beta'}{\lambda} \right) - \Phi_1 \right\}. \quad (22)$$

Opdat nu dit stelsel overeenkome met een der deelen van u , b. v. met het eerste deel u_1 (20), moet voldaan worden aan de voorwaarden:

$$\left. \begin{aligned} \alpha' &= \frac{a \, d \, \mu \, d \, v}{4 \, \pi^2} A_1, \\ \mu &= -\frac{2 \, \pi \, \cos \alpha'}{\lambda}, \quad v = -\frac{2 \, \pi \, \cos \beta'}{\lambda} \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \quad (23)$$

waaruit:

$$\cos \alpha' = -\frac{\mu \, \lambda}{2 \, \pi}, \quad \cos \beta' = -\frac{v \, \lambda}{2 \, \pi}.$$

Kent men aan μ en v bepaalde waarden toe, dan kunnen α' en β' uit de formules berekend worden. Aan elk stel waarden van μ en v beantwoordt dus een gediffracteerd golfstelsel van bepaalde richting; of liever, wanneer men met u_2 , u_3 , u_4 op dezelfde wijze handelt als met u_1 , een viertal gediffracteerde golfstelsels, waarvan de voortplantings-richtingen bepaald worden door:

$$\cos \alpha' = \mp \frac{\mu \, \lambda}{2 \, \pi}, \quad \cos \beta' = \mp \frac{v \, \lambda}{2 \, \pi}.$$

De doeltreffendheid van de hier uiteengezette handelwijze, zoowel in het algemeen als in de later te beschouwen bijzondere gevallen blijkt vooral, wanneer men, zooals bij de waarnemingsmethode van FRAUNHOFER, op eenigen afstand achter het scherm eene convergeerende lens, de objectieflens eens kijkers plaatst, welker hoofdas de richting der z -as heeft, en dan de lichtverdeling in het focale vlak dezer lens nagaat.

Uit elk der deelen, waarin wij de functie, die den invalenden lichtbundel voorstelt, door middel van de integraal van FOURIER ontbonden hebben, ontstaat, zooals wij zagen, in de ruimte achter S een plat golfstelsel, dat zich voort-

plant in eene richting, welke met die van het invallend licht een zekeren hoek maakt. Elk dezer golfstelsels beantwoordt aan eene bepaalde waarde van μ en ν , en zal zich concentreeren in het brandpunt op de bijas, welke richting overeenkomt met die van het golfstelsel. (In de taal der undulatietheorie zou dit moeten luiden: dat de invallende platte golven na den doorgang door de lens in convergeerende sphaerische golven overgaan. Korthedshalve zullen we ons echter uitdrukken als boven). Om na te gaan, hoe de lichtsterkte in het focale vlak van punt tot punt verandert, heeft men dus slechts te onderzoeken, hoe de resulterende amplitudo varieert, wanneer men aan μ en ν alle mogelijke waarden toekent.

Op den regel, dat aan elke waarde van μ en ν een gediffracteerd golfstelsel van bepaalde richting beantwoordt, bestaat de volgende uitzondering. De waarden, die men aan μ en ν moet geven, loopen van 0 tot ∞ . Zoodra nu μ of ν grooter dan $\frac{2\pi}{\lambda}$ wordt, kan aan de formules (23) niet meer door reële waarden van α' en β' voldaan worden: aan de deelen der in het vlak S bestaande evenwichtsverstoring, voor welke μ en ν dergelijke groote waarden hebben, beantwoordt dus geen stelsel platte golven achter het scherm. Op deze zelfde moeielijkheid stuit men zelfs reeds bij kleinere waarden van μ en ν . Het is namelijk, zal men eene reële voortplantingsrichting vinden, niet voldoende dat $\cos \alpha'$ en $\cos \beta'$ beide kleiner dan 1 zijn: ook $\cos^2 \alpha' + \cos^2 \beta'$ moet minder dan 1 bedragen. Daartoe wordt blijkens de formules (23) vereischt, dat:

$$\mu^2 + \nu^2 < \frac{4\pi^2}{\lambda^2}$$

zij. De vraag is nu, welke bewegingstoestanden achter het vlak S beantwoorden aan die waarden van μ en ν voor welke

$$\mu^2 + \nu^2 > \frac{4 \pi^2}{\lambda^2}$$

wordt.

De algemeene vorm der deelen, waarin wij met behulp van het theorema van FOURIER de invallende lichtbeweging ontbinden is:

$$u = B \cos \left(2 \pi \frac{t}{T} + \mu x + \nu y + \varepsilon \right). \quad \dots \quad (24)$$

De hierdoor voorgestelde evenwichtsverstoring verandert met x en y op eene wijze die wij niet nader behoeven toe te lichten. Het is voldoende er de aandacht op te vestigen, dat langs elke rechte lijn met de vergelijking:

$$\mu x + \nu y = C$$

u overal dezelfde waarde heeft, en dat, wanneer men een aantal lijnen trekt met de vergelijkingen:

$$\mu x + \nu y = C, C + 2 \pi, C + 4 \pi, \dots$$

langs elke dezer lijnen steeds dezelfde waarde van u gevonden wordt. Wij kunnen een dergelijk stelsel evenwijdige rechte lijnen een stelsel lijnen van gelijke phase, een *isophasisch* stelsel noemen. Klaarblijkelijk heeft elk der deelen, waarin wij door het theorema van FOURIER de beweging langs S splitsen, zijn eigen isophasisch stelsel. De richting daarvan wordt bepaald door de verhouding van μ en ν , terwijl de afstand van twee op elkander volgende isophasische lijnen bepaald wordt door:

$$l = \frac{2 \pi}{\sqrt{\mu^2 + \nu^2}},$$

welke grootheid wij de periode langs het vlak S kunnen

noemen. Daar nu μ en ν moeten variëeren van 0 tot ∞ komen in den regel alle mogelijke richtingen van isophasische lijnen voor, terwijl ook l alle mogelijke waarden tusschen 0 en ∞ kan verkrijgen: aan de eerste termen in de ontwikkeling van FOURIER, met kleine μ en ν beantwoorden dan groote waarden van de periode l , terwijl in de verdere termen der reeks (of der integraal) met grootere waarden van μ en ν steeds kleinere waarden van de periode overeenkomen.

Zoals wij gezien hebben, zal zich dus aan den beschouwdan bewegingstoestand langs het platte vlak, zoolang l niet te klein is, een stelsel van enkelvoudige trillingen met platte golven kunnen aansluiten. Men kan namelijk bij zoodanigen bewegingstoestand eene reeks van golffronten aanbrengen op afstanden $= \lambda$ van elkander gelegen; in elk dezer vlakken is dan de bewegingstoestand dezelfde. De bedoelde aansluiting vereischt nu alleen, dat de rechte lijnen, volgens welke de zöoeven genoemde reeks van golffronten het vlak S snijden, samenvallen met de in dit vlak bestaande isophasische lijnen. Daartoe moet vooreerst de voortplantingsrichting in de ruimte achter S loodrecht staan op de isophasische lijnen in S ; en ten tweede moet, wanneer ϑ de hoek is, dien deze voortplantingsrichting met de normaal op S maakt,

$$\frac{\lambda}{\sin \vartheta} = l$$

zijn: immers $\frac{\lambda}{\sin \vartheta}$ is de afstand der rechte lijnen, volgens welke het beschouwde stelsel golffronten door S gesneden wordt. Wij vinden dus:

$$\sin \vartheta = \frac{\lambda}{l} = \frac{\lambda \sqrt{\mu^2 + \nu^2}}{2\pi}$$

zoolang dus $l > \lambda$, d. i. $\mu^2 + \nu^2 < \frac{4\pi^2}{\lambda^2}$ is, heeft men met een stelsel platte golven in de ruimte te doen, en is de richting dier golven geheel bepaald.

Dat nu een dergelijk golfstelsel niet kan worden aangegeven zoodra de periode langs het vlak S kleiner dan λ wordt, is onmiddellijk duidelijk: immers de golffronten van gelijke phase, die op een afstand $= \lambda$ van elkander liggen, kunnen door hunne snijding met een plat vlak nooit rechte lijnen opleveren, welker onderlinge afstand kleiner dan λ is.

Om nu te doen inzien welke bewegingstoestand in de ruimte achter het scherm beantwoordt aan een toestand in het vlak S , met $l < \lambda$, herinneren wij aan een bekend verschijnsel.

Laat zich vóór een vlak (dat wij ons thans eenvoudig als een grensvlak, dus als overal doorschijnend denken) glas, en achter het vlak lucht bevinden, en onderstellen wij dat in het eerste medium een enkelvoudige bundel evenwijdige lichtstralen invalt. De evenwichtsverstoring, die daardoor in het vlak S wordt veroorzaakt, zal van den algemeenen vorm (24) zijn; er bestaat bij deze verstoring weer een stelsel isophasische vlakken. Gaat men nu na, hoe een stelsel platte golven in het tweede medium, de lucht, moet zijn om de noodige aansluiting aan het grensvlak te verkrijgen, dan komt men tot de bekende wet der breking. Is echter de richting van het invallende licht zoo dat de periode l langs het grensvlak kleiner wordt dan de golflengte λ in het tweede medium, dan kan een stelsel met platte golven in dit medium niet ontstaan. Inderdaad heeft men dan het verschijnsel van de totale reflexie.

Het is echter bekend ¹⁾, dat toch nog in het tweede medium een zekere bewegingstoestand ontstaat, die echter geen gewoon golfstelsel met constante amplitudo is, maar integendeel bij verwijdering van het grensvlak snel afneemt, daar in de uitdrukkingen voor deze beweging een factor e^{-az} optreedt (waarin z den afstand tot het grensvlak voorstelt).

Dergelijke bewegingstoestanden zijn het nu, die aan de termen met groote waarden van μ en ν zullen beantwoorden. Bij proeven over de diffractie zal men echter van deze bewegingstoestanden niets bemerken, en wel om twee redenen. Vooreerst worden, wanneer de afmetingen der openingen in het diffracteerend scherm tamelijk groot zijn in vergelijking met de golflengte, en de invalshoek niet al te groot is, de hoogere termen of elementen in de reeks of integraal van FOURIER zeer klein in vergelijking met de eerste termen of elementen. En ten tweede staat gewoonlijk bij de proeven het vlak, waarin men de lichtverdeeling waarneemt, of, bij de door FRAUNHOFER gekozen inrichting, de lens op zoodanigen afstand van het diffracteerend scherm, dat de bovenbedoelde in amplitudo afnemende bewegingstoestand niet zoo diep doordringt. Wij zullen in het vervolg dan ook niet meer spreken van het deel der beweging, beantwoordende aan

$$\mu^2 + \nu^2 > \frac{4\pi^2}{\lambda^2}.$$

¹⁾ Zie LORENTZ, Over de Theorie der Terugkaatsing en Breking van het Licht, Hoofdstuk V.

IV.

Diffractie door ééne spleetvormige opening.

Wij beginnen met het theorema van FOURIER toe te passen op de behandeling van de buigingsverschijnselen bij ééne spleetvormige opening met evenwijdige randen.

Stellen wij de breedte der spleet = p ; de lengte laten wij onbepaald, maar wij onderstellen haar zeer groot met betrekking tot de breedte. We kiezen het vlak van het scherm tot $x y$ -vlak; den oorsprong in een punt op gelijke afstanden van de randen der spleet; de y -as evenwijdig met die randen. Wij bepalen ons tot het geval dat het licht in het $z x$ -vlak invalt; den invalshoek onderstellen we klein.

Het invallend licht wordt nu voor $z = 0$ voorgesteld door:

$$q = a \cos 2 \pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x \sin \gamma}{\lambda} \right) (25)$$

Om nu de lichtbeweging achter het scherm te vinden, ontbinden we q (25) door de integraal van FOURIER in een oneindig groot aantal periodieke functiën, en gaan den invloed van elk dezer deelen na.

Daar q eene functie van slechts ééne coördinaat is, hebben wij de integraal van FOURIER voor ééne veranderlijke te gebruiken. De verstoring in het vlak S kan beschouwd

worden als eene functie van x , die $= 0$ is voor alle waarden van x tusschen $-\infty$ en $-\frac{1}{2}p$ en tusschen $+\frac{1}{2}p$ en $+\infty$, terwijl zij de waarde (25) heeft voor $-\frac{1}{2}p < x < +\frac{1}{2}p$. De grenzen van de integratie naar ξ zijn dus niet $-\infty$ en $+\infty$ maar $-\frac{1}{2}p$ en $+\frac{1}{2}p$.

Voor $\varrho = f(x)$ schrijven we dan:

$$\varrho = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\mu \int_{-\frac{1}{2}p}^{+\frac{1}{2}p} f(\xi) \cos \mu (x - \xi) d\xi.$$

Een der deelen u , waarin we ϱ aldus verdeeld hebben, is:

$$u = \frac{d\mu}{\pi} \int_{-\frac{1}{2}p}^{+\frac{1}{2}p} f(\xi) \cos \mu (x - \xi) d\xi,$$

of:

$$u = \frac{a d\mu}{\pi} \int_{-\frac{1}{2}p}^{+\frac{1}{2}p} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\xi \sin \gamma}{\lambda} \right) \cos \mu (x - \xi) d\xi. \quad (26)$$

Aan de door u voorgestelde beweging aan het grensvlak beantwoorden twee volkomen bepaalde golfstelsels. Wij vinden namelijk, de integratie naar ξ uitvoerende, en

$$\frac{2\pi \sin \gamma}{\lambda} = \mu_1 \dots \dots \dots (27)$$

stellende:

$$u = u_1 + u_2,$$

waarin:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{a d\mu}{\pi (\mu_1 - \mu)} \sin \left\{ \frac{1}{2} p (\mu_1 - \mu) \right\} \cos \left(2\pi \frac{t}{T} - \mu x \right) \\ u_2 &= \frac{a d\mu}{\pi (\mu_1 + \mu)} \sin \left\{ \frac{1}{2} p (\mu_1 + \mu) \right\} \cos \left(2\pi \frac{t}{T} + \mu x \right) \end{aligned} \right\} (28)$$

Kortheidshalve schrijven we hiervoor:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= A_1 \cos \left(2 \pi \frac{t}{T} - \mu x \right) \\ u_2 &= A_2 \cos \left(2 \pi \frac{t}{T} + \mu x \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots (29)$$

Uit beide deelen van u ontstaat eene lichtbeweging achter het scherm. Elke dezer lichtbewegingen is klaarblijkelijk een stelsel platte golven. Zal nu het door (21) voorgestelde golfstelsel voor $z = 0$ overgaan in eene der uitdrukkingen (29), nemen we u_1 , dan moet:

$$\text{en} \quad \left. \begin{aligned} \Phi_1 &= 0, \quad \beta' = 90^\circ, \quad \alpha' = A_1 \\ \frac{2 \pi \cos \alpha'}{\lambda} &= \mu, \quad \text{of} \quad \cos \alpha' = \frac{\mu \lambda}{2 \pi} \end{aligned} \right\} \dots \dots (30)$$

zijn. De amplitudo van dit gediffracteerde golfstelsel wordt dus voorgesteld door:

$$A_1 = \frac{a d \mu}{\pi (\mu_1 - \mu)} \sin \left\{ \frac{1}{2} p (\mu_1 - \mu) \right\} \dots \dots (31)$$

Schrijven we in (31) voor μ_1 en μ hare waarden:

$$\mu_1 = \frac{2 \pi \sin \gamma}{\lambda} \quad \text{en} \quad \mu = \frac{2 \pi \cos \alpha'}{\lambda},$$

en nemen we in aanmerking dat $\beta' = 90^\circ$ en $\alpha' = 90^\circ - \gamma'$ is, als wij onder γ' den hoek met de z -as verstaan, positief als de normaal der golven binnen den hoek ZOX valt, en negatief als zij aan de andere zijde der z -as ligt, dan wordt:

$$A_1 = \frac{d \mu}{2 \pi} a p \frac{\sin \left\{ \frac{\pi p}{\lambda} (\sin \gamma - \sin \gamma') \right\}}{\frac{\pi p}{\lambda} (\sin \gamma - \sin \gamma')} \dots \dots (32)$$

Bij de gebezigde reeksontwikkeling verkrijgt μ , zooals gezegd is, alle mogelijke waarden van 0 tot ∞ ; en daar

aan elke daarvan eene bepaalde waarde van γ' beantwoordt, zal de lichtbeweging achter het scherm uit een oneindig groot aantal golfstelsels bestaan, welker voortplantingsrichtingen met de z -as telkens den hoek γ' maken.

Aan u_2 (29) beantwoordt eene dergelijke lichtbeweging als aan u_1 . Opdat de beweging (21) voor $z = 0$ overeenstemme met u_2 , moet men hebben:

$$\phi_1 = 0, \beta' = 90^\circ, a' = A_2$$

en

$$\cos \alpha' = -\frac{\mu \lambda}{2 \pi}, \text{ of } \sin \gamma' = -\frac{\mu \lambda}{2 \pi}.$$

Ook hierin kan μ alle mogelijke waarden hebben; en het blijkt dus, dat u_1 en u_2 te zamen *alle mogelijke* richtingen van het gediffracteerde licht opleveren.

De voortplantingsrichtingen van de beide aan u_1 en u_2 beantwoordende golfstelsels maken aan weerszijden gelijke hoeken met de normaal op het scherm. De amplitudines zijn echter ongelijk, zoodat er toch geene symmetrie ten opzichte van deze normaal is. De formule voor de amplitudo van het aan u_2 beantwoordende golfstelsel heeft denzelfden vorm als die voor u_1 , namelijk A_1 (32), mits men voor $\sin \gamma'$ eene negatieve waarde neme.

De amplitudo verkrijgt hare maximumwaarde voor $\gamma' = \gamma$, waaruit blijkt, dat de grootste intensiteit in de richting van het invallend licht is.

Voor loodrecht invallend licht is $\gamma = 0$. Noemen wij den diffractiehoek, d. i. den hoek tusschen de normaal op het scherm en de gediffracteerde stralen ϑ , dan is $\gamma' = \vartheta$, terwijl $\mu_1 = 0$ en $\mu = \frac{2 \pi \sin \vartheta}{\lambda}$ wordt; de formule (32)

gaat dan over in:

$$A = \frac{d \mu}{2 \pi} a p \frac{\sin \frac{\pi p \sin \theta}{\lambda}}{\frac{\pi p \sin \theta}{\lambda}} \dots \dots \dots (33)$$

en de golfstelsels u_1 en u_2 (29) worden:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= A \cos \left(2 \pi \frac{t}{T} - \mu x \right) \\ u_2 &= A \cos \left(2 \pi \frac{t}{T} + \mu x \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (34)$$

Stellen wij ons thans voor, dat achter het scherm met de spleet eene convergeerende lens geplaatst is, en beschouwen wij de lichtverdeeling in het focale vlak der lens. Wanneer op de lens *een enkel stelsel* van platte golven valt, zal de lichtbeweging ten naaste bij in een enkel punt van het focale vlak vereenigd worden, en dan zal de intensiteit in dat punt evenredig met de tweede macht der amplitudo van de invallende golven mogen gesteld worden. Vallen achtereenvolgens verschillende golfstelsels van onderscheiden richting op de lens, dan verkrijgt men telkens de lichtconcentratie weder in een ander punt, en men zal, als men zich tot kleine invalshoeken beperkt, de lichtsterkten in die verschillende punten evenredig mogen stellen aan de tweede machten van de amplitudines der beschouwde golfstelsels. Dezelfde regel kan worden toegepast op de *gelijktijdig* in verschillende punten van het focale vlak door een zeker aantal invallende golfstelsels teweeggebrachte lichtsterkte, zoolang die punten maar geheel buiten elkander liggen.

Wanneer, zooals in het boven beschouwde geval der spleetvormige opening, de lens getroffen wordt door golfstelsels van alle mogelijke richtingen, dan doet zich iets zeer eigenaardigs voor. Wilde men namelijk ook nu nog aannemen,

dat elk golfstelsel door de lens in één enkel punt vereenigd wordt, en dat de lichtsterkte evenredig is met de tweede macht der amplitudo, dan komt men tot het besluit, dat in het focale vlak licht zal ontstaan in een aantal punten, welker onderlinge afstanden door $d \mu$ bepaald worden — wat dus feitelijk eene doorloopende verdeeling van licht wordt — en dat de lichtsterkte in elk punt evenredig is met de tweede macht van de door (33) bepaalde grootheid A . Men stuit dan echter op deze moeilijkheid, dat de intensiteit in elk punt evenredig met $d \mu^2$, en dus oneindig klein van de tweede orde zou zijn, terwijl toch, aangezien op het geheele vlak eene eindige hoeveelheid licht komt, de intensiteit in elk der beschouwde punten oneindig klein van de eerste orde moet worden.

Om deze paradox op te lossen moet men bedenken, dat eene lens nooit de lichtbeweging van een invallend golfstelsel in één enkel punt concentreert. Al is er in 't geheel geene sphaerische aberratie, dan zal toch de diffractie, die bij den doorgang door de lens onvermijdelijk is, eene verdeeling der lichtbeweging over eene zekere kleine uitgestrektheid van het focale vlak ten gevolge hebben, wat wij zullen uitdrukken door van „de verstrooiingsfiguur” te spreken, daarbij in het midden latende of men hierbij alleen met diffractie of bovendien met sphaerische aberratie te doen heeft.

Vallen nu op de lens golfstelsels van verschillende richting, dan beantwoordt aan elk daarvan eene verstrooiingsfiguur. Wanneer het aantal der golfstelsels beperkt is, en de richtingen zoo ver uiteenliggen, dat de verstrooiingsfiguren geheel buiten elkander vallen, dan behoeven wij aan het boven gezegde bijna niets te veranderen. De lichtsterkte in elke verstrooiingsfiguur in haar geheel genomen — en wij kunnen

zulk eene figuur, als zij zeer klein is, nog wel een verlicht *punt* noemen — kan dan nog evenredig met de tweede macht van de amplitudo der invallende golven gesteld worden.

De zaak is echter anders, wanneer golfstelsels van geleidelijk in elkander overgaande richtingen op de lens vallen. Hoe klein de verstrooiingsfiguur ook moge zijn, steeds zullen dan de figuren, die door golfstelsels met onderling weinig verschillende richtingen worden voortgebracht, over elkander vallen. In een bepaald punt van het focale vlak verkrijgt men dan niet de lichtbeweging van één golfstelsel met ééne bepaalde waarde van μ , maar de lichtbewegingen die aan waarden van μ tusschen twee dicht bij elkander gelegen grenzen beantwoorden; en de samenwerking dezer verschillende lichtbewegingen kan zeer goed tot eene eindige lichtsterkte leiden.

Wij zullen nu onderstellen: vooreerst, dat de diffractiehoeken, die ter sprake komen, slechts weinig van elkander verschillen; en ten tweede, dat de waarden van μ , die bij de lichtbeweging in een bepaald punt in aanmerking moeten genomen worden, zoo weinig uiteenloopen, dat in die verschillende waarden de coëfficiënt van $d\mu$ in uitdrukkingen als (33) geacht kan worden dezelfde waarde te hebben. (Deze onderstelling komt hierop neer, dat de verstrooiingsfiguren zeer klein zijn in vergelijking met de afmetingen der buigingsbeelden die wij beschouwen). Dan kan men, zonder zich verder in vele bijzonderheden te verdiepen, aantoonen, dat de lichtsterkte in de verschillende punten van het focale vlak evenredig kan worden gesteld aan de tweede macht der grootheid, waarmede in de amplitudo van het gediffracteerd licht $d\mu$ vermenigvuldigd is. Bij geschikte keus der eenheid kunnen wij dus in het geval van de spleet met

loodrecht invallend licht voor de intensiteit schrijven:

$$I = \left(\frac{a p}{2 \pi}\right)^2 \frac{\sin^2 \frac{\pi p \sin \vartheta}{\lambda}}{\left(\frac{\pi p \sin \vartheta}{\lambda}\right)^2} \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (35)$$

Wij hebben niet noodig, de functie (35), waarin ϑ de veranderlijke is, te bediscuteeren. Wij herinneren alleen, dat de minima, die alle $= 0$ zijn, overeenkomen met $\sin \vartheta = \frac{k \lambda}{p}$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$), en de maxima, althans de verder van het midden van het buigingsbeeld afgelegene, nagenoeg met $\sin \vartheta = \frac{(2k+1)\lambda}{2p}$; de intensiteit dezer maxima neemt zeer snel af. Het teeken van ϑ zal geen invloed hebben op I : wij behoeven daarom slechts de positieve waarden van ϑ te beschouwen. (Deze opmerking geldt ook voor de later te behandelen gevallen). Het hoofdmaximum komt overeen met $k = 0$ of $\vartheta = 0$, en heeft de waarde $\left(\frac{a p}{2 \pi}\right)^2$ ¹⁾. De eerste minima links en rechts van het hoofdmaximum liggen op afstanden $= \frac{\lambda}{p}$ van het midden; daar al de minima op dienzelfden afstand $\frac{\lambda}{p}$ van elkander liggen, volgt daaruit, dat het centrale maximum de dubbele breedte

¹⁾ De waarden der intensiteit en bepaaldelijk die der maxima, in het centrale maximum als eenheid uitgedrukt, zijn voor een groot aantal met gelijke verschillen (15^o) opklimmende waarden van $\frac{\pi p \sin \vartheta}{\lambda}$ door SCHWERD berekend en in tafel gebracht: Die Beugungerscheinungen, § 55 en Tab. I. Zie ook VERDET, Leçons d'optique physique, t. I, ch. VII, § 69.

heeft van elk der overige ¹⁾. Men verkrijgt alzoo in het focale vlak het bekende diffractiebeeld: het licht is verdeeld langs eene lijn, die loodrecht staat op de randen der spleet; de maxima en minima gaan geleidelijk in elkander over, en de lichtverdeeling is dus continu; de intensiteit der maxima neemt aan weerszijden van het midden zeer snel af. Bij gebruik van wit, en in het algemeen niet-homogeen licht heeft men langs de lijn de bekende afwisseling van kleuren.

Op de beschouwing der isophasische lijnen, die, als het licht loodrecht op het vlak der spleet invalt, alle evenwijdig aan de randen loopen, behoeven wij na het in het vorige hoofdstuk behandelde niet terug te komen.

Wil men de besproken verschijnselen waarnemen, dan kan men de breedte der diffracteerende opening niet *onbepaald* doen *afnemen*. Denken wij ons de breedte p *zeer* klein, zoodat zij minder dan eene golflengte bedraagt, dan kunnen klaarblijkelijk geene waarden van θ aangegeven worden voor welke de intensiteit $= 0$ wordt; dit blijkt ook daaruit, dat, voor $p < \lambda$, $\sin \theta > 1$ zou moeten worden. Bij de waarnemingsmethode van FRAUNHOFER verkrijgt men dan in het focale vlak geene minima meer, maar alleen eene van het midden af geleidelijk afnemende lichtsterkte. Dit komt ook overeen met de opvatting, dat volgens het beginsel van HUYGENS eene *zeer* kleine opening naar alle zijden licht uitstraalt. Laat men daarentegen p *toenemen*, totdat zij veel grooter dan de golflengte wordt, dan verandert er aan *den aard*

¹⁾ Het zal wel overbodig zijn, op te merken, dat men, wanneer de diffractiehoek zeer klein is, zooals gewoonlijk het geval is, $\sin \theta$ kan vervangen door θ . Wij hebben niet noodig geoordeeld, daaraan telkens te herinneren.

van het verschijnsel niets: theoretisch kan men zich de opening zoo breed denken als men verkiest, als men daarbij de middellijn der lens maar groot genoeg onderstelt. Alleen komen bij toenemende p de maxima en minima in het focale vlak hoe langer hoe dichter bij elkander.

Het is van belang na te gaan, hoe de lichtbeweging achter het scherm is, wanneer men zonder lens werkt. Men behoeft daartoe slechts de verschillende golfstelsels, waartoe men door het theorema van FOURIER geraakt, met elkander samen te stellen. Om niet al te uitvoerig te worden, zullen wij ons beperken tot het geval van loodrecht invallend licht.

Stellen we $\gamma = 0$, dan vinden we voor de twee deelen der evenwichtsverstoring, die aan eene bepaalde waarde van μ beantwoorden, uit (28):

$$u_1 = \frac{a d \mu}{\pi} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} \mu p}{\mu} \cos \left(2 \pi \frac{t}{T} - \mu x \right),$$

$$u_2 = \frac{a d \mu}{\pi} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} \mu p}{\mu} \cos \left(2 \pi \frac{t}{T} + \mu x \right).$$

Hieraan beantwoorden achter het scherm twee platte golfstelsels, welke voortplantingsrichtingen in het zx -vlak liggen aan weerszijden van de z -as, en met deze as gelijke hoeken maken. Deze golfstelsels kunnen we voorstellen door:

$$w' = a \frac{d \mu}{\pi} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} \mu p}{\mu} \cos \left(2 \pi \frac{t}{T} - \mu x - \mu' z \right). \quad (36)$$

en:

$$w'' = a \frac{d \mu}{\pi} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} \mu p}{\mu} \cos \left(2 \pi \frac{t}{T} + \mu x - \mu' z \right). \quad (37)$$

waarin μ' positief, en

$$\mu^2 + \mu'^2 = \frac{4 \pi^2}{\lambda^2},$$

en dus:

$$\mu' = \sqrt{\frac{4 \pi^2}{\lambda^2} - \mu^2}.$$

Te zamen geven (36) en (37):

$$u''' = 2 a \frac{d \mu}{\pi} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} \mu p}{\mu} \cos \left(2 \pi \frac{t}{T} - \mu' z \right) \cos \mu x. \quad (38)$$

Deze uitdrukking gaat alleen door voor $\mu < \frac{2 \pi}{\lambda}$; voor grootere waarden van μ zou μ' onbestaanbaar worden. Wij zien echter, zooals reeds uiteengezet is, af van de grootere waarden van μ , en stellen dus voor de totale evenwichtsverstoring in een punt achter het scherm:

$$q = \frac{2 a}{\pi} \int_0^{\frac{2 \pi}{\lambda}} \frac{\sin \frac{1}{2} \mu p}{\mu} \cos \left(2 \pi \frac{t}{T} - \mu' z \right) \cos \mu x d \mu.$$

Eene volledige discussie over deze integraal zou lastig en omslachtig zijn; wij hebben die ook niet noodig. Voor $z = 0$ hebben wij:

$$q = \frac{2 a}{\pi} \cos 2 \pi \frac{t}{T} \int_0^{\frac{2 \pi}{\lambda}} \frac{\sin \frac{1}{2} \mu p}{\mu} \cos \mu x d \mu,$$

en dit wordt blijkbaar $= a \cos 2 \pi \frac{t}{T}$ achter de spleet tusschen C en D (Fig. 1, waarin CD de loodrechte doorsnede der spleet met het vlak van teekening voorstelt), en $= 0$ links van C en rechts van D .

Graphisch kan men dit aldus voorstellen. Wanneer men de sinusoides

$$\sigma = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} \mu p}{\mu} \cos \mu x d \mu. \quad (39)$$

met elkander samenstelt, verkrijgt men de lijn, bestaande uit de deelen AC , $C'D'$, DB ($CC' = DD' = 1$).

Kiezen wij thans een vlak V evenwijdig aan het scherm, op een bepaalden afstand $= z$ daarachter gelegen. Om hier q te vinden hebben wij al de termen

$$\sigma' = \frac{2a}{\pi} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} \mu p}{\mu} \cos \left(2\pi \frac{t}{T} - \mu' z \right) \cos \mu x d \mu. \quad (40)$$

bij elkander op te tellen. Deze termen onderscheiden zich van σ (39) door den factor $a \cos \left(2\pi \frac{t}{T} - \mu' z \right)$. Ware nu deze factor voor alle in aanmerking komende waarden van μ even groot, dan zou men voor de lichtbeweging in V verkrijgen de som der termen σ (39) vermenigvuldigd met dezen constanten factor. Men zou dan tusschen E en F eene lichtbeweging verkrijgen, maar links van E en rechts van F , d.i. voor $x < -\frac{1}{2}p$ en $x > +\frac{1}{2}p$ weder niets, omdat de sommeering van de termen σ (39) voor deze waarden van x nul oplevert; en in dat geval zou men dus *volkomen* de beperking der lichtbeweging tot de ruimte hebben, die de stralen bij rechtlignige voortplanting kunnen bereiken. *Ten naaste bij* zal men ditzelfde echter ook nog hebben, wanneer de factoren $\cos \left(2\pi \frac{t}{T} - \mu' z \right)$, waarmede de verschillende termen σ (39) vermenigvuldigd moeten worden, *slechts weinig* van elkander verschillen.

Nu moet μ klimmen van 0 tot $\frac{2\pi}{\lambda}$; maar reeds lang voordat μ de laatste waarde bereikt heeft kunnen de termen in de ontwikkeling van FOURIER zoo klein zijn geworden, dat hun invloed onmerkbaar is. De amplitudo van een der termen bevat namelijk den factor

$$\frac{\sin \frac{1}{2} \mu p}{\frac{1}{2} \mu p} \times \frac{1}{2} p; \text{ en terwijl}$$

de breuk $\frac{\sin \frac{1}{2} \mu p}{\frac{1}{2} \mu p}$ de waarde 1 heeft voor $\mu = 0$, zal zij

reeds vrij klein zijn, wanneer $\frac{1}{2} \mu p$ een zeker aantal, b. v. eenige tientallen malen π is geworden. Stellen wij dat wij gaan tot $\frac{1}{2} \mu p = k \pi$, waarin k ongeveer = 30 of 40 is,

dan is $\mu = \frac{2k\pi}{p}$, hetgeen bij wijde spleten veel kleiner is dan $\frac{2\pi}{\lambda}$. Terwijl nu μ van 0 tot $\frac{2k\pi}{p}$ aangroeit, variëert μ'

van $\frac{2\pi}{\lambda}$ tot $\sqrt{\frac{4\pi^2}{\lambda^2} - \frac{4k^2\pi^2}{p^2}}$, en $\mu'z$ van $z \cdot \frac{2\pi}{\lambda}$ tot

$z \sqrt{\frac{4\pi^2}{\lambda^2} - \frac{4k^2\pi^2}{p^2}}$; en nu is het duidelijk, dat men van

de verandering van $\cos\left(2\pi \frac{t}{T} - \mu'z\right)$ mag afzien, wanneer de verandering van den boog een zeer klein deel van 2π is. Derhalve wanneer

$$z \cdot \frac{2\pi}{\lambda} - z \sqrt{\frac{4\pi^2}{\lambda^2} - \frac{4k^2\pi^2}{p^2}} = \varepsilon \cdot 2\pi. \quad (41)$$

(waarin ε eene zeer kleine breuk is), zal in het vlak V op den afstand z sprake zijn van twee scherpe schaduwen,

overeenkomende met de randen der spleet. En het is duidelijk, dat dit altijd bereikt kan worden hoe groot z ook zij, als men p maar groot genoeg kiest.

Wij kunnen voor (41) achtereenvolgens schrijven:

$$1 - \sqrt{1 - \frac{k^2 \lambda^2}{p^2}} = \frac{\epsilon \lambda}{z},$$

$$\sqrt{1 - \frac{k^2 \lambda^2}{p^2}} = 1 - \frac{\epsilon \lambda}{z};$$

dus, daar in gewone gevallen $z > \lambda$ en dus $\frac{\epsilon \lambda}{z}$ zeer klein zal zijn:

$$1 - \frac{k^2 \lambda^2}{p^2} = 1 - 2 \frac{\epsilon \lambda}{z},$$

of:

$$p^2 = \frac{1}{2} \frac{k^2}{\epsilon} \cdot \lambda z; \quad (42)$$

waardoor men eenigszins kan beoordeelen, hoe breed ongeveer de spleet moet zijn om op een bepaalden afstand achter het scherm nog schaduwen met vrij scherpe randen te geven.

Door dergelijke beschouwingen kan men aantoonen — maar kortheidshalve laten wij dit achterwege — dat ook bij openingen van willekeurigen vorm en ook bij scheef invallend licht de lichtbeweging achter het scherm beperkt blijft tot een cylinder, die den omtrek der opening tot richtlijn en de richting van het invallend licht tot beschrijvende lijn heeft, wanneer de afmetingen der opening maar groot genoeg zijn.

Het verschijnsel verandert niet van aard, maar neemt alleen toe in uitgebreidheid en helderheid, wanneer men, met behoud van de spleetvormige diffracterende opening, als lichtbron in plaats van een enkel oneindig ver verwijderd

lichtpunt eene oneindig ver verwijderde *lichtlijn* neemt, welke evenwijdig loopt aan de randen der spleet ¹⁾). Men plaatse daartoe voor een collimator eene lichtbron van eenige uitgebreidheid, en late alzoo de spleet van den collimator als lichtbron dienst doen. Elk punt van de lichtlijn zal dan een in eene rechte lijn uitgebreid diffractiebeeld geven, als het boven beschrevene, loodrecht op de richting der spleet; en men zal dus door de aaneenschakeling van al deze beelden een doorlopend beeld krijgen, bestaande uit afwisselende lichte en donkere strepen bij homogeen licht, en uit verschillend gekleurde strepen bij wit licht. Deze strepen loopen alle evenwijdig met de randen der diffracterende spleet.

¹⁾ Het hier gezegde mag eigenlijk zonder nader bewijs niet aangenomen worden, daar het licht bij de in den tekst vermelde gewijzigde gegevens grootendeels scheef invalt. Wij zullen echter later (Hoofdst. VI) aantoonen, dat het diffractiebeeld bij scheef invallend licht van dat bij loodrecht invallend niet verschilt, als de invalshoek maar zeer klein genomen wordt.

Het traliescherm.

Zeer eenvoudig wordt door toepassing van het theorema van FOURIER de theorie der traliespectra.

Als scherm onderstellen wij een ondoorschijnend vlak met een oneindig groot aantal evenwijdige rechte lijnen, die elk eene breedte $= p$ hebben, terwijl de breedte eener tusschenruimte tusschen elke twee op elkander volgende spleten $= q$ is. De breedte van een „element” van den rooster is dan $= p + q$, stellen wij $p + q = e$. Men kan deze grootte ook *de periode* van den rooster noemen. De lengte der spleten is weder zeer groot met betrekking tot de breedte, en is bij alle gelijk. Het diffracteerend vlak kiezen wij tot xy -vlak; de y -as loopt evenwijdig aan de randen der spleten; den oorsprong nemen wij midden tusschen de randen van eene der spleten; de as der lens valt samen met de z -as.

Het loodrecht invallende licht, dat wij ons als een zijdelings onbegrensden bundel evenwijdige stralen te denken hebben, kan voorgesteld worden door:

$$q = a \cos 2 \pi \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} \right), \dots \dots \dots (43)$$

of, voor $z = 0$, door:

$$q = a \cos 2 \pi \frac{t}{T} (44)$$

Deze functie is klaarblijkelijk in het meergenoemde grensvlak S eene periodieke functie van x met de periode e : de afwisseling van de doorschijnende en ondoorschijnende gedeelten vertoont langs het scherm het karakter der periodiciteit: hierom moeten wij in dit geval voor de ontbinding van q *de reeks* en niet *de integraal* van FOURIER gebruiken.

Wij ontbinden dan $q = f(x)$ in een aantal periodieke functiën met de perioden $e, \frac{1}{2} e, \dots$. Daar rechts en links, op gelijke afstanden van O , q dezelfde waarde heeft, bestaat de eigenschap $f(-x) = f(x)$, zoodat de reeksontwikkeling alleen termen met een cosinus bevat; en daar

$$\frac{1}{2} b_0 = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{+h} f(\xi) d\xi$$

niet verdwijnt, is er ook een constante term. De algemeene term der reeks (2) is $b_k \cos \frac{k \pi x}{h}$, waarin:

$$b_k = \frac{1}{h} \int_{-h}^{+h} f(\xi) \cos \frac{k \pi \xi}{h} d\xi.$$

Laten nu in Fig. 2 AB de doorsnede van het scherm met het vlak van teekening, CD, EF, \dots spleten, en DE, FG, \dots tusschenruimten verbeelden; nemen wij $CI = DH = \frac{1}{2} q$, dan is $OI = -h$ en $OH = +h$, zoodat de integraal over de uitgestrektheid IH moet genomen worden. Op grond van de eigenschap $f(-x) = f(x)$ is:

$$b_k = \frac{2}{h} \int_0^h f(\xi) \cos \frac{k \pi \xi}{h} d\xi,$$

of, daar $h = \frac{1}{2}(p + q) = \frac{1}{2}e$ is:

$$b_k = \frac{4}{e} \int_0^{\frac{1}{2}e} f(\xi) \cos \frac{2k\pi\xi}{e} d\xi \quad \dots \quad (45)$$

In het element IH van den rooster is $OH = \frac{1}{2}e$. Voor het gedeelte OD , d. i. van $x = 0$ tot $x = \frac{1}{2}p$, is $f(\xi) = a \cos 2\pi \frac{t}{T}$, en voor DH , van $x = \frac{1}{2}p$ tot $x = \frac{1}{2}e$, is $f(\xi) = 0$. De integraal (45) wordt derhalve:

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{4}{e} a \cos 2\pi \frac{t}{T} \int_0^{\frac{1}{2}p} \cos \frac{2k\pi\xi}{e} d\xi = \\ &= \frac{2}{k\pi} a \sin \frac{kp\pi}{e} \cos 2\pi \frac{t}{T} \quad \dots \quad (46) \end{aligned}$$

Hierdoor wordt in de reeksontwikkeling voor $f(x)$ elke term bekend. In 't algemeen kan men voor zulk een term, dien we u_k zullen noemen, schrijven:

$$u_k = \frac{2}{k\pi} a \sin \frac{kp\pi}{e} \cos 2\pi \frac{t}{T} \cos \frac{2k\pi x}{e} \quad \dots \quad (47)$$

We gaan nu eerst de werking van het constante gedeelte na. Men vindt daarvoor:

$$\frac{1}{2} b_0 = \frac{1}{h} \int_0^{\frac{1}{2}p} a \cos 2\pi \frac{t}{T} d\xi = \frac{p}{e} a \cos 2\pi \frac{t}{T} \quad (48)$$

Vergelijken wij deze uitkomst met den vorm (44), die de invallende verstoring voorstelt, dan zien wij, dat dezelfde lichtbeweging, die aan het constante gedeelte $\frac{1}{2} b_0$ beantwoordt, in het grensvlak ontstaan zou, indien het scherm weggenomen ware, en de invallende beweging de amplitudo $\frac{p}{e} a$

had. Uit deze invallende beweging ontstaat dus achter het scherm een stelsel platte golven met de amplitudo $A_0 = \frac{p}{e} a$, dat zich loodrecht op S voortplant.

Om na te gaan, welke partiële lichtbeweging uit een willekeurig gedeelte van de reeksontwikkeling voortvloeit, beschouwen we den algemeenen term u_k (47).

Stellen we:

$$\frac{2}{k \pi} a \sin \frac{k p \pi}{e} = 2 A_k,$$

dan kunnen we schrijven:

$$u_k = A_k \cos 2 \pi \left(\frac{t}{T} - \frac{k x}{e} \right) + \\ + A_k \cos 2 \pi \left(\frac{t}{T} + \frac{k x}{e} \right) (49)$$

Uit beide deelen van u_k ontstaat eene lichtbeweging achter het scherm. De amplitudo van beide golfstelsels is $= A_k$, terwijl de voortplantingsrichtingen, in het $z x$ -vlak gelegen, aan weerszijden gelijke hoeken ϑ met de z -as maken. De hoek ϑ wordt bepaald door $\sin \vartheta = \pm \frac{k \lambda}{e}$. Ook hier geldt de opmerking, dat de lichtbeweging, die door een der twee deelen van den term u_k voorgesteld wordt, aan het vlak S ontstaan zou, indien het scherm er niet ware, en het invallend licht de amplitudo A_k had.

Al deze golfstelsels vormen te zamen de buigingsbundels of afgeweken bundels, die met de eerstgevonden lichtbeweging, welke uit den constanten term voortvloeit, de geheele lichtbeweging achter het scherm uitmaken. De opvolgende waarden van den diffractiehoek kan men vinden door in $\sin \vartheta = \frac{k \lambda}{e}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ te stellen.

Het is thans gemakkelijk na te gaan, wat men in het focale vlak der objectieflens zal waarnemen. De invallende bundel evenwijdige lichtstralen geeft aanleiding vooreerst tot een bundel, die zich voortplant in de richting van de hoofdas der lens; dit stelsel zal zich concentreeren in het hoofdbrandpunt. Verder zijn nog een aantal andere platte golfstelsels ontstaan, welker voortplantingsrichting met de hoofdas een hoek ϑ_k maakt; deze zullen zich vereenigen in punten aan weerszijden van het hoofdbrandpunt in het focale vlak gelegen, welke men verkrijgt door lijnen te trekken door het optisch middelpunt der lens evenwijdig aan de respectieve buigingsbundels. Deze punten liggen in eene lijn loodrecht op de richting der spleten; hunne afstanden van het hoofdbrandpunt zijn, wanneer men den brandpuntsafstand $= f$ stelt, $= f \operatorname{tg} \vartheta_k$, waarvoor men, wanneer ϑ_k klein is, weder schrijven mag $f \vartheta_k$; hun onderlinge afstand is $= f \frac{\lambda}{e}$. In het brandpunt en de andere genoemde punten heeft men dus licht. Gebruikt men als lichtbron een enkel oneindig ver verwijderd *punt*, bij voorbeeld eene ster, dan ziet men in het focale vlak bij homogeen licht enkele lichtpunten, door volkomen donkere tusschenruimten gescheiden; bij wit licht komen in plaats van deze lichtpunten spectra, die het violet naar het midden gekeerd hebben. Is de lichtbron eene *lichtlijn*, evenals boven de spleet van een collimator, evenwijdig aan de randen der spleten, dan verkrijgt men bij homogeen licht eene afwisseling van lichte en donkere lijnen evenwijdig aan de lichtbron, bij wit licht het ongekleurde centrale maximum en aan weerszijden daarvan de bekende traliespectra.

Wij zullen voortaan de beelden die door de afgeweken lichtbundels ontstaan, *secundaire beelden* noemen, ter onder-

scheiding van *het centrale of hoofdbeeld*, dat door den niet afgeweken bundel gevormd wordt.

Schrijven we voor de amplitudo:

$$A_k = \frac{p}{e} a \frac{\sin \frac{k p \pi}{e}}{\frac{k p \pi}{e}} \dots \dots \dots (50)$$

dan blijkt, dat deze formule ook voor $k = 0$ mag worden toegepast: immers dan wordt het tweede lid $= \frac{p}{e} a$, wat met de vroeger voor A_0 gevonden waarde overeenstemt. Voor $k = 0$ heeft de amplitudo A_k hare grootste waarde: de grootste lichtsterkte van het buigingsbeeld valt dus in het punt waarvoor $\vartheta = 0$ is, d. i. in het hoofdbrandpunt der lens, waar het centrale beeld gevormd wordt. Deze grootste lichtsterkte is bij verschillende roosters bij gelijke a evenredig met $\left(\frac{p}{e}\right)^2$. Met $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ komen de volgende lichtplekjes overeen, welker intensiteit, wanneer men die van het hoofdbeeld $= 1$ stelt, voorgesteld wordt door de tweede machten van:

$$\frac{\sin \frac{p \pi}{e}}{\frac{p \pi}{e}}, \frac{\sin \frac{2 p \pi}{e}}{\frac{2 p \pi}{e}}, \dots$$

en dus tot nul nadert. De breuk:

$$\frac{\sin \frac{k p \pi}{e}}{\frac{k p \pi}{e}}$$

is $= 0$ voor alle waarden van k , waarvoor het product $k \times \frac{p}{e}$ een geheel getal wordt. Heeft men dus $\frac{p}{e} = \frac{k'}{k''}$

(k' en k'' geheele getallen), dan zullen voor $k = \pm k'$, $\pm 2 k''$, ... de overeenkomstige beelden ontbreken (een welbekend verschijnsel). In het bijzondere geval $p = q = \frac{1}{2} e$ b. v. zullen alle beelden van even rang verdwijnen; de intensiteit van het eerste (na het centrale) zal zijn $\frac{1}{\pi^2} a^2$, die van het derde $\frac{1}{9 \pi^2} a^2$, enz.

Vergelijkt men de intensiteit $\left(\frac{p}{e}\right)^2 a^2$ van het centrale beeld met de lichtsterkte a^2 , die men in het hoofdbrandpunt zou hebben bij afwezigheid van den rooster, dan blijkt, dat de verhouding tusschen deze intensiteiten gelijk is aan $\left(\frac{p}{e}\right)^2$, d. i. aan de tweede macht der verhouding van het doorschijnende gedeelte van het scherm tot het geheele scherm. Noemen wij deze verhouding $\frac{1}{l}$, dan is $\frac{p}{e} = \frac{1}{l}$. De hoeveelheid licht, die in het geheel door het scherm doorgelaten wordt, is natuurlijk $\frac{1}{l}$ van het invallend licht, dus $= \frac{1}{l} a^2$. Voor de intensiteit van het hoofdbeeld hebben wij gevonden $\left(\frac{p}{e}\right)^2 a^2 = \frac{1}{l^2} a^2$. Er bestaat dus eene merkwaardige betrekking tusschen de drie genoemde lichthoeveelheden: $\frac{1}{l}$ van het invallend licht wordt door het scherm doorgelaten, en weder $\frac{1}{l}$ daarvan wordt gebruikt om den niet afgeweken lichtbundel achter het scherm te vormen. ¹⁾

¹⁾ Hetzelfde is langs andere wegen gevonden door Lord RAYLEIGH en door Dr. SIRKS. Wij zullen beneden hierop terugkomen.

Uit het boven gevondene kan men nog een paar merkwaardige eigenschappen afleiden. De som van de lichtsterkten der secundaire beelden is $= \frac{p}{e} a^2 - \left(\frac{p}{e}\right)^2 a^2 = \frac{p q}{e^2} a^2$: deze grootheid is dus $\frac{q}{p}$ maal de intensiteit van het hoofdbeeld.

En verder: verwisselt men p en q , dan wordt daardoor de som van de intensiteiten der secundaire beelden niet veranderd. Voor $q = p$ is deze laatste som gelijk aan de intensiteit van het hoofdbeeld.

Het is duidelijk, dat men door de intensiteiten van al de lichtbundels achter het scherm bij elkander op te tellen, de intensiteit van het invallende licht, vermenigvuldigd met de breuk $\frac{1}{l} = \frac{p}{e}$ moet verkrijgen. Immers de hoeveelheid arbeidsvermogen, die het invallend licht per tijdseenheid naar het doorschijnende gedeelte van het scherm toevoert, moet gelijk zijn aan de som der hoeveelheden die de verschillende bundels achter het scherm wegvoeren. Wilde men dit nu in het algemeen onderzoeken, dan zou men in aanmerking moeten nemen: vooreerst, dat de hoeveelheid arbeidsvermogen, die een bundel wegvoert, niet alleen evenredig is met de tweede macht van zijne amplitudo, maar ook met de loodrechte doorsnede van den bundel; (men moet zich namelijk bij deze beschouwingen den invallenden bundel, hoewel zeer breed, toch begrensd denken), welke doorsnede bij de verschillende bundels niet dezelfde is. En ten tweede heeft men in aanmerking te nemen, dat er slechts een beperkt aantal bundels achter het scherm gevormd worden, namelijk die welke aan waarden van k beneden $\frac{e}{\lambda}$ beantwoorden. Aan hogere waarden van k toch beantwoorden

bewegingstoestanden, die (evenals bij de totale reflexie) bij verwijdering van het grensvlak snel afnemen, en bij deze toestanden stroomt niet voortdurend energie van het grensvlak weg.

De bedoelde verificatie wordt echter eenvoudiger in een bijzonder geval, waartoe wij ons hier zullen bepalen, namelijk het geval dat $\frac{e}{\lambda}$ zeer groot is. Wij kunnen dan bij het opmaken van de intensiteiten der gediffracteerde bundels zonder bezwaar gaan tot $k = \infty$ toe, en zelfs voor al deze bundels $\cos \vartheta = 1$ stellen: immers van de bundels die wij dan te veel in rekening brengen, en van die voor welke wij ten onrechte $\cos \vartheta = 1$ stellen, is de amplitudo te klein om noemenswaard gewicht in de schaal te leggen.

Voor de amplitudines der verschillende golfstelsels hebben wij dan volgens (50):

$$\frac{p}{e} a, \frac{p}{e} a \frac{\sin \frac{p \pi}{e}}{\frac{p \pi}{e}}, \frac{p}{e} a \frac{\sin \frac{2 p \pi}{e}}{\frac{2 p \pi}{e}}, \dots$$

en daar wegens $\cos \vartheta = 1$ de loodrechte doorsnede van alle bundels gelijk gesteld kan worden aan die van den invallenden lichtbundel, kunnen de hoeveelheden arbeidsvermogen evenredig gesteld worden met de tweede machten der amplitudines. Derhalve moet, wanneer er overeenstemming zal bestaan met de wet van het behoud van arbeidsvermogen, de totale intensiteit van het buigingsbeeld

$$I = \left(\frac{p}{e} a\right)^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \frac{k p \pi}{e}}{\left(\frac{k p \pi}{e}\right)^2} = \frac{p}{e} a^2$$

zijn. Daar de secundaire maxima aan weerszijden van het hoofdmaximum twee aan twee gelijk zijn, kan men hiervoor schrijven:

$$I = \left(\frac{p}{e} a\right)^2 + 2 \left(\frac{p}{e} a\right)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{k p \pi}{e}}{\left(\frac{k p \pi}{e}\right)^2}.$$

Deze sommatie kan men uitvoeren door gebruik te maken van de reeks:

$$a \sin \varphi + \frac{a^2}{2} \sin 2 \varphi + \frac{a^3}{3} \sin 3 \varphi + \dots = b g \operatorname{tg} \frac{a \sin \varphi}{1 - a \cos \varphi}.$$

Deze reeks convergeert voor $a^2 < 1$, terwijl, als men den $b g \operatorname{tg}$ geschikt kiest, φ aan geene bijzondere voorwaarden behoeft te voldoen. ¹⁾ Voor $a = 1$ gaat zij over in:

$$\sin \varphi + \frac{1}{2} \sin 2 \varphi + \frac{1}{3} \sin 3 \varphi + \dots = \frac{1}{2} \pi - \frac{1}{2} \varphi. \quad (51)$$

wat doorgaat voor $0 < \varphi < 2 \pi$. Vermenigvuldigt men met $d \varphi$, en integreert men, dan komt er:

$$\cos \varphi + \frac{1}{2^2} \cos 2 \varphi + \frac{1}{3^2} \cos 3 \varphi + \dots = \frac{1}{4} \varphi^2 - \frac{1}{2} \pi \varphi + C.$$

Voor de constante vindt men, wanneer men $\varphi = 0$ stelt:

$$C = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{1}{6} \pi^2 \dots \quad (52)$$

en dus wordt voor $\varphi = 2 \psi$:

$$\begin{aligned} \cos 2 \psi + \frac{1}{2^2} \cos 4 \psi + \frac{1}{3^2} \cos 6 \psi + \dots &= \\ &= \frac{1}{6} \pi^2 - \pi \psi + \psi^2 \dots \quad (53) \end{aligned}$$

¹⁾ Zie o. a. LOBATTO, Lessen over de Hoogere Algebra (oudere uitgaven), waar tevens het bewijs van de reeks voorkomt.

Trekt men nu de reeks (53) van (52) af, dan komt er:

$$2 \sin^2 \psi + \frac{2 \sin^2 2 \psi}{2^2} + \frac{2 \sin^2 3 \psi}{3^2} + \dots = \pi \psi - \psi^2;$$

of:

$$2 \left(\frac{\sin^2 \psi}{\psi^2} + \frac{\sin^2 2 \psi}{(2 \psi)^2} + \frac{\sin^2 3 \psi}{(3 \psi)^2} + \dots \right) = \frac{\pi}{\psi} - 1. \quad (54)$$

Vervangt men eindelijk ψ door $\frac{p \pi}{e}$, dan verkrijgt men:

$$2 \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\sin^2 \frac{k p \pi}{e}}{\left(\frac{k p \pi}{e} \right)^2} = \frac{e}{p} - 1.$$

De totale intensiteit van het buigingsbeeld wordt alzoo:

$$I = \left(\frac{p}{e} a \right)^2 \left(1 + \frac{e}{p} - 1 \right) = \frac{p}{e} a^2,$$

zoals te verwachten was. ¹⁾

De diffractie door een rooster kan nog op eenigszins andere wijze behandeld worden dan boven geschied is. Wij willen hier nog even bij stilstaan, en daarmede onze beschouwing van dit onderdeel der buigingsverschijnselen besluiten.

Stellen wij het invallend licht voor door:

$$e = a \cos 2 \pi \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} \right),$$

dan heeft de verstoring in het vlak S weder de constante waarde $a \cos 2 \pi \frac{t}{T}$ voor alle punten, die met eene spleet overeenkomen, en is verder $= 0$. Wij beschouwen nu de lichtbeweging, die door elke spleet wordt doorgelaten, op

¹⁾ Dr. SIRKS komt in zijne later te bespreken verhandeling op eene andere wijze tot dezelfde uitkomst. De bewerking der sommatie is gedeeltelijk aan Dr. S. ontleend; de reeks (53) wordt door hem als bewezen aangenomen.

zich zelve, onafhankelijk van de overige, d. i.: wij beschouwen de lichtbeweging achter het scherm als van nul verschillende respectievelijk voor elke opening, maar = 0 voor alle andere. De verstoring in S zal dan de som zijn van al die partiëele verstoringen. Nu kan de lichtbeweging, die door elke opening wordt doorgelaten, door het theorema van FOURIER ontbonden worden in een aantal platte golfstelsels, die zich achter het scherm in verschillende richtingen voortplanten. Onder al die golfstelsels zijn er eenige, die, tot verschillende openingen behorende, een zelfden hoek ϑ met de normaal op het vlak van het scherm maken, en dus evenwijdig loopen: deze zullen tot één golfstelsel kunnen worden samengesteld. Daar de spleten gelijk van breedte en op gelijke afstanden van elkander zijn, zullen de golfstelsels, die dezelfde richting ϑ hebben, niet in amplitudo, maar alleen in phase verschillen. Merken wij vooraf op, dat men, daar μ van ϑ afhangt, ook den diffractiehoek als de veranderlijke kan beschouwen, waarnaar geïntegreerd moet worden, dan heeft men, daar $\mu = \frac{2 \pi \sin \vartheta}{\lambda}$ is:

$$d \mu = \frac{2 \pi}{\lambda} \cos \vartheta d \vartheta;$$

en dit, alsmede de waarden $\gamma = 0$ en $\mu_1 = 0$ invoerende in de uitdrukking (28), die wij vroeger bij de behandeling eener enkele spleet gevonden hebben, verkrijgen wij:

$$u_1 = a_1 \cos \left(2 \pi \frac{t}{T} - \mu x \right) \dots \dots (55)$$

waarin:

$$a_1 = \frac{p}{\lambda} a \frac{\sin \frac{\pi p \sin \vartheta}{\lambda}}{\frac{\pi p \sin \vartheta}{\lambda}} \cos \vartheta d \vartheta \dots \dots (56)$$

Beschouwen wij nu het resulterend golfstelsel in de door ϑ bepaalde richting, dan is de amplitudo van al de partiëele golfstelsels, elk bij ééne der openingen behoorende, deze zelfde grootheid a_1 (56). Onderstellen we het aantal openingen = n , en kiezen we den oorsprong in het midden der eerste spleet, dan zijn de afstanden van het midden der verschillende openingen tot de y -as = $e, 2e, 3e, \dots$. Brengen wij door de y -as een vlak V loodrecht op de voortplantingsrichting der gediffracteerte golven, en noemen wij v den afstand OP van eenig punt P achter het scherm tot V , dan zullen de verstoringen, door de verschillende golfstelsels in dat punt teweeggebracht, kunnen voorgesteld worden door:

$$\begin{aligned} q_0 &= a_1 \cos 2 \pi \left(\frac{t}{T} - \frac{v}{\lambda} \right) \\ q_1 &= a_1 \cos 2 \pi \left(\frac{t}{T} - \frac{v - e \sin \vartheta}{\lambda} \right) \\ &\dots \dots \dots \\ q_k &= a_1 \cos 2 \pi \left(\frac{t}{T} - \frac{v - k e \sin \vartheta}{\lambda} \right). \end{aligned}$$

Of, als men $\frac{e \sin \vartheta}{\lambda} = p_1, \dots \dots \frac{k e \sin \vartheta}{\lambda} = p_k$ stelt:

$$\begin{aligned} q_0 &= a_1 \cos 2 \pi \left(\frac{t}{T} - \frac{v}{\lambda} + p_0 \right) \\ q_1 &= a_1 \cos 2 \pi \left(\frac{t}{T} - \frac{v}{\lambda} + p_1 \right) \\ &\dots \dots \dots \\ q_k &= a_1 \cos 2 \pi \left(\frac{t}{T} - \frac{v}{\lambda} + p_k \right). \end{aligned}$$

De totale verstoring is alzoo voor n openingen:

$$q_0 + q_1 + q_2 + \dots \dots + q_{n-1} = A \cos 2 \pi \left(\frac{t}{T} - \frac{v}{\lambda} + P \right),$$

waarin:

$$A^2 = \left(a_1 \sum_{k=0}^{k=n-1} \cos 2 \pi p_k \right)^2 + \left(a_1 \sum_{k=0}^{k=n-1} \sin 2 \pi p_k \right)^2$$

$$\operatorname{tg} 2 \pi P = \frac{\sum_{k=0}^{k=n-1} \sin 2 \pi p_k}{\sum_{k=0}^{k=n-1} \cos 2 \pi p_k}.$$

Daar $p_k = k p_1$ is, wordt:

$$a_1 \sum_{k=0}^{k=n-1} \cos 2 \pi p_k = a_1 \frac{\cos (n-1) \pi p_1 \sin n \pi p_1}{\sin \pi p_1}$$

$$a_1 \sum_{k=0}^{k=n-1} \sin 2 \pi p_k = a_1 \frac{\sin (n-1) \pi p_1 \sin n \pi p_1}{\sin \pi p_1}$$

A en P verkrijgen dus de eenvoudige gedaanten:

$$A = a_1 \frac{\sin n \pi p_1}{\sin \pi p_1}$$

$$P = \frac{1}{2} (n-1) p_1.$$

Vervangen we a_1 en p_1 door hare waarden, dan wordt de amplitudo voorgesteld door:

$$A = \frac{p}{\lambda} a \frac{\sin \frac{\pi p \sin \vartheta}{\lambda}}{\frac{\pi p \sin \vartheta}{\lambda}} \cos \vartheta d \vartheta \cdot \frac{\sin \frac{n \pi e \sin \vartheta}{\lambda}}{\sin \frac{\pi e \sin \vartheta}{\lambda}},$$

eene welbekende uitkomst, waarbij men weder, zooals in de gewone theorie geschiedt, tot het geval $n = \infty$ kan overgaan.

VI.

Andere wijze van toepassing van het
Theorema van Fourier.

Het theorema van FOURIER kan nog op andere wijze gebruikt worden dan we tot hiertoe gedaan hebben. Wij zullen de bedoelde handelwijze kort uiteenzetten, en die dan in het vervolg ook toepassen.

Wanneer men eene functie $f(x, y)$ in twee factoren kan ontbinden, zoodat:

$$f(x, y) = \varphi(x, y) \psi(x, y) \dots \dots (57)$$

is, dan kan men vooreerst $f(x, y)$ rechtstreeks door de formule (12) ontwikkelen, zooals we tot hiertoe gedaan hebben. Maar niets belet ons, alleen $\psi(x, y)$ te ontwikkelen in den vorm (12), en die reeks dan te vermenigvuldigen met $\varphi(x, y)$, waarbij de factor $\varphi(x, y)$, daar de integraties niet naar x en y geschieden, onder de integraalteekens kan gebracht worden. Elke term van de ontwikkeling van ψ wordt dan met $\varphi(x, y)$ vermenigvuldigd. Men heeft dan:

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty d\mu d\nu \varphi(x, y) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\xi, \eta) \times \\ \times \cos \mu(x - \xi) \cos \nu(y - \eta) d\xi d\eta \dots \dots (58)$$

De methode, die tot de ontwikkeling (58) leidt, wordt in een bijzonder geval zeer eenvoudig.

Stel namelijk, dat de functie $f(x, y)$ binnen zekere grenzen, b. v. voor eene of meer openingen in het diffracteerend vlak (het xy -vlak) door eene bepaalde functie van x en y wordt voorgesteld, die we F zullen noemen, terwijl buiten de genoemde grenzen $f(x, y) = 0$ is. Wij kunnen dan φ en ψ zoodanig kiezen, dat φ steeds $= F$ is, terwijl ψ voor de waarden van x en y , die met de openingen overeenkomen $= 1$, en verder daarbuiten $= 0$ is. Wij hebben dus:

$$f = F, \varphi = F, \psi = 1 \dots \dots \dots (59)$$

voor de openingen, en

$$f = 0, \varphi = F, \psi = 0 \dots \dots \dots (60)$$

overal elders in het diffracteerend vlak. Hiermede is steeds aan (57) voldaan.

Het voordeel van deze handelwijze treedt aan den dag, wanneer men achtereenvolgens met dezelfde grenzen voor x en y , maar met verschillende waarden van F te doen heeft. Men zou dan met de formule (12) werkende, telkens eene nieuwe ontwikkeling hebben uit te voeren; volgt men daarentegen de andere methode, en kiest men daarbij φ en ψ als boven, dan verkrijgt men de ontwikkelingen van $f(x, y)$ voor alle verschillende waarden van F door slechts éénmaal het theorema van FOURIER, en wel op de functie $\psi(x, y)$ toe te passen.

Laat b. v. op eene zelfde opening in een ondoorschijnend vlak beurtelings in loodrechte en in scheeve richting een lichtbundel vallen. De functie $f(x, y)$, die dan het invalende licht in dat vlak voorstelt, is in die beide gevallen zeer verschillend. Volgens de eerste methode verkrijgt men

voor de beide gevallen eene geheel andere ontwikkeling; volgens de tweede heeft men slechts éénmaal eene functie ψ te ontwikkelen, die in de opening $= 1$ en daarbuiten $= 0$ is, terwijl alleen $\varphi(x, y) = F$ voor de beide gevallen verschillend is.

Nemen wij thans het geval van eene willekeurige opening in het $x y$ -vlak. Het licht, dat we vooreerst loodrecht invallend onderstellen, stellen we voor door:

$$q = a \cos 2 \pi \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} \right).$$

Aan het scherm wordt dit:

$$q = a \cos 2 \pi \frac{t}{T},$$

en deze functie komt overeen met $\varphi(x, y) = F$.

Beschouwen wij nu eene functie $\psi(x, y)$, die in de opening de waarde 1 heeft en daarbuiten 0. Ontbinden we deze door het theorema van FOURIER, dan kunnen we een der deelen voorstellen door:

$$\psi' = A' \cos(\mu x + \nu y + l) \dots \dots (61)$$

Een der deelen van $q = f(x, y) = \varphi(x, y) \times \psi(x, y)$ wordt dan:

$$u = a A' \cos 2 \pi \frac{t}{T} \cos(\mu x + \nu y + l),$$

wat wij kunnen splitsen in:

$$u_1 = \frac{1}{2} a A' \cos \left(2 \pi \frac{t}{T} - \mu x - \nu y - l \right)$$

en

$$u_2 = \frac{1}{2} a A' \cos \left(2 \pi \frac{t}{T} + \mu x + \nu y + l \right).$$

Aan beide deelen u_1 en u_2 beantwoordt een plat golfstelsel achter het diffracterend vlak. Wordt b. v. de aan

het eerste deel u_1 beantwoordende beweging door (21) voorgesteld, dan heeft men in het vlak S :

$$\frac{1}{2} a A' = a', \quad \Phi_1 = l, \quad \mu = \frac{2 \pi \cos \alpha'}{\lambda} \text{ en } \nu = \frac{2 \pi \cos \beta'}{\lambda}.$$

Noemen we nu den brandpuntsafstand der lens f ; het optisch middelpunt en het brandpunt liggen op de z -as; laten in het focale vlak \mathbf{x} en \mathbf{y} de coördinaten zijn van het punt waar het golfstelsel zich vereenigt, dan kan men, wanneer α' en β' zeer weinig van 90° verschillen, schrijven:

$$\mathbf{x} = f \cos \alpha' \text{ en } \mathbf{y} = f \cos \beta',$$

en dus:

$$\mathbf{x} = f \frac{\mu \lambda}{2 \pi}, \quad \mathbf{y} = f \frac{\nu \lambda}{2 \pi}.$$

In Fig. 3, die we ons in het focale vlak geteekend voorstellen, is F het hoofdbrandpunt, en loopen $F\xi$ en FH evenwijdig aan de coördinatenassen; P is het zooeven beschouwde punt (\mathbf{x} , \mathbf{y}). Het golfstelsel u_2 zal terecht komen in P' met de coördinaten $\mathbf{x}' = -f \frac{\mu \lambda}{2 \pi}$ en $\mathbf{y}' = -f \frac{\nu \lambda}{2 \pi}$; terwijl wanneer er geen scherm was het invallend licht zich in F zou vereenigen.

De intensiteit wordt in P en P' bepaald door $\left(\frac{1}{2} a A'\right)^2$, met weglating van den hierin voorkomenden factor $d \mu^2 d \nu^2$.

Vergelijken wij thans met het bovenstaande het geval dat het licht scheef invalt. Noemen we de richting (α, β, γ) , dan kan de invallende verstoring voorgesteld worden door:

$$q = a \cos 2 \pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma}{\lambda} \right).$$

Aan het scherm wordt dit:

$$q = a \cos 2 \pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x \cos \alpha + y \cos \beta}{\lambda} \right);$$

hier wordt dus $\varphi(x, y) = F$ door deze functie voorgesteld.

Door combinatie met ψ' (61) wordt nu een deel van $\varrho = f(x, y)$:

$$u = a A' \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x \cos \alpha + y \cos \beta}{\lambda} \right) \cos(\mu x + \nu y + l);$$

en dit splitsen we in:

$$u_1 = \frac{1}{2} a A' \cos \left(2\pi \frac{t}{T} - \mu' x - \nu' y - l \right),$$

en

$$u_2 = \frac{1}{2} a A' \cos \left(2\pi \frac{t}{T} - \mu'' x - \nu'' y + l \right),$$

waarin:

$$\mu' = \frac{2\pi \cos \alpha}{\lambda} + \mu, \quad \nu' = \frac{2\pi \cos \beta}{\lambda} + \nu,$$

$$\mu'' = \frac{2\pi \cos \alpha}{\lambda} - \mu, \quad \nu'' = \frac{2\pi \cos \beta}{\lambda} - \nu.$$

Is nu weder $(\alpha', \beta', \gamma')$ de richting van een gediffracteerd golfstelsel, b. v. behoorende bij u_1 , dan is:

$$\mu' = \frac{2\pi \cos \alpha'}{\lambda}, \quad \nu' = \frac{2\pi \cos \beta'}{\lambda},$$

en dus:

$$\cos \alpha' = \frac{\mu' \lambda}{2\pi} = \cos \alpha + \frac{\mu \lambda}{2\pi},$$

$$\cos \beta' = \frac{\nu' \lambda}{2\pi} = \cos \beta + \frac{\nu \lambda}{2\pi}.$$

Zijn \mathbf{x}' en \mathbf{y}' de coördinaten van het punt in het focale vlak waar het golfstelsel u_1 zich vereenigt, dan is in de onderstelling dat α' en β' zeer weinig van 90° verschillen:

$$\mathbf{x}' = f \cos \alpha' = f \left(\cos \alpha + \frac{\mu \lambda}{2\pi} \right),$$

$$\mathbf{y}' = f \cos \beta' = f \left(\cos \beta + \frac{\nu \lambda}{2\pi} \right).$$

Voor het punt waar u_2 zich concentreert is:

$$\mathbf{x}'' = f \left(\cos \alpha - \frac{\mu \lambda}{2\pi} \right), \mathbf{y}'' = f \left(\cos \beta - \frac{\nu \lambda}{2\pi} \right).$$

En voor het brandpunt op de bijas die de richting van het invallende licht heeft is:

$$\mathbf{x}_0 = f \cos \alpha, \mathbf{y}_0 = f \cos \beta.$$

In Fig. 3 zijn P_1 , P'_1 en F_1 de genoemde punten. Uit de waarden der coördinaten blijkt, dat men deze punten verkrijgt door eene verschuiving resp. van P , P' en F ten bedrage van $x = f \cos \alpha$ en $y = f \cos \beta$ (eigenlijk $x = f \cot \alpha$ en $y = f \cot \beta$).

De intensiteiten in de respectieve punten zijn dezelfde gebleven. Derhalve: wanneer er bij loodrecht invallend licht een zeker buigingsbeeld ontstaat rondom het punt F , dan ontstaat bij scheef invallend licht volkomen hetzelfde buigingsbeeld met dezelfde intensiteitsverhoudingen rondom F_1 .

Als voorbeeld passen we de gevonden eigenschap toe op eene enkele spleet. Wanneer hierbij het licht loodrecht invalt, verkrijgen wij, zooals wij zagen, eene verdeling van licht over eene lijn in het focale vlak, die loodrecht op de randen der spleet staat. Verplaatsen wij thans vooreerst het verwijderde lichtpunt in eene richting loodrecht op die randen, dan blijft het buigingsbeeld op diezelfde lijn liggen, maar wordt daarover over een zekeren afstand verschoven. En wanneer wij nu vervolgens het lichtpunt evenwijdig aan de randen verplaatsen, heeft dit eene verschuiving van het buigingsbeeld in diezelfde richting ten gevolge. Gemakkelijk leidt men hieruit af, hoe het buigingsbeeld zal zijn, wanneer men met eene verwijderde lichtlijn evenwijdig aan de spleet werkt. Dezelfde redeneering is bij een rooster van toepassing.

VII.

De werkelijke tralieschermen. Diffractie bij terugkaatsing.

Tot hiertoe hebben wij steeds ondersteld, dat de diffracterende rooster een meetkundig vlak was zonder dikte, en met uitzondering der openingen geheel ondoorschijnend. Wij laten nu voor het oogenblik die onderstelling varen, en zullen thans de diffractie beschouwen door schermen, zooals die in de werkelijkheid gebruikt worden. Deze schermen kunnen bestaan uit fijne, even dikke metaaldraden, die op gelijke afstanden van elkander gespannen zijn; deze schermen werden het eerst en het meest door FRAUNHOFER gebruikt: hij spande bij zijne eerste proeven metaaldraden over twee schroeven, die de tegenoverstaande zijden van een klein raam vormden, en waarvan de spoed $\frac{1}{169}$ Par. duim (0,16 mM) bedroeg; bij verdere proeven gebruikte hij schroeven met een spoed van $\frac{1}{340}$ Par. duim (0,08 mM) en nog andere ¹⁾. Of

¹⁾ FRAUNHOFER, Neue Modifikation des Lichtes durch gegenseitige Einwirkung und Beugung der Strahlen, und Gesetze derselben. Opgenomen in de „Denkschriften der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu München für das Jahr 1821“. Het hier medegedeelde vindt men op bl. 21, 24 en volg. Ook de verder vermelde soorten van roosters werden door FRAUNHOFER bij zijne proeven gebruikt.

men bedekt eene glasplaat met eene laag metaal (zilver of (bij FR.) goud); hierin trekt men dan op gelijke afstanden lijnen, die de doorschijnende gedeelten vormen. Of eindelijk — en deze roosters zijn de beste — men trekt op eene glasplaat eene reeks van zeer fijne groeven, die men door middel van eene verdeelmachine op gelijke afstanden van elkander met een diamant in het glas graveert; hierbij maken de groeven de ondoorschijnende en de tusschenruimten de doorschijnende gedeelten van het scherm uit.

Het ligt voor de hand, dat de verschijnselen, die men hierbij waarneemt, niet geheel zullen overeenstemmen met de theorie, welke op de onderstelling van denkbeeldige schermen gegrond is. Daarbij komt nog, dat de schermen, die in de practijk gebruikt worden, onderling ook zeer onderscheiden zijn: de lichtgolven zullen zich op eene andere wijze langs de cilindervormige metaaldraden in hetzelfde medium voortplanten dan langs de randen der groeven in glasplaten bij verandering van medium. Eene geringe ongelijkheid in de beide randen van elke groeve, kan, zooals FRAUNHOFER reeds heeft waargenomen, eene niet onbelangrijke wijziging in het voorkomen van het buigingsbeeld teweegbrengen.

Verder berust de tot nog toe behandelde theorie der diffractieverschijnselen op de onderstelling, dat de „onderschijnende” gedeelten der schermen werkelijk ondoorschijnend zijn: dit nu is wel bij de dradenschermen het geval, maar geenszins bij de glazen platen; men kan niet zeggen, dat de ingekraste groeven volstrekt geen licht doorlaten. De niet volkomen ondoorschijnende gedeelten kunnen niet zonder invloed op het buigingsbeeld zijn, en in sommige gevallen is die invloed niet onbelangrijk. Men heeft toch bij de constructie van het diffractiebeeld, afgezien van de betrekke-

lijke intensiteit der deelen, steeds te rekenen met het phaseverschil der interfereerende stralen, waaronder er ook zijn, die door de „ondoorschijnende” gedeelten worden doorgelaten: en het werkelijke diffractiebeeld zal dus niet geheel overeenkomen met het theoretische. Het is zelfs, zooals Lord RAYLEIGH opmerkt,¹⁾ theoretisch mogelijk, dat in het centrale deel van het buigingsbeeld, in plaats van het maximum van intensiteit, duisternis gevonden wordt. Men heeft zich daartoe slechts als diffracteerend scherm eene glazen plaat te denken, die geheel doorschijnend is, dus zonder groeven, maar die uit elementen is samengesteld, overeenkomende met de doorschijnende en ondoorschijnende gedeelten van een gewonen rooster, alle deelen van gelijke breedte, en die zoo geconstrueerd zijn, dat de stralenbundel, die door eenig deel in eene zekere richting wordt doorgelaten, met den door het volgende deel in dezelfde richting doorgelaten bundel steeds eene halve golflengte in phase verschilt. Het eerste maximum aan weerszijden van het midden, dat ontstaat waar de lichtstralen in het focale vlak een phaseverschil $= \lambda$ hebben, zal dan eene viermaal zoo groote intensiteit hebben als het centrale maximum zou gehad hebben, wanneer de afwisselende deelen van het scherm ondoorschijnend waren geweest. Men zou nog verder kunnen gaan, en vragen, of de diffracteerende glazen platen niet zoo samengesteld zouden kunnen worden, dat het hoofdmaximum in een willekeurig vooraf bepaald deel van het buigingsbeeld zou vallen. Maar hiertoe zou vereischt worden, dat men bij de roosters de phase, door de deelen van elk element veroorzaakt, willekeurig kon regelen. Het mag wel voor zeker gehouden worden,

¹⁾ In de reeds boven (bl. 40, noot) aangehaalde verhandeling.

dat de vervaardiging van „roosters”, die aan zulke voorwaarden voldoen, in de practijk altijd onmogelijk zal zijn, en dat dus dergelijke groote afwijkingen nooit waargenomen zullen worden; maar uit een theoretisch oogpunt verdient de zaak toch de aandacht.

Het onderzoek naar den invloed van het diffracteerend scherm op de waargenomen verschijnselen kan slechts onvolledig zijn. Denken wij ons ook nu weder een vlak S onmiddellijk achter het scherm, dan zal de lichtbeweging in de ruimte achter S het gevolg zijn van die in S . De beweging in S is echter niet in bijzonderheden aan te geven: het is duidelijk, dat zij afhankelijk zal zijn van den aard van het scherm; maar deze betrekking kan niet in eene functie der coördinaten uitgedrukt worden.

De verschillende genoemde gevallen laten zich evenwel in eene algemeene theorie samenvatten. Voor alle geldt, dat de beweging in S periodiek is wat de plaats betreft; de periode is gelijk aan den afstand van de overeenkomstige randen van twee op elkaar volgende strepen of van de assen van twee op elkaar volgende metaaldraden. Wij zullen deze grootheid weder een element, of, met het oog op de periodiciteit, de periode van den rooster noemen, en door e voorstellen. De breedte van eene spleet, wanneer daarvan sprake is, zij weder $= p$, die van eene tusschenruimte $= q$.

Laat nu vooreerst het licht loodrecht invallen; dan is het duidelijk, dat de evenwichtsverstoring in S de zoo even genoemde periode e in de richting der x -as vertoonen zal.

Ontbinden wij nu de invallende verstoring $q = a \cos 2 \pi \frac{t}{T}$ door het theorema van FOURIER, dan verkrijgen we behalve een deel dat onafhankelijk van x is, andere met de

perioden $e, \frac{1}{2}e, \frac{1}{3}e, \dots$. Het eerste deel geeft achter het scherm een golfstelsel, dat zich in de richting van het invallend licht voortplant; aan elk der overige deelen beantwoorden, zooals we vroeger (Hoofdst. V) gezien hebben, twee golfstelsels, welker voortplantingsrichtingen in het x -vlak loodrecht op de richting der spleten staan. De isophasische lijnen, die bij deze golfstelsels behooren, liggen in het vlak S op afstanden respectievelijk $= e, \frac{1}{2}e, \frac{1}{3}e, \dots$ van elkander. Is ϑ de hoek, dien de voortplantingsrichting met de normaal maakt, welke hoek voor twee bij elkander behorende golfstelsels aan weerszijden der normaal ligt, dan moet voor een golfstelsel, dat met de periode $\frac{1}{k}e$ in S overeenkomt:

$$\frac{\lambda}{\sin \vartheta} = \frac{1}{k}e,$$

en dus

$$\sin \vartheta = \frac{k\lambda}{e}$$

zijn, evenals wij vroeger gevonden hebben bij de onderstelling van een meetkundig vlak als scherm. *De richting* der golfstelsels en dus *de plaats* der lichtpunten in het focale vlak blijkt alzoo alleen van e , maar verder niet van den aard van den rooster af te hangen.

De amplitudo zal in S niet dezelfde zijn als vóór den rooster: zij zal behalve van x ook van den aard van den rooster afhangen. Evenzoo zal in het vlak S de phase verschillen met die van het invallend licht.

Voor het geval van scheef invallend licht is de redeneering minder eenvoudig.

Stellen we het invallend licht weder voor door:

$$\varrho = a \cos 2 \pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma}{\lambda} \right).$$

Voor het vlak S , dat we als xy -vlak aannemen, wordt dit:

$$\varrho = a \cos 2 \pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x \cos \alpha + y \cos \beta}{\lambda} \right).$$

Deze vergelijking zou den bewegingstoestand in S voorstellen, indien de rooster er niet was. Nu zijn echter door den invloed van den rooster de amplitudo en de phase anders, en men kan de verstoring nu voorstellen door:

$$\varrho' = aa_1 \cos 2 \pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x \cos \alpha + y \cos \beta}{\lambda} - l_1 \right). \quad (62)$$

waarbij a_1 en l_1 grootheden zijn, die op eene ingewikkelde wijze van de verschijnselen in den rooster afhangen, maar die we niet nader kunnen bepalen. Het is echter zeker, dat a_1 en l_1 beide periodieke functiën van x zijn met de periode e .

Voor ϱ' (62) kunnen we schrijven:

$$\begin{aligned} \varrho' = & aa_1 \cos 2 \pi l_1 \cos 2 \pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x \cos \alpha + y \cos \beta}{\lambda} \right) + \\ & + aa_1 \sin 2 \pi l_1 \sin 2 \pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x \cos \alpha + y \cos \beta}{\lambda} \right). \quad (63) \end{aligned}$$

Nu zijn, evenals a_1 en l_1 , ook $a_1 \cos 2 \pi l_1$ en $a_1 \sin 2 \pi l_1$ periodieke functiën van x met de periode e . Wij kunnen elke dezer functiën volgens het theorema van FOURIER ontwikkelen. Wij zullen de constante termen, die men bij deze ontwikkeling verkrijgt, door $E_{0,1}$ en $E_{0,2}$, en de deelen met de periode $\frac{e}{k}$ door:

$$v_{k_1} = E_{k_1} \cos \left(\frac{2 k \pi x}{e} + \Phi_{k_1} \right) (64)$$

en

$$v_{k_2} = E_{k_2} \cos \left(\frac{2 k \pi x}{e} + \Phi_{k_2} \right) (65)$$

voorstellen.

Voeren we nu eerst de constante gedeelten van $a_1 \cos 2 \pi l_1$ en $a_1 \sin 2 \pi l_1$ in ϱ' (63) in, dan krijgen we voor het overeenkomstige gedeelte der ontwikkeling:

$$\begin{aligned} \varrho'_0 &= a E_{0,1} \cos 2 \pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x \cos \alpha + y \cos \beta}{\lambda} \right) + \\ &+ a E_{0,2} \sin 2 \pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x \cos \alpha + y \cos \beta}{\lambda} \right). \end{aligned}$$

Op bekende wijze vindt men hiervoor:

$$\varrho'_0 = a E_0 \cos 2 \pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x \cos \alpha + y \cos \beta}{\lambda} - L_0 \right),$$

waarin:

$$E_0 = \sqrt{E_{0,1}^2 + E_{0,2}^2} \text{ en } \operatorname{tg} 2 \pi L_0 = \frac{E_{0,2}}{E_{0,1}}.$$

Hieraan beantwoordt klaarblijkelijk een golfstelsel in de richting van het invallend licht met de amplitudo $a E_0$.

De waarden (64) en (65) samenvattende verkrijgt men voor een deel van ϱ' (63) in 't algemeen:

$$\begin{aligned} \varrho'_k &= a E_{k_1} \cos \left(\frac{2 k \pi x}{e} + \Phi_{k_1} \right) \cos 2 \pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x \cos \alpha + y \cos \beta}{\lambda} \right) + \\ &+ a E_{k_2} \cos \left(\frac{2 k \pi x}{e} + \Phi_{k_2} \right) \sin 2 \pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x \cos \alpha + y \cos \beta}{\lambda} \right), \end{aligned}$$

wat men kan splitsen in twee deelen van den vorm:

$$\left. \begin{aligned} w_{k_1} &= B_{k_1} \cos 2 \pi \left\{ \frac{t}{T} - \left(\frac{\cos \alpha}{\lambda} + \frac{k}{e} \right) x - \frac{y \cos \beta}{\lambda} - L_{k_1} \right\} \\ \text{en} \\ w_{k_2} &= B_{k_2} \cos 2 \pi \left\{ \frac{t}{T} - \left(\frac{\cos \alpha}{\lambda} - \frac{k}{e} \right) x - \frac{y \cos \beta}{\lambda} - L_{k_2} \right\} \end{aligned} \right\} . (66)$$

Aan elk dezer deelen van ϱ'_k beantwoorden nu weder twee golfstelsels, in den regel met verschillende amplitudines B_{k_1} en B_{k_2} . Voor de voortplantingsrichtingen vindt men:

$$\cos \alpha_1 = \cos \alpha + \frac{k \lambda}{e}, \beta_1 = \beta,$$

en

$$\cos \alpha_2 = \cos \alpha - \frac{k \lambda}{e}, \beta_2 = \beta.$$

Het blijkt dus, dat *de richting* der gediffracteerde golfstelsels en dus *de plaats* der beelden in het focale vlak ook hier alleen van de periode e afhangt, terwijl overigens de aard van den rooster zonder invloed is.

De amplitudines, die wel van den aard van den rooster afhangen, zijn niet nader te bepalen.

Men kan de zaak ook kort op de volgende wijze uitdrukken.

Wanneer de rooster er niet was, zouden wij langs het vlak S eene phaseverandering hebben, die het gevolg zou zijn van de omstandigheid dat het licht niet loodrecht maar scheef invalt; er zou dan slechts één golfstelsel achter het vlak ontstaan, dat de voortzetting zou zijn van het invallende licht, en de hoeken α en β met de x - en de y -as zou maken. Brengt nu de rooster eene verandering in den toestand langs S , in dier voege, dat zoowel de amplitudo als de phase veranderen, maar dat deze veranderingen de periode e in de richting der x -as vertoonen, dan heeft dat ten gevolge, dat in plaats van één golfstelsel vele golfstelsels ontstaan, welker voortplantingsrichtingen bepaald worden door:

$$\cos \alpha' = \cos \alpha \pm \frac{k \lambda}{e}, \beta' = \beta.$$

De grootte der bovenbedoelde veranderingen in amplitudo en phase kan men niet bepalen; maar dat doet hierbij niets ter zake, daar *de aard* der verschijnselen dezelfde blijft. Wij zullen ons daarom in het vervolg het diffracteerend scherm weder voorstellen als een meetkundig vlak, dat geheel doorschijnend is, behalve de openingen.

Eene afzonderlijke beschouwing verdient nog de diffractie bij terugkaatsing; bijzondere moeielijkheden doen zich daarbij niet voor.

De roosters die hierbij alleen in aanmerking komen, bestaan uit eene gepolijste oppervlakte, waarin op gelijke afstanden van elkander een groot aantal zeer fijne, alle even breede lijnen getrokken zijn. Die oppervlakte kan gevormd worden door eene gepolijste metalen of eene verzilverde glazen plaat met ingekraste groeven: de metaaloppervlakte, die het licht terugkaatst, treedt dan in de plaats van de spleten. Het zou wenschelijk zijn, dat de tusschenruimten in 't geheel geen licht terugkaatsten; dit is echter wel niet te verwezenlijken: het onderscheid tusschen de heldere en de „doffe” gedeelten van het diffracteerend vlak ligt alleen in eene meerdere of mindere mate van reflecteerend vermogen. Theoretisch is het voldoende, dat er een constant phaseverschil zij tusschen het licht, dat door het heldere en door het doffe gedeelte van elk element wordt teruggekaatst; en verder dat, evenals altijd, de overeenkomstige deelen van al de elementen volkomen gelijk zijn. De periode van den rooster zij weder $= e$.

Wij denken ons een vlak S' evenwijdig aan den rooster en onmiddellijk daarvóór; de ingewikkelde verschijnselen aan den rooster brengen nu in dit vlak zekere evenwichts-

verstoringen teweeg, en het zijn deze, die vervolgens aanleiding geven tot de trillingen, die zich van de voorzijde van den rooster af voortplanten, dus tot de „teruggekaatste” beweging in den meest algemeenen zin. Welke nu de invloed van den rooster op het invallende licht, d. i. op de lichtbeweging in S' moge zijn, het is zeker, dat de door den rooster veroorzaakte afwijkingen in amplitudo en phase zich bij elk element van den rooster op dezelfde wijze herhalen, en dus periodieke functiën zijn van x met de periode e .

Vergelijken wij nu de doorgelaten en de teruggekaatste beweging. De eerste is het resultaat van de beweging in het vlak S (onmiddellijk *achter* het scherm); de tweede wordt op dezelfde wijze teweeggebracht door den toestand in het vlak S' .

Het licht, dat in zekere richting L invalt, zou, wanneer het door niets gestoord werd, langs S' en langs S volkomen dezelfde periodiciteit geven. Daarbij komen nu nog veranderingen in amplitudo en phase, die, hoe verschillend zij aan de beide vlakken mogen zijn, toch zoowel langs S' als langs S de periode e in de richting der x -as hebben. De omstandigheden, die *de richting* der golfstelsels bepalen, zijn dus in de beide gevallen geheel dezelfde. Noemen we nu L_1 den in de richting L doorgelaten, en L' den gewonen teruggekaatsten straal, en laten, behalve $L_1, a_1, a_2; b_1, b_2; \dots$ de voortplantingsrichtingen aangeven van de golfstelsels waaruit het doorgelaten licht is samengesteld, waarbij de hoeken $(L_1, a_1), (L_1, a_2)$, resp. $(L_1, b_1), (L_1, b_2), \dots$ aan weerszijden van L_1 gelijk zijn. Denken we ons nu op dezelfde wijze golfstelsels $a', a''; b', b''; \dots$ aan weerszijden van L' , en zoodanig, dat zij respectievelijk gelijke hoeken met de normaal maken als $a_1, a_2; b_1, b_2; \dots$ dan volgt uit het boven gezegde,

dat, behalve L' , a' , a'' ; b' , b'' ;... de voortplantingsrichtingen zijn van de golfstelsels waaruit het gereflecteerde licht bestaat.

In het doorgelaten licht kan men L_1 *den gewonen*, en a_1 , a_2 ; b_1 , b_2 ;... *secundaire* of *buigingsbundels* noemen; evenzoo kunnen in het teruggekaatste licht naast *den gewonen bundel* L' , de overige bundels a' , a'' ; b' , b'' ;... *buigingsbundels* genoemd worden.

VIII.

De cirkelvormige opening.

Een der merkwaardigste gevallen van diffractie is dat, waarbij de diffracteerende opening cirkelvormig is.

Het vlak van het scherm nemen we tot xy -vlak, den oorsprong in het middelpunt van den cirkel; de straal zij $= r$. Stellen we het invallend licht voor door $\varrho = a \cos 2\pi \frac{t}{T}$, dan kunnen we weder:

$$\varrho = f(x, y) = \varphi(x, y) \psi(x, y) \dots \quad (67)$$

stellen. Kiezen we nu φ en ψ zoodanig dat:

$$\varphi = a \cos 2\pi \frac{t}{T}, \quad \psi = 1$$

voor de opening, en

$$\varphi = a \cos 2\pi \frac{t}{T}, \quad \psi = 0$$

voor het overige gedeelte van het scherm is, dan wordt hierdoor steeds aan (67) voldaan.

Ontwikkelen we nu $\psi(x, y)$ volgens FOURIER; noemen we een van de deelen der ontwikkeling $\psi_1(x, y)$, dan is:

$$\begin{aligned} \psi_1(x, y) = & \frac{d\mu d\nu}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\xi, \eta) \cos \mu(x - \xi) \times \\ & \times \cos \nu(y - \eta) d\xi d\eta \dots \dots \dots \quad (68) \end{aligned}$$

Wij hebben bij deze integraties aan x , y , μ en ν bepaalde waarden toe te kennen. Beschouwen wij nu ξ en η als de loopende coördinaten van een punt in het platte vlak, dan wordt de integratie naar ξ en η eene integratie over het platte vlak, die we door één integraalteekening zullen voorstellen, terwijl we voor een element van het platte vlak dV zullen schrijven. Daar de factor $\psi(\xi, \eta) = 0$ is wanneer het punt (ξ, η) buiten den cirkel ligt, en $= 1$ wanneer het daarbinnen ligt, hebben wij alleen over het deel van het platte vlak binnen den cirkel te integreeren. Schrijven we nu voor (68):

$$\psi_1(x, y) = \frac{d\mu d\nu}{\pi^2} \int \cos \mu (x - \xi) \cos \nu (y - \eta) dV. \quad (69)$$

dan kunnen we deze integraal herleiden als volgt:

$$\begin{aligned} & \int \cos \mu (x - \xi) \cos \nu (y - \eta) dV = \\ & = \frac{1}{2} \cos (\mu x + \nu y) \int \cos (\mu \xi + \nu \eta) dV + \\ & + \frac{1}{2} \sin (\mu x + \nu y) \int \sin (\mu \xi + \nu \eta) dV + \\ & + \frac{1}{2} \cos (\mu x - \nu y) \int \cos (\mu \xi - \nu \eta) dV + \\ & + \frac{1}{2} \sin (\mu x - \nu y) \int \sin (\mu \xi - \nu \eta) dV. \end{aligned}$$

Het valt niet moeielijk aan te toonen, dat de tweede en de vierde dezer integralen $= 0$ zijn. Men verkrijgt dus:

$$\begin{aligned} \psi_1(x, y) & = \frac{d\mu d\nu}{2\pi^2} \cos (\mu x + \nu y) \int \cos (\mu \xi + \nu \eta) dV + \\ & + \frac{d\mu d\nu}{2\pi^2} \cos (\mu x - \nu y) \int \cos (\mu \xi - \nu \eta) dV. \end{aligned}$$

Beschouwen we nu de hier voorkomende integralen nader.

Noemen we de eerste M en de tweede N :

$$M = \int \cos (u \xi + v \eta) dV$$

$$N = \int \cos (u \xi - v \eta) dV.$$

Stellen we:

$$\mu = \sigma \cos \tau$$

$$v = \sigma \sin \tau,$$

dan is:

$$\mu \xi + v \eta = \sigma (\xi \cos \tau + \eta \sin \tau).$$

Daar ξ en η de coördinaten van een punt P binnen den cirkel met betrekking tot de assen $O X$ en $O Y$ zijn (Fig. 4), is $\xi \cos \tau + \eta \sin \tau$ de afstand van P tot eene middellijn AB , die een hoek $= 90^\circ + \tau$ met de x -as maakt; noem dien afstand l , dan is:

$$M = \int \cos (\sigma l) dV.$$

De waarde dezer integraal is klaarblijkelijk onafhankelijk van τ : zij hangt alleen af van σ , d. i. van $\sqrt{\mu^2 + v^2}$, en bovendien van den straal r van den cirkel. We stellen dus:

$$M = F(\sigma, r).$$

Om N te herleiden kan men op dergelijke wijze te werk gaan. Men verkrijgt dan:

$$N = \int \cos (\sigma l') dV,$$

waarin l' de loodlijn is, uit P neergelaten op eene middellijn, die een hoek $= 90^\circ - \tau$ met $O X$ maakt. Het is gemakkelijk in te zien, dat de integralen M en N gelijk zijn, zoodat men voor een der deelen van $\psi(x, y)$ vindt:

$$\psi_1 = \frac{d\mu}{2} \frac{dv}{\pi^2} F(\sigma, r) \left[\cos (u x + v y) + \cos (u x - v y) \right].$$

Een der deelen van het invallend licht wordt alzoo, daar $u = \varphi(x, y) \times \psi_1(x, y)$ is:

$$u = \frac{a d \mu d \nu}{2 \pi^2} F(\sigma, r) \cos 2 \pi \frac{t}{T} \left[\cos(\mu x + \nu y) + \cos(\mu x - \nu y) \right],$$

of:

$$u = \frac{a d \mu d \nu}{4 \pi^2} F(\sigma, r) \left[\cos\left(2 \pi \frac{t}{T} - \mu x - \nu y\right) + \right. \\ \left. + \cos\left(2 \pi \frac{t}{T} + \mu x + \nu y\right) + \cos\left(2 \pi \frac{t}{T} - \mu x + \nu y\right) + \right. \\ \left. + \cos\left(2 \pi \frac{t}{T} + \mu x - \nu y\right) \right].$$

Het blijkt hieruit weder, dat elk deel van het invallend licht gesplitst wordt in vier golfstelsels van gelijke intensiteit, welke voortplantingsrichtingen symmetrisch loopen ten opzichte der coördinatenassen. Daar echter de x - en de y -as bij de cirkelvormige opening geheel willekeurig genomen kunnen worden, komt dit hierop neer, dat de lichtbeweging in een oneindig aantal golfstelsels ontbonden wordt, welke voortplantingsrichtingen aan alle kanten gelijke hoeken maken met de z -as; en hieruit vloeit noodzakelijk voort de symmetrie van het buigingsbeeld rondom het hoofdbrandpunt als middelpunt.

De amplitudines hangen behalve van $d \mu$ en $d \nu$ ook af van de functie $F(\sigma, r)$, die we nog kort willen bespreken. Wij hebben:

$$F(\sigma, r) = \int \cos(\sigma l) dV.$$

Voeren we nu poolcoördinaten ϱ , ω in, dan is:

$$l = \varrho \cos \omega \\ dV = \varrho d\varrho d\omega,$$

en dus:

$$F(\sigma, r) = \int^r \int_0^{2\pi} \cos(\sigma \varrho \cos \omega) \varrho d\varrho d\omega.$$

De integraal $\int_0^{2\pi} \cos(\sigma \varrho \cos \omega) d\omega$ is eene Bessel'sche functie.

Duiden we deze functie met de gewone notatie aan:

$$\int_0^{2\pi} \cos(\sigma \varrho \cos \omega) d\omega = 2\pi J_0(\sigma \varrho),$$

dan hebben we:

$$F(\sigma, r) = 2\pi \int_0^r J_0(\sigma \varrho) \varrho d\varrho.$$

Voeren we als nieuwe veranderlijke in $\sigma \varrho = \zeta$, dan wordt:

$$F(\sigma, r) = \frac{2\pi}{\sigma^2} \int_0^{\sigma r} J_0(\zeta) \zeta d\zeta.$$

Volgens eene bekende ontwikkeling is nu:

$$F(\sigma, r) = \frac{2\pi}{\sigma^2} \left(\frac{\sigma^2 r^2}{2} - \frac{\sigma^4 r^4}{2^2 \cdot 4} + \frac{\sigma^6 r^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6} - \frac{\sigma^8 r^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8} + \dots \right),$$

of, na eenige herleiding, wanneer men $\frac{1}{2} \sigma r = g$ stelt:

$$F(\sigma, r) = \pi r^2 \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{g}{1} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{g^2}{1 \cdot 2} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{g^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \right)^2 + \dots \right\};$$

en hebben we dus voor de amplitudo van een der deelen van u :

$$A = \frac{a d \mu d \nu}{4 \pi^2} \cdot \pi r^2 S \dots \dots \dots (70)$$

De intensiteit van een dier golfstelsels is dan evenredig met de waarde van S^2 , terwijl

$$S = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{g}{1} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{g^2}{1 \cdot 2} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{g^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \right)^2 + \dots (71)$$

is.

Het is niet noodig over deze uitkomsten in uitvoerige discussie te treden: wij wijzen er alleen op, dat zij overeenkomen met die welke men door de gewone methode verkrijgt. ¹⁾

¹⁾ Zie VERDET, Leçons d'optique physique, t. I, ch. VII, § 77, en MASCART, Traité d'optique, t. I, ch. V, § 213. Verg. ook Lord RAYLEIGH, Wave Theory of Light, § 12, en de verhandeling van Dr. SIRKS.

Noemen wij de richting van een gediffracteerd golfstelsel (α, β, γ) , dan is $\sigma = \sqrt{\mu^2 + \nu^2} = \frac{2}{\lambda} \pi \sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta} = \frac{2}{\lambda} \pi \sin \gamma$: het blijkt dus, dat σ en ook $g = \frac{1}{2} \sigma r = \frac{\pi r \sin \gamma}{\lambda}$ te gelijk met γ verdwijnen. De reeks S (71) zal voor $\gamma = 0$ hare hoofdmaximumwaarde $= 1$ verkrijgen: de tweede macht van den coëfficiënt waarmede in (70) $d\mu d\nu$ vermenigvuldigd is, drukt dan de intensiteit van de centrale lichtschiif, of eigenlijk die in het middelpunt daarvan uit. Voor toenemende waarden van g wordt S bij afwisseling positief en negatief, en bij den overgang nul; de volgende maximumwaarden van S^2 nemen steeds af; en men verkrijgt dus het bekende diffractiebeeld van eene centrale lichtschiif met afwisselende donkere en in intensiteit steeds afnemende lichte ringen.

Door AIRY en door SCHWERD is de intensiteit voor in eene reeks opklimmende waarden van g berekend en in tafels gebracht. SCHWERD heeft voor de eerste elf maxima van het buigingsbeeld achtereenvolgens gevonden (de centrale intensiteit is $= 1$ genomen) 1, 0,01745 $\left(= \frac{1}{57}\right)$, 0,00415, ... tot 0,00007 ¹⁾.

¹⁾ Die Beugungserscheinungen, § 119 en Tab. III. Zie ook VERDET en MASCART t. a. pl.

IX.

Combinatie van verschillende diffracterende openingen. Twee gekruiste spleten. De parallelogramvormige opening.

Uit het tot hertoe behandelde is herhaaldelijk gebleken, dat de bewegingstoestand achter het diffracterend scherm kan opgevat worden als te bestaan uit een oneindig aantal platte golfstelsels, die zich elk in zijne eigene richting in de ruimte achter het scherm voortplanten. Deze lichtbewegingen, die, door de lens van elkander gescheiden, ieder in haar eigen brandpunt in het focale vlak geconcentreerd worden, worden door het theorema van FOURIER ook theoretisch van elkander gescheiden, en bewezen afzonderlijk te bestaan. Om te onderzoeken wat er onder verschillende omstandigheden van de lichtbeweging wordt, heeft men alzoo slechts na te gaan wat er van elk der gediffracteerde golfstelsels afzonderlijk wordt.

Niets verhindert ons nu, op grooteren of kleineren afstand achter het diffracterend vlak ons een tweede dergelijk vlak te denken met openingen van willekeurigen vorm. Het door het eerste vlak gediffracteerde licht zal nu invallend licht zijn ten opzichte van het tweede, en door den invloed van dit

laatste opnieuw eene verandering ondergaan. Wij stellen ons voor dit nader te onderzoeken.

Wij nemen dadelijk het bepaalde geval aan, dat zich in het eerste vlak eene enkele spleetvormige opening bevindt met de breedte p_1 . Het tweede vlak, waarin zich eveneens eene spleetvormige opening bevindt met de breedte p_2 , denken we ons evenwijdig aan het eerste; de randen der spleten kruisen elkander. Verder onderstellen wij alles als in Hoofdst. IV. Ook de coördinatenassen kiezen we als boven, in het eerste vlak; den oorsprong nemen wij in het middelpunt van het parallelogram, dat door de randen der eerste spleet en de projecties van de randen der tweede spleet op het eerste vlak gevormd wordt.

Onderstellen wij thans voor een oogenblik, dat alleen de eerste spleet aanwezig was, en dat loodrecht op het vlak daarvan een golfstelsel met de amplitudo a inviel, dan zou een der gediffracteerde golfstelsels voorgesteld worden door:

$$u_1 = a \frac{d \mu}{\pi} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} \mu p_1}{\mu} \cos \left(2 \pi \frac{t}{T} - \mu x \right) . \quad (72)$$

De voortplantingsrichting van dit golfstelsel zou loodrecht staan op de randen der spleet, en een hoek ϑ , bepaald door $\mu = \frac{2 \pi \sin \vartheta}{\lambda}$, met de normaal op het scherm, dus met de as der lens maken. De amplitudo van dit golfstelsel zou worden voorgesteld door:

$$A = a \frac{d a}{\pi} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} \mu p_1}{\mu} (73)$$

De lichtbeweging van dit stelsel zou door de lens vereenigd worden in een punt, dat men verkrijgt door eene verschui-

ving in het focale vlak, van het hoofdbrandpunt uit, in eene richting loodrecht op de randen der spleet, en wel over een afstand $\xi = f \operatorname{tg} \vartheta$, waarvoor wij, als wij ϑ zeer klein onderstellen, mogen schrijven:

$$\xi = \frac{f \lambda}{2 \pi} \cdot \mu.$$

Wij kunnen dientengevolge voor A (73) ook schrijven:

$$A = a \frac{d \xi}{\pi} \cdot \frac{\sin \frac{\pi p_1 \xi}{f \lambda}}{\xi} \dots \dots \dots (74)$$

Wanneer het licht niet loodrecht invalt, maar een kleinen hoek met de normaal maakt, zou het bij afwezigheid van beide schermen geconcentreerd worden in een punt, dat wij door O zullen aanduiden. Wordt bij scheef invallend licht alleen de eerste spleet gebruikt, dan zal er onder de gediffracteerde golfstelsels een voorkomen met de amplitudo A (74), dat terecht zal komen in een punt P van het focale vlak, zoodanig gelegen dat OP loodrecht op de randen der spleet staat, terwijl $OP = \xi$ is.

Hetzelfde wat de eerste spleet met het invallende licht doet, zal nu de tweede spleet doen met elk golfstelsel dat door de diffractie in de eerste spleet ontstaan is, dus b. v. ook met het golfstelsel dat wij zoeven beschouwd hebben. Zij zal dit splitsen in een aantal nieuwe golfstelsels, die alle geconcentreerd zullen worden in punten van de lijn die men uit P loodrecht op de randen der tweede spleet kan trekken. Zij Q een punt van deze lijn op een afstand $= \eta$ van P liggende, dan zal daar de lichtbeweging samenkomen van een golfstelsel met de amplitudo

$$A_1 = A \frac{d \eta}{\pi} \cdot \frac{\sin \frac{\pi p_2 \eta}{f \lambda}}{\eta}, \dots \dots \dots (75)$$

of:

$$A_1 = a \frac{d \xi d \eta}{\pi^2} \cdot \frac{\sin \frac{\pi p_1 \xi}{f \lambda}}{\xi} \cdot \frac{\sin \frac{\pi p_2 \eta}{f \lambda}}{\eta} \dots \quad (76)$$

Klaarblijkelijk kunnen ξ en η als de coördinaten van een punt in het focale vlak beschouwd worden met betrekking tot assen, die door O loodrecht op de richtingen der spleten getrokken zijn. De lichtsterkte in een punt met de coördinaten ξ en η kan evenredig gesteld worden met:

$$\frac{\sin^2 \frac{\pi p_1 \xi}{f \lambda}}{\xi^2} \cdot \frac{\sin^2 \frac{\pi p_2 \eta}{f \lambda}}{\eta^2},$$

of ook, als men $\frac{\pi p_1 \xi}{f \lambda} = \xi'$ en $\frac{\pi p_2 \eta}{f \lambda} = \eta'$ stelt, met:

$$\frac{\sin^2 \xi'}{\xi'^2} \cdot \frac{\sin^2 \eta'}{\eta'^2}.$$

Laat men de vlakken waarin zich de twee spleten bevinden met elkander samenvallen, dan verkrijgt men het geval van eene opening, die de gedaante van een parallelogram heeft. Dat de verkregen uitkomst, die men ook door rechtstreeksche toepassing van het theorema van FOURIER met twee onafhankelijk veranderlijken had kunnen afleiden, met de welbekende resultaten der gewone theorie overeenstemt, behoeft niet verder aangewezen te worden.

X.

Twee gekruiste tralieschermen.

Evenals wij in het vorige hoofdstuk uit het geval van diffractie door eene rechte lijnige spleet dat van twee elkander kruisende spleten, en daaruit verder dat van eene parallelogramvormige opening hebben afgeleid, kunnen wij ook van een enkel traliescherm tot twee gekruiste tralies overgaan, en daaruit de diffractie door een dubbelen of samengestelden rooster (zooals wij dezen vorm van het diffracteerend scherm zullen noemen), in één vlak afleiden.

Wij zullen de diffracteerende vlakken korthedshalve I en II noemen, en onderstellen dat de roosters elkander recht-hoekig kruisen; I is het vlak waarop het licht invalt; de spleten loopen in I evenwijdig met de y -as, in II met de x -as; verder geldt voor I alles wat in Hoofdstuk V voor het diffracteerend vlak (den enkelen rooster) ondersteld is.

Voor een der golfstelsels waarin we het loodrecht invallend licht $q = a \cos 2 \pi \frac{t}{T}$ ontbinden kunnen, hebben we reeds vroeger gevonden:

$$u_m = \frac{2}{m \pi} a \sin \frac{m p \pi}{e} \cos 2 \pi \frac{t}{T} \cos \frac{2 m \pi x}{e}, \quad . \quad (77)$$

waarin $m = 0, 1, 2, \dots$

Deze bundel kan gesplitst worden in twee andere:

$$\left. \begin{aligned} u_{m_1} &= A_m \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{m x}{e} \right) \\ u_{m_2} &= A_m \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{m x}{e} \right) \end{aligned} \right\} \dots (78)$$

waarin

$$A_m = \frac{1}{m \pi} a \sin \frac{m p \pi}{e},$$

of

$$A_m = \frac{p}{e} a \frac{\sin \frac{m p \pi}{e}}{\frac{m p \pi}{e}} \dots (79)$$

Elk dezer golfstelsels zal in het focale vlak een lichtpunt doen ontstaan, en men verkrijgt door de werking van den eersten rooster eene rij lichtpunten loodrecht op de richting der spleten, en op gelijke afstanden $\frac{\lambda}{e}$ van elkander. Het helderste (het hoofdbeeld) ligt in het hoofdbrandpunt der lens. De intensiteiten kan men voorstellen door:

$$\dots i_{-2}, i_{-1}, i_0, i_{+1}, i_{+2} \dots$$

Met behulp van de formule (79) zijn de i 's nu gemakkelijk te bepalen, waarbij men in aanmerking heeft te nemen dat $i_{-k} = i_{+k}$ is. Voor i_0 heeft men:

$$i_0 = \left(\frac{p}{e} a \right)^2;$$

en voor een der beelden in het algemeen:

$$i_{+k} = i_{-k} = \left(\frac{p}{e} a \right)^2 \frac{\sin^2 \frac{k p \pi}{e}}{\left(\frac{k p \pi}{e} \right)^2}.$$

De totale intensiteit van het buigingsbeeld is blijkbaar:

$$I = \frac{p}{e} a^2,$$

waarmede de uitkomst van de sommatie:

$$I = i_0 + 2 \sum_{k=1}^{k=\infty} i_k = \frac{p}{e} a^2$$

overeenstemt. Dit alles is reeds vroeger gevonden.

Onderstellen we nu dat we alleen met den tweeden rooster werken; de gegevens zijn p' , q' en $p' + q' = e'$; het invallend licht als boven. Wij verkrijgen weder eene rij lichtpunten loodrecht op de richting der spleten en met het centrale lichtpunt in het hoofdbrandpunt; de onderlinge afstand der lichtpunten is thans $= \frac{\lambda}{e'}$. Noemen we de intensiteiten:

$$\dots i'_{-2}, i'_{-1}, i'_0, i'_{+1}, i'_{+2}, \dots$$

dan is:

$$i'_0 = \left(\frac{p'}{e'} a \right)^2,$$

$$i'_{+k} = i'_{-k} = \left(\frac{p'}{e'} a \right)^2 \frac{\sin^2 \frac{k p' \pi}{e'}}{\left(\frac{k p' \pi}{e'} \right)^2},$$

en

$$I' = \frac{p'}{e'} a^2.$$

Het is duidelijk, dat, wanneer men met één rooster te doen heeft, bij verandering der intensiteit van het invallende licht die van elken buigingsbundel en van het geheele diffractiebeeld in dezelfde verhouding zal veranderen.

Gaan wij thans over tot het geval van de twee gekruiste roosters. De eerste splitst het invallende licht in een aantal golfstelsels:

$$\dots u_{-2}, u_{-1}, u_0, u_{+1}, u_{+2}, \dots$$

die in de punten:

$$\dots b_{-2,0}, b_{-1,0}, b_{0,0}, b_{+1,0}, b_{+2,0} \dots$$

zouden vereenigd worden.

$$\begin{aligned} &\dots b_{-2,+2}, b_{-1,+2}, b_{0,+2}, b_{+1,+2}, b_{+2,+2}, \dots \\ &\dots b_{-2,+1}, b_{-1,+1}, b_{0,+1}, b_{+1,+1}, b_{+2,+1}, \dots \\ &\dots b_{-2,0}, b_{-1,0}, b_{0,0}, b_{+1,0}, b_{+2,0}, \dots \\ &\dots b_{-2,-1}, b_{-1,-1}, b_{0,-1}, b_{+1,-1}, b_{+2,-1}, \dots \\ &\dots b_{-2,-2}, b_{-1,-2}, b_{0,-2}, b_{+1,-2}, b_{+2,-2}, \dots \end{aligned}$$

Thans vallen al deze golfstelsels op den tweeden rooster, en worden daardoor elk op zich zelf gediffracteerd. Uit de loodrecht invallende u_0 ontstaan nu golfstelsels:

$$\begin{aligned} &u_{0,+2}, \\ &u_{0,+1}, \\ &u_{0,0}, \\ &u_{0,-1}, \\ &u_{0,-2}, \end{aligned}$$

die in de in verticale rij gelegen punten:

$$\begin{aligned} &b_{0,+2}, \\ &b_{0,+1}, \\ &b_{0,0}, \\ &b_{0,-1}, \\ &b_{0,-2}, \end{aligned}$$

vereenigd worden. De andere u 's worden eveneens ontbonden; en het is gemakkelijk, de uitwerking van den tweeden rooster op die golfstelsels na te gaan, althans wanneer wij steeds onderstellen, dat de diffractiehoeken (voor zooverre er van merkbare intensiteit sprake is) zeer klein zijn. Zoo geeft

bijvoorbeeld u_{+1} bij de diffractie door II aanleiding tot golfstelsels, die in de punten:

$$\begin{aligned} b_{+1, +2}, \\ b_{+1, +1}, \\ b_{+1, 0}, \\ b_{+1, -1}, \\ b_{+1, -2}, \end{aligned}$$

zullen terechtkomen; en zoo zal elk der golfstelsels $u_0, u_{\pm 1}, u_{\pm 2}, \dots$ in een aantal nieuwe golfstelsels ontbonden worden, die eene rij lichtpunten evenwijdig aan de y -as in het focale vlak doen ontstaan.

De amplitudo van al deze golfstelsels wordt nu zeer gemakkelijk verkregen. Wij weten reeds, dat A_m (79) de amplitudo van het m^{de} beeld van het midden af gerekend bij de eerste tralie voorstelt: zij wordt verkregen door de amplitudo van het invallende licht met

$$\frac{p}{e} \cdot \frac{\sin \frac{m p \pi}{e}}{\frac{m p \pi}{e}}$$

te vermenigvuldigen.

Op dezelfde wijze vindt men, wanneer op den tweeden rooster een golfstelsel invalt, de amplitudo van den n^{en} afgeveken bundel door de amplitudo der invallende golven te vermenigvuldigen met

$$\frac{p'}{e'} \cdot \frac{\sin \frac{n p' \pi}{e'}}{\frac{n p' \pi}{e'}}$$

Daaruit volgt aanstonds voor de amplitudo der trillingen waardoor het beeld $b_{m,n}$ ontstaat:

$$A_{m, n} = \frac{pp'}{ee'} a \frac{\sin \frac{m p \pi}{e}}{\frac{m p \pi}{e}} \cdot \frac{\sin \frac{n p' \pi}{e'}}{\frac{n p' \pi}{e'}} \dots \quad (80)$$

en voor de intensiteit:

$$I_{m, n} = \left(\frac{pp'}{ee'}\right)^2 a^2 \frac{\sin^2 \frac{m p \pi}{e}}{\left(\frac{m p \pi}{e}\right)^2} \cdot \frac{\sin^2 \frac{n p' \pi}{e'}}{\left(\frac{n p' \pi}{e'}\right)^2} \dots \quad (81)$$

In deze formules kan men m en $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ stellen.

Laten we nu de beide diffracteerende vlakken samenvallen, dan verkrijgen we de loodrecht op elkander staande roosters in een enkel plat vlak. De uitkomsten blijven dezelfde. Het zal wel overbodig zijn op te merken, dat het onderscheid in de volgorde van I en II wegvalt, zoodra de vlakken samenvallen. Het resultaat zou hetzelfde blijven, al werden ook van te voren de vlakken verwisseld, gelijk ook uit de symmetrie der formules blijkt. Dezelfde opmerking geldt voor het geval van Hoofdstuk IX.

Noemen we in 't algemeen $i_{m, n}$ de intensiteit van een bundel $u_{m, n}$, dan blijkt uit (81), dat $i_{-m, -n} = i_{+m, +n}$, en nog algemeener $i_{\pm m, \pm n} = i_{+m, +n}$ is, waarin de teekens geheel willekeurig gekozen kunnen worden. Voor *het centrale* of *hoofdbeeld* vindt men, daar $m = n = 0$ is:

$$I_0 = \left(\frac{pp'}{ee'}\right)^2 a^2 \dots \dots \dots \quad (82)$$

Nu zal de hoeveelheid arbeidsvermogen, die in eene tijds-eenheid in de ruimte achter het scherm wordt weggevoerd, gelijk zijn aan de hoeveelheid, die in eene tijdseenheid door

het invallend licht naar het scherm, voor zoover het doorschijnende gedeelte betreft, wordt toegevoerd (zie verder Hoofdstuk V). Men heeft alzoo, daar de verhouding van het doorschijnende gedeelte van het scherm tot het geheele scherm $\frac{pp'}{ee'}$ is, voor de totale intensiteit van het buigingsbeeld:

$$I = \frac{pp'}{ee'} a^2. \dots \dots \dots (83)$$

Men kan dit ook aldus uitdrukken: dat de som der intensiteiten van al *de secundaire beelden* (met inbegrip van *het hoofdbeeld*) gelijk moet zijn aan de intensiteit van het doorgelaten licht. Werkelijk is, daar:

$$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \frac{\sin^2 \frac{m p \pi}{e}}{\left(\frac{m p \pi}{e}\right)^2} = 1 + 2 \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{\sin^2 \frac{m p \pi}{e}}{\left(\frac{m p \pi}{e}\right)^2} = \frac{e}{p}$$

is, en de sommatiën van elkander onafhankelijk zijn:

$$\begin{aligned} I &= \left(\frac{pp'}{ee'} a\right)^2 \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{\sin^2 \frac{m p \pi}{e}}{\left(\frac{m p \pi}{e}\right)^2} \cdot \frac{\sin^2 \frac{n p' \pi}{e'}}{\left(\frac{n p' \pi}{e'}\right)^2} = \\ &= \left(\frac{pp'}{ee'} a\right)^2 \cdot \frac{e}{p} \cdot \frac{e'}{p'} = \frac{pp'}{ee'} a^2. \end{aligned}$$

Stellen we de verhouding $\frac{pp'}{ee'} = \frac{1}{\nu}$, dan komen we weder tot het merkwaardig resultaat, dat $\frac{1}{\nu}$ van het door het diffracterend scherm doorgelaten licht in het centrale beeld geconcentreerd wordt. De verhouding tusschen de intensiteiten van invallend licht, doorgelaten licht en centraal beeld is

dus als $1 : \frac{1}{\nu} : \frac{1}{\nu^2}$. Het blijkt alzoo, dat *de wet der intensiteiten*, zooals wij deze eigenschap zullen noemen, niet alleen voor den enkelen maar ook voor den samengestelden rooster geldt. ¹⁾

¹⁾ Ook dit is langs een geheel anderen weg gevonden door Dr. J. L. SIRKS. Zie beneden.

XI.

Combinatie van den enkelen en den dubbelen rooster met groote openingen van verschillenden vorm.

Na de afzonderlijke behandeling van de diffractie in verschillende enkelvoudige en samengestelde gevallen geven combinatiën als de bovengenoemde geene moeilijkheden meer, en kunnen bijna zonder berekeningen behandeld worden.

Vooraf herinneren wij nog, dat, wanneer men als diffracteerend vlak een scherm gebruikt met eene groote opening, deze opening uit een onbegrensden bundel evenwijdige, loodrecht of scheef invallende lichtstralen een cilindervormigen bundel snijden zal, die de richting van het invallend licht tot beschrijvende lijn en den omtrek der opening tot richtlijn heeft; men heeft dan wat gewoonlijk „rechtlijnige voortplanting” genoemd wordt. (Zie verder Hoofdstuk IV).

Onderstellen we nu als eerste diffracteerend vlak (I) een voorloopig onbegrensd gedachten enkelen of dubbelen rooster: de enkele geeft als diffractiebeeld eene rij lichtpunten, loodrecht op de richting der spleten; de dubbele een aantal lichtpunten, in rechthoekige rangschikking loodrecht op de richting der spleten en evenwijdig daaraan over het focale vlak verdeeld. Onderstellen we verder een tweede diffracteerend vlak (II) met eene opening, die zoo groot is, dat zij kan geacht worden

een cilindrisch begrensden lichtbundel door te laten, dan zullen de golfstelsels, die tot de zoeven genoemde lichtpunten aanleiding geven, elk op zichzelf door de groote opening gediffracteerd worden: deze snijdt uit elk der buigingsbundels een cilindrisch deel, dat zich in zijne eigene richting achter II voortplant. Worden I en II verwisseld, of vallen zij samen, dan blijven de resultaten volkomen dezelfde.

Is de opening in II klein genoeg om zelf nog eene merkbare diffractie te geven, maar toch zoo groot, dat hare afmetingen aanmerkelijk grooter zijn dan de periode van den rooster, dan zal elke lichtbundel waartoe de rooster aanleiding gaf, op dezelfde wijze door de groote opening gediffracteerd worden; en men verkrijgt dus in het focale vlak der lens niet meer *lichtpunten*, zooals eerst, maar kleine congruente *diffractiefiguurtjes*, die gerangschikt zijn zooals de lichtpunten bij den enkelen of dubbelen rooster. Elk dezer diffractiefiguurtjes is nu de figuur die de opening in II doet ontstaan, wanneer er een enkele bundel evenwijdige lichtstralen op valt. Hieruit volgt verder, dat ook de lichtverdeling in elk dier diffractiefiguurtjes identisch zal zijn, zoowel onderling als met de oorspronkelijke figuur, en dat zij alleen in intensiteit zullen verschillen.

Het is gemakkelijk aan te toonen, dat de wet der intensiteiten ook in deze gevallen geldt.

Verbeelden we ons eerst een scherm (I) met eene willekeurige groote opening: eene (niet te smalle) spleet, een rechthoek of een cirkel; en daarachter, of daarmede samenvallende, een enkelen rooster (II), met de periode e .

De eerste opening geeft eene zekere buigingsfiguur, waarvan de afmetingen klein zijn in vergelijking met de afstanden der beelden die de rooster geeft. Zij P een punt dier buigingsfiguur, met de lichtsterkte i . Door de werking van den

rooster ontstaat daaruit eene rij punten, waarvan het middelste met P samenvalt, en die op eene lijn loodrecht op de spleten van den rooster op afstanden $= \frac{\lambda}{e}$ van elkander liggen. De intensiteiten dezer beelden kan men vinden door i met zekere factoren te vermenigvuldigen; stellen wij ze voor door:

$$\dots c_{-2} i, c_{-1} i, c_0 i, c_{+1} i, c_{+2} i, \dots;$$

zoals we weten, is:

$$c_0 = \frac{1}{l^2} \dots \dots \dots (93)$$

en

$$\Sigma c = \frac{1}{l} \dots \dots \dots (94)$$

Is nu P' een tweede punt van de diffractiefiguur door I , dus zonder rooster, met de intensiteit i' , dan doet de rooster hieruit eene dergelijke rij punten ontstaan met de intensiteiten:

$$\dots c_{-2} i', c_{-1} i', c_0 i', c_{+1} i', c_{+2} i', \dots;$$

waarbij de coëfficiënten dezelfde zijn als boven

Dit toepassende op elk punt der buigingsfiguur die door de groote opening gevormd wordt, vindt men dat de rooster eene rij van daarmede congruente figuren geeft. Noemt men de totale lichthoeveelheid in de oorspronkelijke buigingsfiguur I , dan heeft men thans de intensiteiten:

$$\dots c_{-2} I, c_{-1} I, c_0 I, c_{+1} I, c_{+2} I, \dots$$

Uit de formules (93) en (94) volgt nu de wet der intensiteiten.

Het verdient nog opmerking, dat het diffractiebeeld, dat men op deze wijze verkrijgt, wanneer vóór den rooster eene breede spleet geplaatst is, waarvan de randen met die van den rooster evenwijdig loopen, of, wat op hetzelfde neerkomt, wanneer rooster en spleet in één vlak liggen, hetzelfde is

als het buigingsbeeld door een beperkt aantal spleten van den rooster gevormd. Noemen we nu kortheidshalve de maxima der 1^e, 2^e, 3^e klasse van SCHWERD ¹⁾ M_1 , M_2 , M_3 ; dan is het duidelijk, dat de M_2 's met de hen aan weerszijden vergezellende M_3 's niets anders zijn dan herhaalde reproducties van het diffractiebeeld dat door de enkele spleet zonder den rooster gevormd wordt. Hieruit volgt verder, dat de lichtverdeeling over elke groep van één M_2 met zijne M_3 's identisch zal zijn met die over de oorspronkelijke uit de enkele spleet ontstaande hoofdgroep, die uit het hoofdmaximum met zijne links en rechts liggende M_1 's bestaat; en dat al die groepen alleen in lichtsterkte onderling zullen verschillen.

Wordt de enkele rooster door een samengestelden vervangen, terwijl de groote opening dezelfde blijft, dan kan men op elk der door den enkelen rooster gevormde secundaire diffractiefiguren (met inbegrip van het hoofdbeeld) dezelfde redeneering van zooeven toepassen; in verband met het in het vorige Hoofdstuk behandelde blijkt dan onmiddellijk dat de wet der intensiteiten ook voor dit geval doorgaat.

Combineeren wij eene cirkelvormige opening, waarvoor wij de objectiefopening van den kijker zelve nemen, met een dubbelen rooster, dan zal elk der lichte punten, door den rooster gevormd, door den invloed van de groote cirkelvormige opening de bekende gedaante van het diffractiebeeld verkrijgen, dat gevormd wordt door de objectiefopening wanneer die alleen gebruikt wordt, en zal daarvan alleen door de mindere intensiteit verschillen. Ook hier zal de lichtverdeeling in elk der secundaire beelden identisch zijn met die in het hoofdbeeld.

¹⁾ Die Beugungserscheinungen, §§ 129, 130, 131.

XII.

Het onderzoek van Lord Rayleigh en dat
van Dr. Sirks.

De wet der intensiteiten is reeds een aantal jaren geleden door Lord RAYLEIGH gevonden, doch alleen voor het geval van den enkelen rooster, als boven gecombineerd met eene breede spleet of rechthoekige opening. Lord R. zelf echter vermeldt die wet niet uitdrukkelijk: men kan haar alleen uit zijne redeneeringen en formules afleiden. Dr. SIRKS heeft er de aandacht op gevestigd in zijne straks te bespreken verhandeling: deze schrijver haalt een artikel aan (dat eigenlijk eveneens eene uitvoerige verhandeling is) van de hand van Lord RAYLEIGH in de *Encyclopaedia Britannica*¹⁾, dat wel in 1888 geschreven is (1888 is, althans het jaartal van deel XXIV der *Encycl.*), maar waarin Lord R. verwijst naar eene verhandeling van hem zelve, die reeds in 1874 opgenomen is in *The Philosophical Magazine*²⁾. Het laatstgenoemde stuk is, zooals ook uit den titel blijkt, grootendeels van practischen

¹⁾ *Encycl. Brit.* vol. XXIV, art. *Wave Theory of Light*, § 14.

²⁾ *Phil. Mag.* 1874, vol. XLVII. De verhandeling is getiteld: „*On the Manufacture and Theory of Diffraction-gratings.*”

aard, maar het bevat ook belangrijke theoretische gedeelten. Reeds hierin zegt de schr. over de bewuste eigenschap der tralieschermen wat hij later in 1888 herhaalt. De wijze, waarop Lord R. tot zijne uitkomsten geraakt, is eene geheel andere dan de onze. Wij vergenoegen ons voor het overige met naar de aangehaalde geschriften te verwijzen, vooral naar de verhandeling in de *Encycl. Brit.*

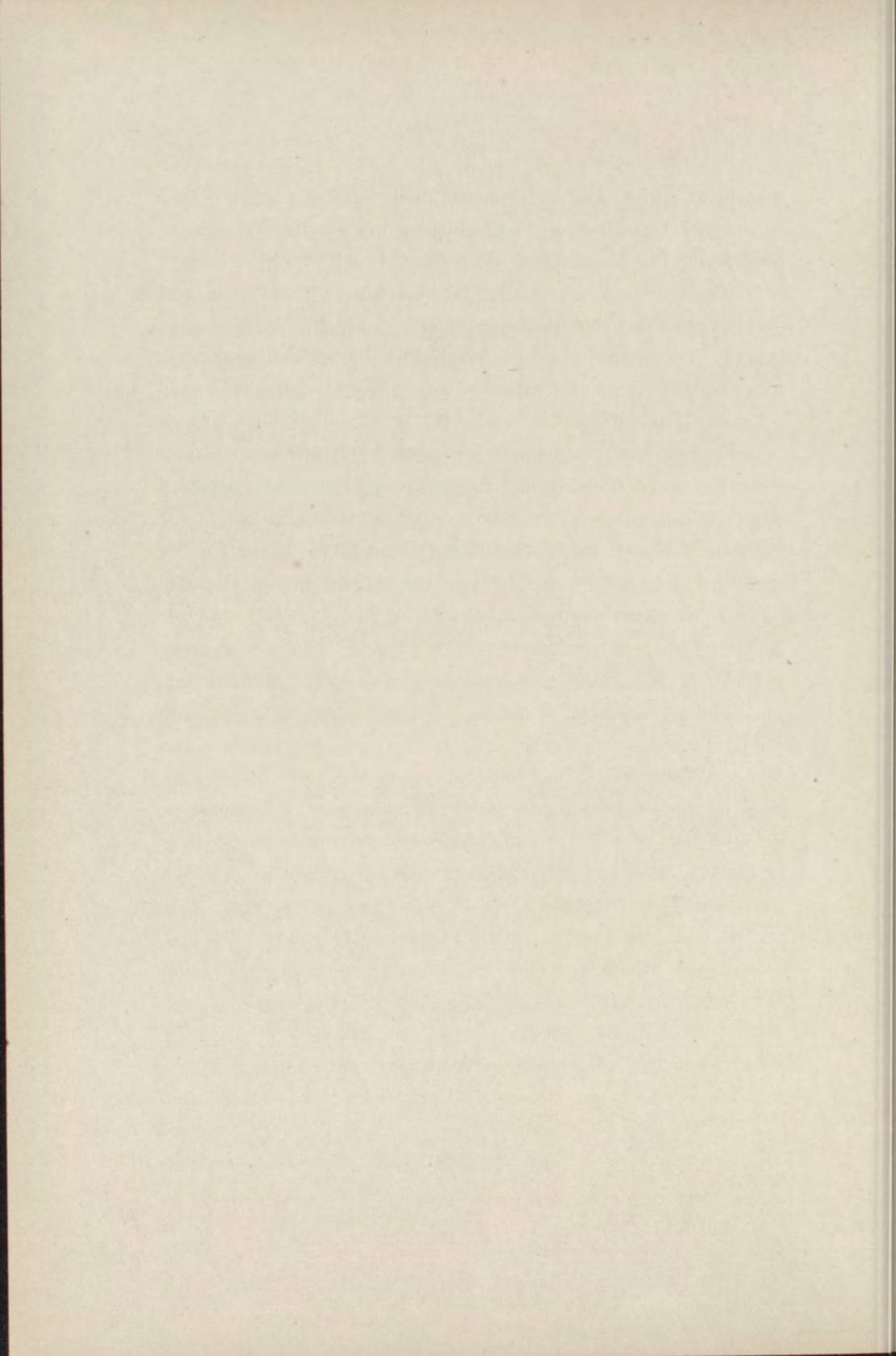
De Heer Dr. J. L. SIRKS, Rector van het Gymnasium te Groningen, heeft in het laatst van 1891 in de werken der Akademie van Wetenschappen, Afdeling Natuurkunde, eene verhandeling gepubliceerd, getiteld: „De l'influence de la diffraction par un réseau à mailles rectangulaires, placé devant l'objectif d'une lunette, sur la clarté de l'image principale d'une étoile” ¹⁾. Voor zoover de inhoud van dit geschrift de practische astronomie betreft, ligt die buiten ons eigenlijk onderwerp. Van meer rechtstreeksch belang voor ons is het, dat schr. de wet der intensiteiten aantoot, niet alleen voor het geval dat door Lord RAYLEIGH behandeld is, maar ook voor nog andere gevallen.

Dr. SIRKS bewijst genoemde wet eerst voor den enkelen rooster, op de boven omschreven wijze door een diaphragma met eene groote vierkante opening begrensd. Hij heeft die wet gevonden onafhankelijk van den arbeid van Lord R., en slaat bij zijne bewijsvoering een geheel anderen weg in dan deze. Vervolgens bewijst schr. de door hem gevonden wet voor het geval van een samengestelden rooster, d. i. voor een metaalgaas met rechthoekige openingen, dat ook weder

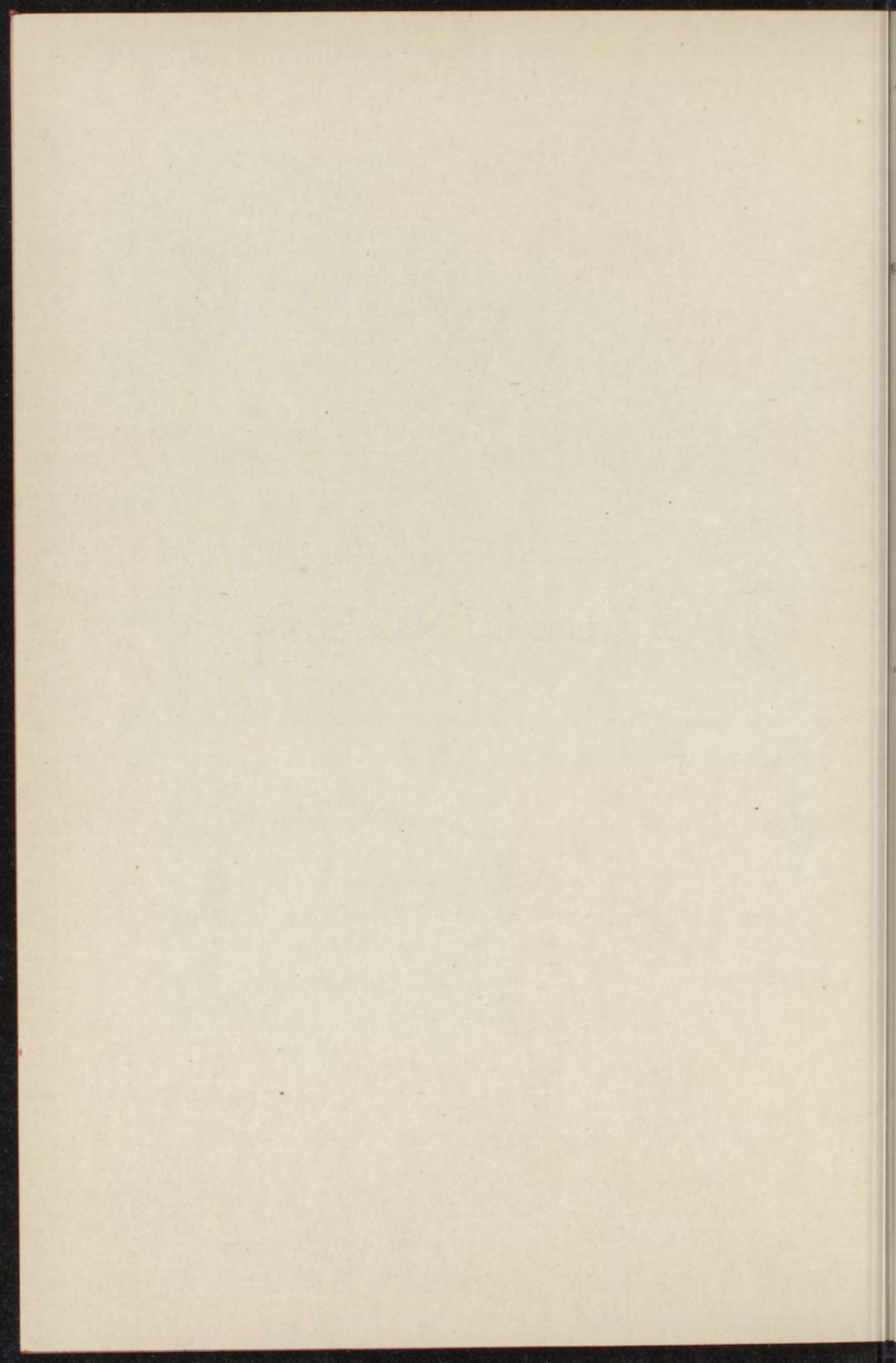
¹⁾ Verslagen en Mededeelingen der Kon. Akad. van Wetensch., Afd. Natuurk., 9^{de} deel, 2^{de} stuk; 1892.

begrensd wordt door een scherm met eene groote vierkante opening. Eindelijk wordt bij gebruik van hetzelfde metaalgaas de vierkante opening door de ronde opening van het objectief vervangen, en aangetoond, dat ook voor dit geval de wet der intensiteiten doorgaat.

Wij voegen hier nog bij, dat de uitkomsten van Dr. SIRKS, ofschoon langs geheel andere wegen verkregen, volkomen overeenstemmen met de onze. Dit in bijzonderheden aan te toonen, ligt niet op onzen weg: ook hebben wij reeds hier en daar gelegenheid gehad daarop te wijzen. Alleen willen wij nog afzonderlijk vermelden, dat schr. nadrukkelijk de aandacht vestigt op de gelijkheid der lichtverdeeling in het hoofdbeeld en de secundaire beelden, en die gelijkheid theoretisch en experimenteel aantoont.



STELLINGEN.



STELLINGEN.

I.

Het verband dat er bestaat tusschen de invallende lichtbeweging en de daaruit ontstaande diffractiebundels wordt door middel van het theorema van FOURIER algemeener en duidelijker aangetoond dan volgens de gewone methoden.

II.

De wijze waarop WÜLLNER (Lehrbuch der Experimentalphysik, II T. II Abschn.) de intensiteitsformule van het buigingsbeeld bij ééne en bij meer spleetopeningen afleidt, verdient afkeuring.

III.

De redeneeringen waardoor Lord RAYLEIGH de wet der intensiteiten voor het bekende bijzondere geval vindt, zijn, al zijn de uitkomsten juist, niet altijd volkomen streng.

IV.

Om het ontstaan der steenkoollagen te verklaren, behoeft men niet noodzakelijk aan te nemen, dat het koolzuurgehalte der atmosfeer in de steenkoolperiode veel aanzienlijker geweest zij dan in latere tijden. —

V.

De redeneering waardoor VERDET tracht aan te toonen (*Leçons d'optique physique* t. I, § 62) dat iedere gepolijste, ook zelfs in geringe mate gepolijste oppervlakte regelmatig het licht terugkaatst, wanneer maar de hoek van inval nagenoeg $= 90^\circ$ is, is onjuist.

VI.

De oplossing van het problema van KEPLER door middel der reeksontwikkeling van LAGRANGE verdient de voorkeur boven alle andere oplossingsmethoden.

VII.

De uitspraak van BRIOT en BOUQUET (*Leçons de géométrie analytique*, l. VI, ch. IV): „En général il est impossible de placer une droite sur une surface algébrique d'un degré supérieur à trois”, moet vòor de oppervlakken van den vierden graad gewijzigd worden.

VIII.

Het is verkeerd, de congruentie der meetkundige figuren te bewijzen door „op-elkander-plaatsing”.

Nog strenger afkeuring verdient het zoogenaamde „omvouden”, enz. der vlakke figuren.

IX.

Het onderwijs in de Zoölogie aan eerstbeginnenden behoort met de behandeling der hoogere dieren aan te vangen.

X.

De invoering van het begrip „beweging” is in de elementaire Meetkunde noodzakelijk.

XI.

De logarithmen van GAUSS behooren in het elementair onderwijs in de Wiskunde niet opgenomen te worden.

XII.

Het is wenschelijk, dat het Grieksch als leervak op de gymnasia voor de aanstaande studenten in alle faculteiten gehandhaafd blijve.

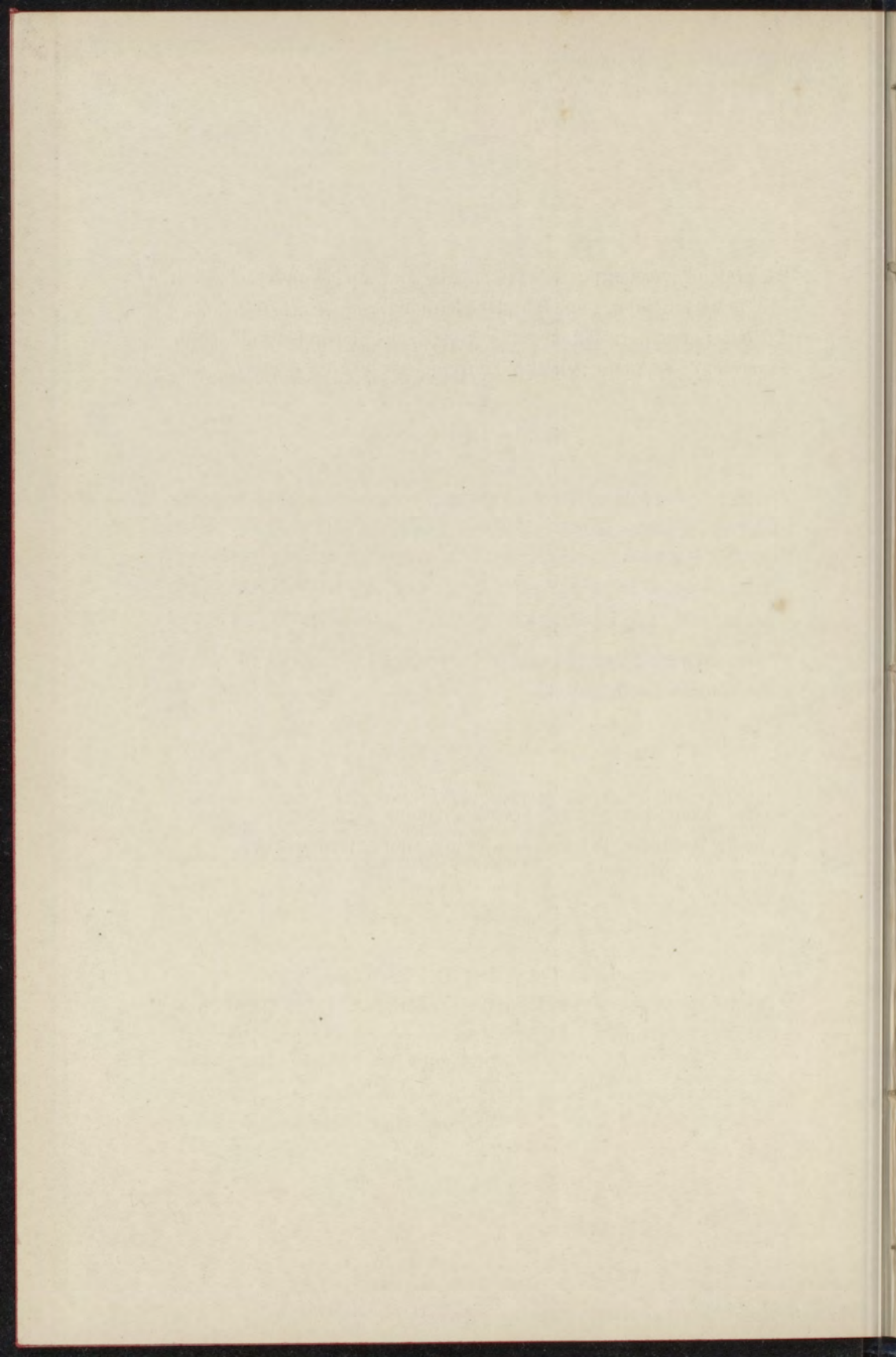


Fig. 1.

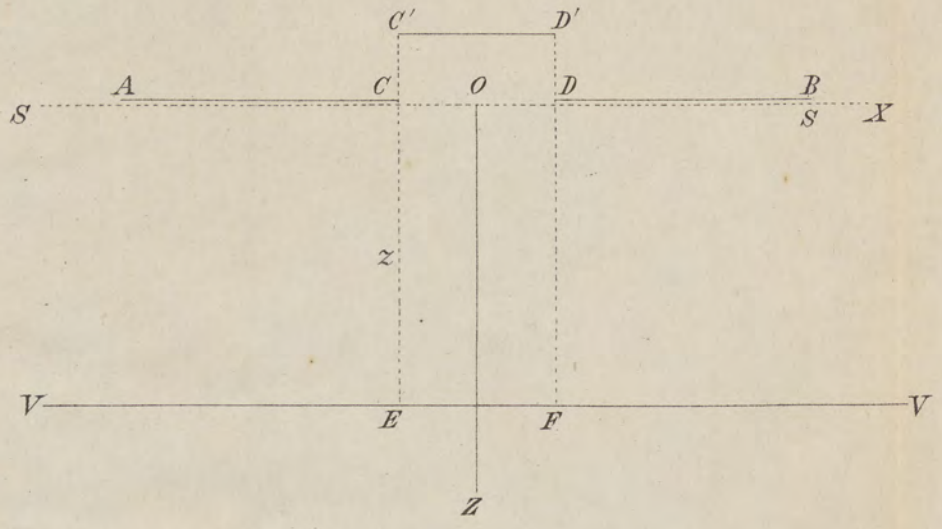


Fig. 2.

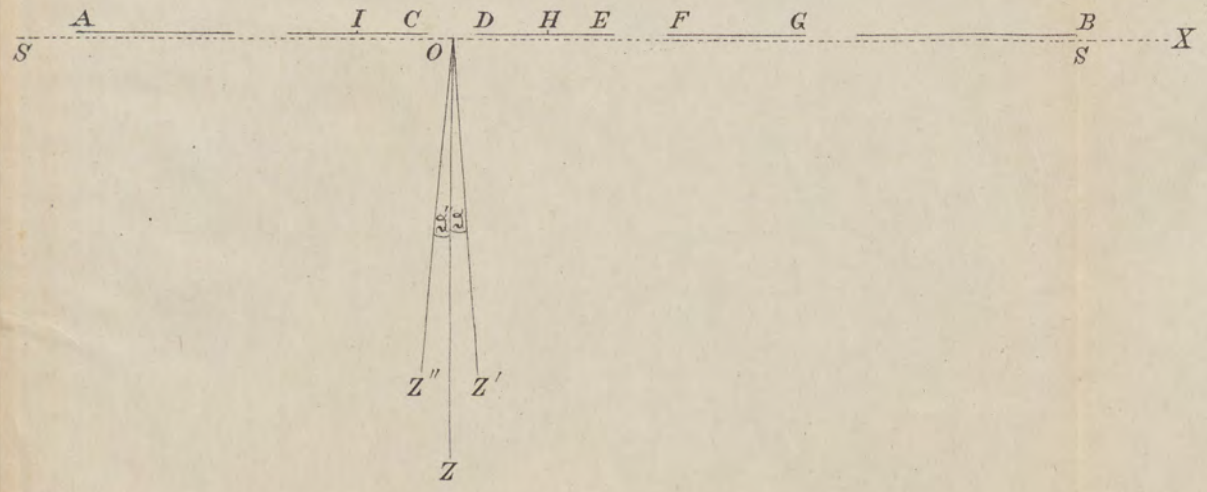


Fig. 3.

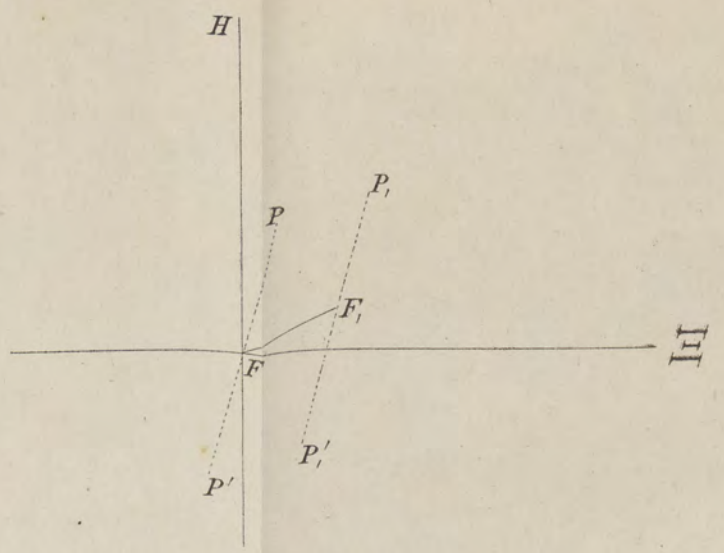


Fig. 4.

