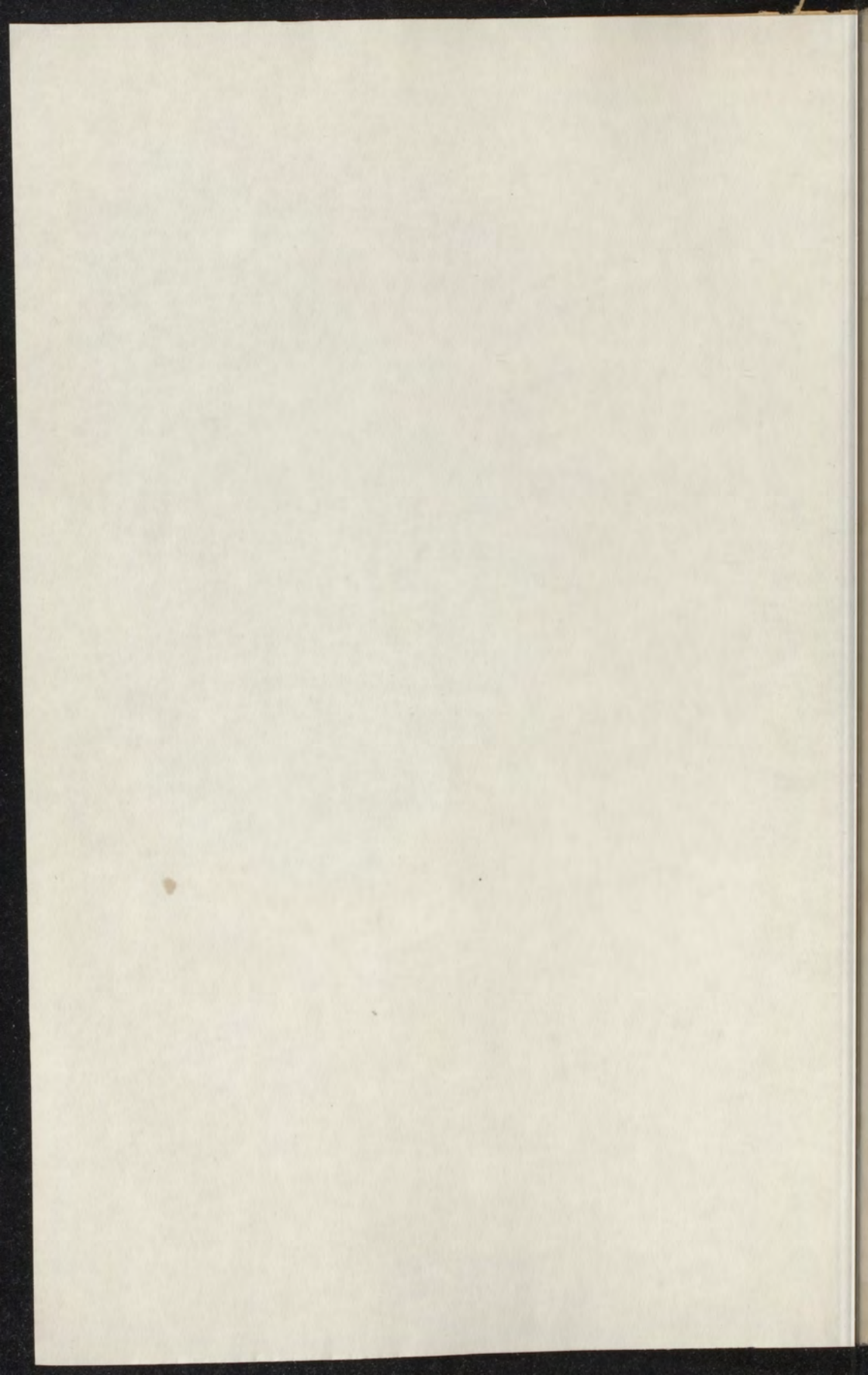


The image shows a full-page view of marbled paper. The pattern is a complex, organic swirl of colors, including shades of brown, tan, yellow, and green. The lines are fluid and interconnected, creating a sense of movement and depth. In the bottom-left corner, there is a small, white, rounded rectangular sticker with the number '2' printed on it in a simple, black font.

2



SCHETS
DER
MECHANISCHE WARMTETHEORIE.

ACADEMISCH PROEFSCHRIFT,

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

Doctor in de Wis- en Natuurkunde,

AAN DE HOOGESCHOOL TE LEIDEN,

OP GEZAG VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS

DR. L. W. E. RAUWENHOFF,

HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER GODGELEERDHEID,

OP ZATERDAG 4 MAART 1871, 'S NAMIDDAGS TE 3 UREN,

IN HET OPENBAAR TE VERDEDIGEN

DOOR

FLORIS VAN WAGENINGEN,

CIVIEL-INGENIEUR,

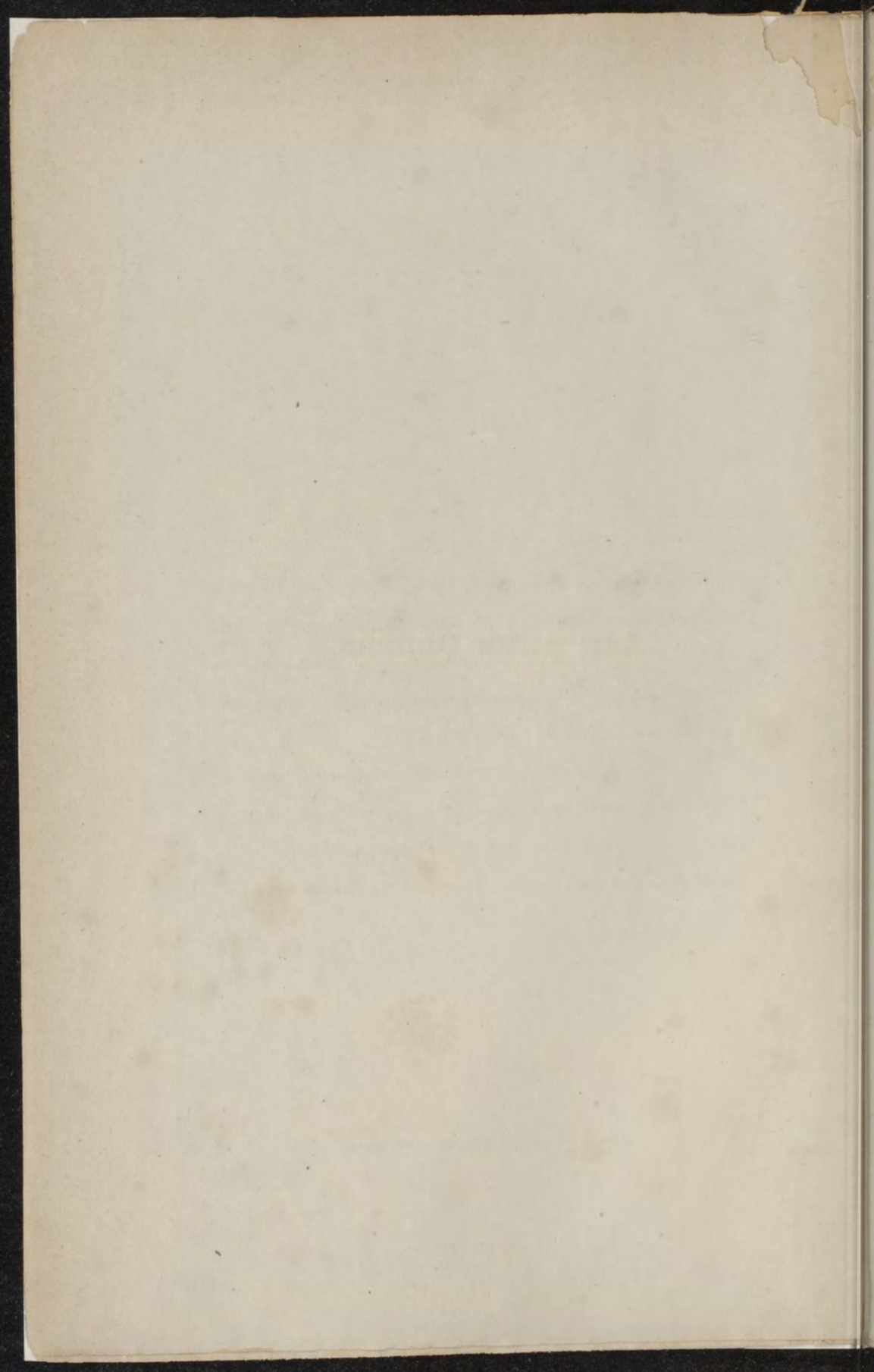
Geboren te Dordrecht.

'SGRAVENHAGE,
GEBR. BELINFANTE.

—
1871

'S GRAVENHAGE: BOEKDRUKKERIJ VAN GEBR. BELINFANTE.

AAN MIJNE OUDERS.



Het is mij aangenaam U Hoogleeraren der Wis- en Natuurkundige Faculteit en vooral U, hooggeachte Promotor, P. L. RIJKE, hier openlijk mijne erkentelijkheid te betuigen voor Uw onderwijs en de talrijke blijken van welwillendheid van U ondervonden.

Gij allen die mede tot mijne wetenschappelijke ontwikkeling hebt bijgedragen, en Gij, mijne vrienden, die mij den Academietijd onvergetelijk hebt gemaakt, weest verzekerd dat ik Uwer met dankbaarheid zal blijven gedenken.

1847
The first of these is the
fact that the number of
the population of the
country has increased
considerably since the
beginning of the century.
This is due to the fact
that the number of
the population of the
country has increased
considerably since the
beginning of the century.
This is due to the fact
that the number of
the population of the
country has increased
considerably since the
beginning of the century.

INHOUD.



HOOFDSTUK I.

	Bladz.
OVER DE HOOFDWETTEN DER MECHANISCHE WARMTETHEORIE.	1.

HOOFDSTUK II.

OVER DE GEVOLGEN DIE MEN UIT DE EERSTE HOOFDWET DER MECHANISCHE WARMTETHEORIE TREKKEN KAN.	8.
--	----

HOOFDSTUK III.

OVER DE GEVOLGEN DIE MEN UIT DE TWEDE HOOFDWET DER MECHANISCHE WARMTETHEORIE TREKKEN KAN.	27.
---	-----

HOOFDSTUK IV.

TOEPASSING DER GEVONDENE FORMULEN OP BEPAALDE GEVALLEN.	
<i>a.</i> De ideale gassen.	52.
<i>b.</i> De in de Natuur voorkomende gassen.	62.
<i>c.</i> Vloeistoffen.	88.
<i>d.</i> Lichamen die gedeeltelijk in één en gedeeltelijk in een anderen agregatie-toestand verkeeren.	93.
<i>e.</i> Uitstroeming van gassen of dampen door eene opening.	99.
<i>f.</i> De calorische werktuigen.	108.

THIRD

BOOK III

CHAPTER I

CHAPTER II

CHAPTER III

CHAPTER IV

HOOFDSTUK I.

Over de Hoofdwetten der Mechanische Warmtetheorie.

1. De Mechanische Warmtetheorie is gegrond op de twee volgende Hoofdwetten.

1°. Warmte en arbeid kunnen in elkan-
der worden omgezet.

2°. Het is niet mogelijk eene hoeveel-
heid warmte van een lichaam, dat eene
zekere temperatuur heeft, over te bren-
gen op een ander lichaam van hoogere
temperatuur, zonder tegelijk andere
blijvende veranderingen in het leven
te roepen.

2. **Toelichting.** — De eerste wet is geheel en al de
uitdrukking van de tegenwoordige inzichten omtrent
het wezen der warmte, in verband gebracht met be-
kende wetten der mechanica. De warmte van een
lichaam bestaat toch volgens deze inzichten uit eene
beweging der deeltjes (molekulen); bij vaste lichamen

vibreeren deze om vaste evenwichtspunten, bij vloeistoffen geschieden die vibratiën om punten die zich echter door de massa verplaatsen kunnen, en bij gassen neemt men eene rechtlijnige beweging der molekulen aan, welke alleen gewijzigd wordt door eene soort van botsing, wanneer de molekulen elkander, of de wanden van het vat waarin het gas besloten is, eventueel ontmoeten. Behalve deze bewegingen neemt men nog eene vibreerende beweging der atomen, waaruit de molekulen zijn samengesteld, ten opzichte van elkander aan.

Wanneer men een lichaam verwarmt, zet het zich uit (ingeval men dit ten minste niet belet door toeneemende drukking er op uit te oefenen); de molekulen nemen een anderen stand met betrekking tot elkander in; bij vaste lichamen zijn het de evenwichtspunten waarom de molekulen vibreeren, die van plaats veranderen; bij vloeistoffen en gassen veranderen de gemiddelde afstanden waarop de molekulen, die zich het dichtst bij elkaar bevinden, van elkander staan. Bovendien veranderen de snelheden waarmee de molekulen zich, hetzij om hunne evenwichtspunten, hetzij om elkaar, hetzij in hunne rechtlijnige banen bewegen. Daar de molekulen der lichamen krachten op elkander uitoefenen (molekulaire krachten genoemd), is er tot het veranderen der afstanden der molekulen eene zekere hoeveelheid arbeid noodig; evenzoo is er arbeid noodig om de snelheden der bewegingen der molekulen te vergrooten. Deze hoeveelheid arbeid moet noodzakelijk door andere lichamen geleverd worden. Wanneer dus een lichaam warmte aan een ander meedeelt, dan oefent het eigenlijk een zekeren arbeid uit die door het andere gedeeltelijk als arbeid (tot het veranderen der gemid-

delde afstanden der molekulen), gedeeltelijk in den vorm van levende kracht (tot het vergrooten der snelheden der bewegende molekulen) wordt opgenomen.

3. Het is mogelijk arbeid onmiddellijk in warmte om te zetten. Wat anders geschiedt er wanneer een lichaam door wrijving verwarmd wordt? Voor het overwinnen der wrijving wordt arbeid verbruikt, terwijl daarentegen warmte ontstaat.

Joule heeft door proefneming bepaald hoeveel arbeid verbruikt moet worden om eene gegevene hoeveelheid warmte voort te brengen, of, om de aangenomene uitdrukking te bezigen, hij heeft het mechanisch *aequivalent* der warmte bepaald. Hij bezigde daartoe een cilindervormig vat, waarin zich, regelmatig over den omtrek verdeeld, van insnijdingen voorzien tusschenschotten bevonden, welke zich van den buitenwand bijna tot het midden van het vat uitstrekten. In het midden bracht hij eene as aan, welke hij voorzag van vleugels, die zich even door de insnijdingen in de tusschenschotten konden heen bewegen. Het vat vulde hij in eene reeks van proeven met water, in eene andere reeks met kwik, en bracht de as met de vleugels door dalende gewichten in beweging. Ten gevolge van die beweging ontstond er wrijving tusschen de vloeistofdeeltjes onderling, en tusschen deze en de vaste en beweegbare deelen van den toestel; deze wrijving had eene verwarming van de vloeistof en den toestel ten gevolge. De hoeveelheid arbeid, die deze verwarming teweegbracht, werd gevonden door het product te nemen van de som der dalende gewichten en den weg dien zij aflegden. De voortgebrachte hoeveelheid warmte was het product van de temperatuurs-

verhooging en de warmtecapaciteit (of waterwaarde) van den toestel met de zich daarin bevindende vloeistof, welke capaciteit door de mengingsmethode bepaald was.

Aan die beide grootheden moesten natuurlijk de noodige correctiën worden aangebracht, welke Joule, door bijzondere inrichtingen van zijn toestel, tot een zoo klein mogelijk bedrag trachtte terug te brengen, ten einde de nauwkeurigheid van het eindresultaat zoo weinig mogelijk door onzekerheid in de correctiën te benadeelen. Voor verdere bijzonderheden verwijzen wij naar de oorspronkelijke verhandeling (*).

Eene nieuwe reeks van proeven nam Joule met twee gegoten ijzeren schijven, die hij in een kwikcalorimeter plaatste. Eene van deze schijven was onbewegelijk, de andere was aan eene as vastgemaakt, en werd door een hefboom tegen de vaste schijf aangedrukt. De as werd op eene dergelijke wijze als boven in beweging gebracht. De door de wrijving der schijven tegen elkan- der voortgebrachte warmte werd door den calorimeter aangegeven.

In al zijne proefnemingen vond hij voor de verhouding tusschen den verbruikten arbeid en de voortgebrachte warmte nagenoeg dezelfde waarde, terwijl de kleine verschillen der verschillende uitkomsten geheel en al uit de waarnemings-onzekerheden konden verklaard worden.

De hier volgende getallen geven de resultaten van de proefnemingen van Joule, wanneer men de gemiddelde uitkomsten van iedere reeks van proefnemingen neemt.

(*) Phil. Trans. of the R. S. of London 1850, p. 61.

De letter J beteekent het mechanisch aequivalent der warmte, n.l. den arbeid, uitgedrukt in kilogrammeters, die noodig is om het kilogram water van 0° tot 1° Celsius in temperatuur te doen stijgen.

STOF.	J.	AANTAL PROEVEN.
Water	423.92	40
Kwik	423.99	20
Kwik	425.38	30
IJzer	425.76	10
IJzer	424.60	10

4. Evenzoo als arbeid kan omgezet worden in warmte, kan men ook warmte omzetten in arbeid; de middelen, die daartoe gebezigd moeten worden, zijn echter van meer samengestelden aard. Men bereikt dit doel onder anderen door stoom-, calorische en thermo-electrische werktuigen.

Hirn heeft zich met het stoomwerktuig bezig gehouden om het mechanisch aequivalent der warmte te bepalen. Hij bepaalde 1° de hoeveelheid warmte die het water in den stoomketel opnam om van de temperatuur in den condensor te komen tot de temperatuur in den stoomketel, en vervolgens te veranderen in stoom bij diezelfde temperatuur; 2° de hoeveelheid warmte welke de afgewerkte stoom aan den condensor afstond; 3° den arbeid door den stoom in den cilinder verricht. De laatste grootheid, gedeeld door het verschil der twee eerste, levert het mechanisch aequivalent der warmte.

Door de nauwkeurige proeven van Regnault kon hij de hoeveelheid warmte, die noodig was om eene gegevene hoeveelheid water, dat de temperatuur van den condensor bezat, te veranderen in verzadigden waterdamp bij de temperatuur van den stoomketel, onmiddellijk berekenen. Voor de hoeveelheid warmte n.l., die een kilogram water van 0° tot t° Celsius verwarmt, en bij die temperatuur verdampt geeft Regnault de empirische formule

$$606.5 + 0.305t;$$

daarvan moet worden afgetrokken de hoeveelheid warmte, die noodig is om een kilogram water van 0° te verwarmen tot de temperatuur van den condensor, welke hoeveelheid door die temperatuur zelve wordt aangegeven, in de onderstelling dat de warmtecapaciteit van het water constant gelijk aan de eenheid is.

De hoeveelheid warmte welke de afgewerkte stoom aan den condensor afstond was ook gemakkelijk te berekenen; moeilijker was het echter om het warmteverlies door uitstraling en andere storende invloeden, met voldoende nauwkeurigheid te bepalen, welk verlies noodwendig als een correctieterm moest in rekening gebracht worden. Hirn moest zich dan ook met eene tamelijk ruwe schatting tevreden stellen.

De bij iederen zuigerslag voortgebrachte arbeid wordt uitgedrukt door de formule

$$\int_0^H (P - p) s dh,$$

waarin s de oppervlakte van den zuiger voorstelt, H den zuigerslag, P de veranderlijke spanning van den stoom die den zuiger voortdrijft, p de veranderlijke

spanning in de ruimte die met den condensor in gemeenschap staat. De spanningen P en p werden gemeten door middel van den indicator van Watt.

Negen verschillende proefnemingen leverden de volgende tamelijk uiteenlopende getallen:

310, 355, 408, 368, 453, 398, 606, 299, 387.

Het gemiddelde van die getallen is 398, hetwelk ongeveer $\frac{1}{6}$ verschilt van het getal 423.55, hetwelk Joule als de meest waarschijnlijke waarde van het mechanisch aequivalent der warmte voorstelt (*).

Met de calorische werktuigen zullen wij later kennis maken; het is ons voor het oogenblik genoeg de eerste hoofdwet der mechanische warmtetheorie te hebben toegelicht.

5. De tweede hoofdwet, welke het eerst door Clausius in dezen vorm is uitgesproken (**), grondt zich even als de eerste op de ervaring.

Bij warmtegeleiding gaat steeds warmte van een warmer lichaam op een kouder over, nooit omgekeerd; bij stralende warmte heeft men hetzelfde verschijnsel.

In den loop van dit geschrift zal blijken hoe men warmte van een kouder op een warmer lichaam kan overbrengen, en tevens zal men zien dat omzetting van arbeid in warmte eene van de daarmee gepaard gaande blijvende veranderingen zijn kan.

(*) Zie Phil. Trans. of the R. S. of London, t. a. p.

(**) Abhandlungen über die Mechanische Wärmetheorie, 1^o Abtheilung, Seite 134.

HOOFDSTUK II.

Over de gevolgen die men uit de eerste Hoofdwet der
Mechanische Warmtetheorie trekken kan.

6. De toestand, waarin een lichaam verkeert, wordt door twee gegevens volkomen bepaald, in de onderstelling namelijk dat of alle deelen van dat lichaam in denzelfden toestand verkeerden, d. i. dat het lichaam homogeen is, of het lichaam uit twee deelen in verschillenden agregatietoestand bestaat, terwijl die deelen met elkaar in aanraking zijn en ieder deel voor zich homogeen is.

Eene van die twee onderstellingen zal in het vervolg steeds worden aangenomen.

Eene gegevene hoeveelheid, b. v. een kilogram van eenig gas neemt een gegeven volumen in; zoo men dat gas onder zoodanige omstandigheden verwarmt, dat het volumen constant blijft, neemt de drukking, welke het uitoefent op de wanden van het vat waarin het besloten is, toe; bij afkoeling daarentegen neemt de drukking af, terwijl aan dezelfde temperatuur steeds

dezelfde spanning beantwoordt; dat wil zeggen: bij constant volumen is de spanning eene functie van de temperatuur. Laten wij die zelfde hoeveelheid gas een ander volumen innemen, dan is weer de spanning eene functie, doch eene andere, van de temperatuur; die functie zelve is dus weer afhankelijk van het volumen van het gas; of in andere woorden: volumen, spanning en temperatuur zijn van elkander zoodanig afhankelijk dat, wanneer twee van die grootheden gegeven zijn, de derde bepaald is; ieder van die grootheden is eene functie van de twee andere.

Voor vloeistoffen geldt dezelfde redeneering; voor vaste lichamen eveneens, zoo men de drukking op alle deelen van de oppervlakte dezelfde onderstelt.

Is eene gegevene hoeveelheid eener stof gedeeltelijk in een, gedeeltelijk in een anderen agregatietoestand, zoo leert de ervaring dat dan drukking en temperatuur alleen van elkander afhankelijk zijn; tot het bepalen van den toestand van dat lichaam kan men dan niet de drukking en de temperatuur bezigen, doch hoogstens ééne van deze twee grootheden met minstens ééne andere, die niet van drukking of temperatuur alleen afhankelijk is. Is b. v. van eene gegevene hoeveelheid water, dat gedeeltelijk in vloeibaren, gedeeltelijk in dampvormigen toestand verkeert, de temperatuur en het volumen gegeven, zoo zijn door deze twee gegevens de spanning en de hoeveelheden, die in vloeibaren en dampvormigen toestand verkeeren, bepaald.

7. Behalve de genoemde grootheden is er nog eene andere, die in de Mechanische Warmtetheorie eene groote rol speelt, en met welke wij nu zullen kennis maken.

Verwarmt men een lichaam onder zoodanige omstandigheden, dat het volumen onveranderd blijft, zoo zal de door het lichaam opgenomene warmte dienen om de snelheid der bewegingen der molekulen te vergrooten, mogelijk wordt een gedeelte dier warmte verbruikt om molekulaire krachten te overwinnen, of, zooals men het noemt, om inwendigen arbeid te verrichten; het lichaam heeft dus eene zekere hoeveelheid arbeid of levende kracht in zich opgenomen, welke het aequivalent is van de daarvoor verbruikte warmte.

Drukt men het lichaam te zamen, zonder het toe te staan warmte op te nemen of af te geven, zoo oefent men een zekeren arbeid op dat lichaam uit, welke eveneens dient om de levende kracht van de bewegingen der molekulen en atomen te vergrooten, en om molekulaire krachten te overwinnen; het lichaam neemt eene hoeveelheid arbeid in zich op, welke noodwendig gelijk is aan den arbeid dien men bij de samendrukking verricht.

Deelt men nu eene zekere hoeveelheid warmte aan het lichaam mede, terwijl men tevens het lichaam samendrukt, dan neemt het eene hoeveelheid arbeid op gelijk aan de som van het mechanisch aequivalent van de meêgedeelde warmte, en den bij de samendrukking verrichten arbeid. Evenzoo kan het lichaam eene zekere hoeveelheid arbeidsvermogen aan zijne omgeving afstaan, hetzij alleen in den vorm van warmte, hetzij alleen in den vorm van arbeid, hetzij in beide vormen tegelijk. In het lichaam is dus eene zekere hoeveelheid arbeidsvermogen voorhanden, die voor vermeerdering en vermindering vatbaar is; wij zullen deze hoeveelheid met den naam van **Energie**,

het eerst door Thomson daaraan gegeven, aanduiden. De energie van een lichaam is natuurlijk bepaald door den toestand waarin het lichaam zich bevindt; deze laatste is door twee gegevens bepaald; de energie is dus ook eene functie van diezelfde twee gegevens (*).

8. Wij kunnen nu eene vergelijking neerschrijven, welke de hier gegevene beschouwing weergeeft, namelijk in woorden deze: De toename van de energie van een lichaam is gelijk aan de som van het mechanisch equivalent van de opgenomene warmte en den arbeid, die van buiten af op het lichaam is uitgeoefend.

De hoeveelheid warmte die het lichaam opneemt stellen we voor door Q , en door dQ een oneindig klein deel daarvan; de energie van het lichaam noemen we U , en dU eene oneindig kleine toename daarvan; is verder p de uitwendige drukking, namelijk de drukking die op iedere eenheid der oppervlakte wordt uitgeoefend, en v het volumen, zoo is $p dv$ de arbeid dien het lichaam naar buiten uitoefent bij eene vermeerdering dv van zijn volumen, $-p dv$ is dus de arbeid die door de uitwendige drukking op het lichaam wordt uitgeoefend, en onze in woorden reeds uitgesproken vergelijking luidt:

$$dU = JdQ - p dv, \dots \dots \dots (I)$$

waarin J het mechanisch equivalent der warmte beteekent. Deze vergelijking is de uitdrukking van de eerste der twee vooropgestelde hoofdwetten.

(*) Wij zien hier af van de levende kracht, welke het lichaam in den vorm van beweging (in den gewonen zin van het woord) kan bezitten.

9. Onderstellen wij thans dat de toestand van het lichaam bepaald is door twee grootheden x en y , zoodat volumen, uitwendige drukking, temperatuur en energie van dit lichaam functiën zijn van die twee grootheden dan is

$$dU = \frac{dU}{dx} dx + \frac{dU}{dy} dy$$

en
$$dv = \frac{dv}{dx} dx + \frac{dv}{dy} dy,$$

waarin de voorkomende differentiaalquotienten partiëele differentiaalquotienten zijn. Voor dQ schrijven we

$$dQ = Mdx + Ndy, \quad \dots \quad (1)$$

waarin M en N grootheden zijn die op eene of andere wijze door proefneming moeten bepaald worden. Mdx is namelijk de hoeveelheid warmte, die aan het lichaam moet worden meegedeeld, om de grootheid x met dx te doen toenemen, terwijl y constant blijft; evenzoo voor Ndy . Door deze substitutie gaat (1) over in

$$\frac{dU}{dx} dx + \frac{dU}{dy} dy = J(Mdx + Ndy) - p\left(\frac{dv}{dx} dx + \frac{dv}{dy} dy\right).$$

Deze vergelijking vervalst in de twee volgende

$$\left. \begin{aligned} \frac{dU}{dx} &= JM - p\frac{dv}{dx}, \\ \text{en} \quad \frac{dU}{dy} &= JN - p\frac{dv}{dy}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

Differentiëert men de eerste van deze naar y en de tweede naar x , zoo vindt men

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy}\left(\frac{dU}{dx}\right) &= J\frac{dM}{dy} - \frac{dp}{dy}\frac{dv}{dx} - p\frac{d}{dy}\left(\frac{dv}{dx}\right), \\ \frac{d}{dx}\left(\frac{dU}{dy}\right) &= J\frac{dN}{dx} - \frac{dp}{dx}\frac{dv}{dy} - p\frac{d}{dx}\left(\frac{dv}{dy}\right). \end{aligned}$$

Neemt men nu in aanmerking dat U en v functiën zijn van x en y , die telkens dezelfde waarden aannemen, zoodra x en y tot dezelfde waarden terugkeeren, zoo is

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{dU}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dU}{dy}\right) \text{ en } \frac{d}{dy}\left(\frac{dv}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dv}{dy}\right),$$

en door aftrekking van de twee vergelijkingen vindt men dan

$$J\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right) = \frac{dp}{dy} \frac{dv}{dx} - \frac{dp}{dx} \frac{dv}{dy} \dots \quad (Ia)$$

10. Over deze vergelijking, welke eene betrekking tusschen de waarnemingsgrootheden M en N bevat, eene enkele opmerking.

Uit vergelijking (1) blijkt

$$\frac{dQ}{dx} = M \text{ en } \frac{dQ}{dy} = N,$$

waardoor (Ia) overgaat in

$$J\left\{\frac{d}{dy}\left(\frac{dQ}{dx}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{dQ}{dy}\right)\right\} = \frac{dp}{dy} \frac{dv}{dx} - \frac{dp}{dx} \frac{dv}{dy}.$$

Is nu het laatste lid van deze vergelijking niet identisch nul, zoo toont deze vergelijking aan dat Q geen functie is van x en y , dat wil zeggen:

De hoeveelheid warmte die men aan een lichaam moet meedeelen, wanneer het van een gegeven aanvangstoestand tot een gegeven eindtoestand overgaat, is niet eene functie van de aanvangs- en eind-toestanden alleen, maar hangt bovendien nog af van de reeks van tusschen-toestanden waarin het lichaam achtereenvolgens verkeert.

Dat het tweede lid niet identisch nul is, blijkt onmiddellijk wanneer men voor de willekeurige veranderlijken

x en y respectievelijk v en p invoert. Als dan is

$$\frac{dp}{dy} = \frac{dp}{dp} = 1, \quad \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dv} = 1,$$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dv} = 0 \quad \text{en} \quad \frac{dv}{dy} = \frac{dv}{dp} = 0. \quad (*)$$

Door substitutie van deze waarden wordt het tweede lid van de bovenstaande vergelijking gelijk aan de eenheid, dat is niet gelijk nul.

11. Dat het lichaam, van een gegeven aanvangs- tot een gegeven eindtoestand verschillende reeksen van tusschentoestanden doorloopen kan, volgt daaruit dat die toestand eene functie is van twee onafhankelijk veranderlijke grootheden x en y . Stel het lichaam is aanvankelijk in den toestand, welke bepaald wordt door $x = x_0$ en $y = y_0$ te nemen, en komt in den toestand welke door $x = x_1$ en $y = y_1$ bepaald wordt, zoo kan men de reeks van tusschentoestanden, welke het lichaam doorloopt, bepalen door eene geheel willekeurige betrekking tusschen x en y te stellen, b. v. $f(x, y) = 0$; mits deze functie voldoet aan de twee voorwaarden $f(x_0, y_0) = 0$ en $f(x_1, y_1) = 0$. Eene graphische voorstelling daarvan verkrijgt men door de vergelijking $f(x, y) = 0$ te beschouwen als die eener kromme waarvan x en y de loopende coördinaten zijn; dan is het duidelijk dat iedere willekeurige kromme, die de punten (x_0, y_0) en (x_1, y_1) verbindt, eene reeks van toestanden voorstelt welke het lichaam doorloopen

(*) Het partiëele differentiaal quotient $\frac{dp}{dv}$ is nul, omdat het voorstelt de verhouding tusschen de variatiën van p en v terwijl p constant blijft, d. i. terwijl de variatie van p nul is; evenzoo is $\frac{dv}{dp}$ nul.

kan om van den aanvangs- tot den eindtoestand te geraken. In overeenstemming met deze aanschouwelijke voorstelling noemt men dan ook de reeks van tusschentoestanden korthedshalve de weg, welken het lichaam doorloopt.

12. Zijn de grootheden M en N eenmaal uit waarnemingsdata afgeleid, zoo kunnen de vergelijkingen (2) dienen om het verschil van de waarden, welke de energie van het lichaam in twee willekeurige toestanden heeft, te bepalen. Is namelijk de aanvangstoestand bepaald door $x = x_0$ en $y = y_0$, zoo heeft men

$$U - U_0 = \int_{x_0}^x \frac{dU}{dx} dx + Y - Y_0,$$

waarin de integratie geschiedt als of y constant ware, U_0 de energie voorstelt in den aanvangstoestand, Y eene functie van y alleen, en Y_0 de waarde dier functie voor $y = y_0$ zijn. Om Y te bepalen differentiëren wij deze vergelijking partiëel naar y , waardoor wij verkrijgen

$$\frac{dU}{dy} = \int_{x_0}^x \frac{d^2U}{dx dy} dx + \frac{dY}{dy} = \frac{dU}{dy} - \left(\frac{dU}{dy}\right)_{x_0} + \frac{dY}{dy}.$$

De onderaan geschreven index x_0 beteekent dat in de grootheid $\frac{dU}{dy}$ x vervangen wordt door x_0 . Men vindt verder

$$\frac{dY}{dy} = \left(\frac{dU}{dy}\right)_{x_0}, \quad Y - Y_0 = \int_{y_0}^y \left(\frac{dU}{dy}\right)_{x_0} dy,$$

en dus

$$U - U_0 = \int_{x_0}^x \frac{dU}{dx} dx + \int_{y_0}^y \left(\frac{dU}{dy}\right)_{x_0} dy;$$

en hierin de waarden (2) substitueerende:

$$\left. \begin{aligned}
 U - U_0 &= \int_{x_0}^x \left(JM - p \frac{dv}{dx} \right) dx + \int_{y_0}^y \left(JN - p \frac{dv}{dy} \right) dy, \\
 \text{of ook} \\
 U - U_0 &= \int_{x_0}^x \left(JM - p \frac{dx}{dx} \right) dx + \int_{y_0}^y \left(JN - p \frac{dy}{dy} \right) dy.
 \end{aligned} \right\} (3)$$

13. Gaan wij er thans toe over om M en N in meer bekende grootheden uit te drukken, namelijk in functie van de specifieke warmte bij constante drukking, en de specifieke warmte bij constant volumen. Stellen wij de specifieke warmte bij constante drukking van het gegeven lichaam, waarvan wij in het vervolg de gewichtseenheid (een kilogram) zullen beschouwen, door C voor, dan is Cdt de hoeveelheid warmte die men aan dat lichaam moet meedeelen om, terwijl de drukking constant blijft, de temperatuur met dt te doen toenemen, dit is uitgedrukt door de formule

$$dQ = kdp + Cdt$$

waarin k eene functie is, waarmee wij ons niet te bemoeien hebben. Deze vergelijking neemt dezen vorm aan

$$dQ = \left(k \frac{dp}{dx} + C \frac{dt}{dx} \right) dx + \left(k \frac{dp}{dy} + C \frac{dt}{dy} \right) dy;$$

deze met (1) vergelijkende, heeft men terstond

$$M = k \frac{dp}{dx} + C \frac{dt}{dx} \quad \text{en} \quad N = k \frac{dp}{dy} + C \frac{dt}{dy};$$

waaruit door eliminatie van k

$$M \frac{dp}{dy} - N \frac{dp}{dx} = C \left(\frac{dp}{dy} \frac{dt}{dx} - \frac{dp}{dx} \frac{dt}{dy} \right).$$

Stellen wij de specifieke warmte bij constant volumen door c voor, dan is $c dt$ de hoeveelheid warmte, die men aan het lichaam moet meedeelen om, terwijl

het volumen constant blijft, de temperatuur dt te doen toenemen; dit is uitgedrukt door de formule

$$dQ = l dv + c dt,$$

waaruit men door eene geheel overeenkomstige behandeling vindt

$$M \frac{dv}{dy} - N \frac{dv}{dx} = c \left(\frac{dv}{dy} \frac{dt}{dx} - \frac{dv}{dx} \frac{dt}{dy} \right).$$

Lost men eindelijk M en N uit de twee verkregene vergelijkingen op, zoo vindt men

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{C \frac{dv}{dx} \left(\frac{dp}{dy} \frac{dt}{dx} - \frac{dp}{dx} \frac{dt}{dy} \right) - c \frac{dp}{dx} \left(\frac{dv}{dy} \frac{dt}{dx} - \frac{dv}{dx} \frac{dt}{dy} \right)}{\frac{dp}{dy} \frac{dv}{dx} - \frac{dp}{dx} \frac{dv}{dy}} \\ N &= \frac{C \frac{dv}{dy} \left(\frac{dp}{dy} \frac{dt}{dx} - \frac{dp}{dx} \frac{dt}{dy} \right) - c \frac{dp}{dy} \left(\frac{dv}{dy} \frac{dt}{dx} - \frac{dv}{dx} \frac{dt}{dy} \right)}{\frac{dp}{dy} \frac{dv}{dx} - \frac{dp}{dx} \frac{dv}{dy}} \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

14. De tot hiertoe ontwikkelde formules nemen eenvoudiger gedaanten aan, zoo men in plaats van de veranderlijken x en y , twee der drie grootheden v , p en t stelt; door achtereenvolgens v en p , v en t , p en t als onafhankelijk veranderlijken aan te nemen, komen we tot drie stel formules, die wij hier wegens het gebruik, dat wij er later van maken moeten, achtereenvolgens zullen neerschrijven.

Alvorens echter hiertoe over te gaan, maken we eene enkele opmerking over partiëele differentiaalquotienten.

Wij hebben hier te doen met drie grootheden v , p en t , tusschen welke eene betrekking bestaat, zoodanig dat, wanneer twee van de drie grootheden gegeven zijn, de derde daardoor bepaald is. Die

betrekking zij uitgedrukt door de vergelijking

$$\varphi(v, p, t) = 0,$$

waaruit we de zes volgende partiële differentiaalquotienten kunnen afleiden, welke wij, om in het vervolg aan hun oorsprong te herinneren, met een bijzonder karakter voor het differentiaalteecken zullen noteeren:

$$\frac{\partial v}{\partial p}, \frac{\partial p}{\partial v}, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial t}{\partial v}, \frac{\partial p}{\partial t} \text{ en } \frac{\partial t}{\partial p}.$$

Ieder van deze differentiaalquotienten is gevormd in de onderstelling dat de grootheid, welke er niet in voorkomt, constant is. Differentieert men in de onderstelling dat t constant is, dan vindt men

$$\frac{\partial v}{\partial p} = - \frac{d\varphi}{dp} : \frac{d\varphi}{dv} \text{ en } \frac{\partial p}{\partial v} = - \frac{d\varphi}{dv} : \frac{d\varphi}{dp},$$

waaruit onmiddellijk volgt

$$\begin{array}{l} \text{evenzoo} \\ \text{en} \end{array} \left. \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial v} = 1, \\ \frac{\partial v}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial v} = 1, \\ \frac{\partial p}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial p} = 1. \end{array} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

Door vermenigvuldiging der drie vergelijkingen

$$\frac{\partial v}{\partial p} = - \frac{d\varphi}{dp} : \frac{d\varphi}{dv},$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = - \frac{d\varphi}{dt} : \frac{d\varphi}{dp},$$

$$\text{en} \quad \frac{\partial t}{\partial v} = - \frac{d\varphi}{dv} : \frac{d\varphi}{dt}$$

vindt men verder

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial v} &= -1, \\ \text{evenzoo} \quad \frac{\partial p}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial p} &= -1. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

15. Stellen wij thans

$$1^{\circ} \quad . \quad . \quad x = v \quad \text{en} \quad y = p,$$

zoo vinden wij uit (4)

$$M = C \frac{\partial t}{\partial v} \quad \text{en} \quad N = c \frac{\partial t}{\partial p}, \quad \dots \dots (7)$$

waardoor (1) overgaat in

$$dQ = C \frac{\partial t}{\partial v} dv + c \frac{\partial t}{\partial p} dp. \quad \dots \dots (8)$$

Vergelijking (1a) verandert in

$$J \left(\frac{dM}{dp} - \frac{dN}{dv} \right) = 1 \quad \dots \dots (9)$$

of, na substitutie van M en N, en verdere ontwikkeling

$$\frac{dC}{dp} \frac{\partial t}{\partial v} - \frac{dc}{dv} \frac{\partial t}{\partial p} = \frac{1}{J} - (C - c) \frac{\partial^2 t}{\partial v \partial p} \dots (10)$$

In de partiëele differentiaalquotienten $\frac{dC}{dp}$ en $\frac{dc}{dv}$ moeten C en c in functie van p en v worden uitgedrukt.

De vergelijkingen (2) worden nu

$$\frac{dU}{dv} = JC \frac{\partial t}{\partial v} - p \quad \text{en} \quad \frac{dU}{dp} = Jc \frac{\partial t}{\partial p}; \quad \dots (11)$$

en eindelijk de vergelijkingen (3)

$$\left. \begin{aligned} U - U_0 &= \int_{v_0}^v \left(JC \frac{\partial t}{\partial v} - p \right) dv + \int_p^p \left(Jc \frac{\partial t}{\partial p} \right)_{v_0} dp \\ U - U_0 &= \int_{v_0}^v \left(JC \frac{\partial t}{\partial v} - p \right)_{p_0} dv + \int_{p_0}^p Jc \frac{\partial t}{\partial p} dp. \end{aligned} \right\} (12)$$

16. Wij stellen

$$2^o \quad . \quad x = v \text{ en } y = t,$$

waardoor wij achtereenvolgens verkrijgen

$$\left. \begin{aligned} M &= -(C-c) \frac{\partial p}{\partial v} : \frac{\partial p}{\partial t} = (C-c) \frac{\partial t}{\partial v}, \\ N &= c \frac{\partial p}{\partial t} : \frac{\partial p}{\partial t} = c, \end{aligned} \right\} \dots (13)$$

$$dQ = (C-c) \frac{\partial t}{\partial v} dv + c dt, \dots (14)$$

$$J \left(\frac{dM}{dt} - \frac{dN}{dv} \right) = \frac{\partial p}{\partial t} \dots (15)$$

De substitutie van de gevondene uitdrukkingen voor M en N, en verdere ontwikkeling leidt tot eene formule, die, hoewel in anderen vorm voorkomende, identisch is met de in het eerste geval verkregene vergelijking. (10)

Verder is nog

$$\frac{dU}{dv} = J (C-c) \frac{\partial t}{\partial v} - p \text{ en } \frac{dU}{dt} = Jc, \dots (16)$$

$$\left. \begin{aligned} U - U_0 &= \int_{v_0}^v \left\{ J (C-c) \frac{\partial t}{\partial v} - p \right\} dv + \int_{t_0}^t Jc_{v_0} dt \\ U - U_0 &= \int_{v_0}^v \left\{ J (C-c) \frac{\partial t}{\partial v} - p \right\} dv + \int_{t_0}^t Jc dt. \end{aligned} \right\} (17)$$

17. Wij stellen

$$3^o \quad . \quad x = p \text{ en } y = t,$$

waardoor wij achtereenvolgens verkrijgen

$$\left. \begin{aligned} M &= (C-c) \frac{\partial v}{\partial p} : \frac{\partial v}{\partial t} = -(C-c) \frac{\partial t}{\partial p}, \\ N &= C, \end{aligned} \right\} \dots (18)$$

$$dQ = -(C-c) \frac{\partial t}{\partial p} dp + C dt. \dots (19)$$

$$J \left(\frac{dM}{dt} - \frac{dN}{dp} \right) = - \frac{\partial v}{\partial t} \dots (20)$$

$$\frac{dU}{dp} = - \left\{ J (C-c) \frac{\partial t}{\partial p} + p \frac{\partial v}{\partial p} \right\} \text{ en } \frac{dU}{dt} = JC - p \frac{\partial v}{\partial t}. \quad (21)$$

$$\begin{aligned} U - U_0 &= - \int_{p_0}^p \left\{ J (C-c) \frac{\partial t}{\partial p} + p \frac{\partial v}{\partial p} \right\} dp + \int_{t_0}^t \left(JC - p \frac{\partial v}{\partial t} \right) p_0 dt \\ U - U_0 &= - \int_{p_0}^p \left\{ J (C-c) \frac{\partial t}{\partial p} + p \frac{\partial v}{\partial p} \right\}_{t_0} dp + \int_{t_0}^t \left(JC - p \frac{\partial v}{\partial t} \right) dt. \end{aligned} \quad (22)$$

18. Thans blijft ons nog een geval ter behandeling over, dat voor de kennis van het stoomwerktuig van het hoogste belang is, namelijk dat het lichaam, welks toestandsveranderingen wij beschouwen, bestaat uit twee deelen in verschillenden agregatie-toestand, doch steeds met elkander in aanraking. Bij het afleiden der formules willen we onderstellen dat we met den vloeibaren en dampvormigen toestand te doen hebben; de voor dit geval ontwikkelde formules zijn door bloote verandering van beteekenis der daarin voorkomende letters evenzeer van toepassing op het geval, waarin het lichaam gedeeltelijk in vasten, gedeeltelijk in vloeibaren toestand verkeert.

Vroeger is reeds opgemerkt dat men de grootheden p en t in ons tegenwoordig geval niet gezamenlijk als onafhankelijk veranderlijken kan aannemen, daar zij onmiddellijk van elkaar en niet van andere grootheden afhangen. De betrekking van afhankelijkheid tusschen deze twee grootheden moet door proefneming bepaald worden, en wordt, als bekend vooropgesteld. Wij zullen voor dit geval als onafhankelijk veranderlijken aannemen: de temperatuur, en het gedeelte der vloeistof dat in dampvormigen toestand verkeert. Wij onderstellen verder dat wij de gewichtseenheid van de vloeistof te beschouwen hebben, dat x het dampvormige en $1-x$ het overige vloeibare ge-

deelte voorstelt. Het volumen van de gewichtseenheid in dampvormigen toestand zij s , dat van de gewichtseenheid in vloeibaren toestand zij s' ; zoo is het volumen van het dampvormige gedeelte

$$x s,$$

dat van het vloeibare gedeelte

$$(1-x) s',$$

en dus het gezamenlijk volumen

$$v = x s + (1-x) s' = s' + x(s-s') = s' + x u, \dots (23)$$

wanneer wij kortheidshalve $s-s' = u$ stellen.

Bedenkt men dat s en s' , en derhalve ook u , even als p slechts van de temperatuur alleen kunnen afhangen, zoo vindt men door differentiatie uit de laatste vergelijking

$$\frac{dv}{dx} = u \quad \text{en} \quad \frac{dv}{dt} = \frac{ds'}{dt} + x \frac{du}{dt} \dots (24)$$

De hoeveelheid warmte die moet worden medegedeeld om het geheel dt in temperatuur te doen stijgen, en tevens het dampvormige gedeelte met dx te doen toenemen, stellen wij in overeenstemming met de vroeger aangenomen notatie

$$dQ = M dx + N dt \dots (25)$$

Deze hoeveelheid bestaat uit drie deelen:

1° de hoeveelheid warmte $c(1-x) dt$, welke dient om het vloeibare gedeelte dt in temperatuur te doen stijgen; c is hierin noch specifieke warmte bij constante drukking, noch bij constant volumen, daar bij de verwarming noch de drukking noch het volumen constant blijven, doch met de temperatuur veranderen.

2° de hoeveelheid warmte $hx dt$, welke dient om

het dampvormige gedeelte dt in temperatuur te doen stijgen. Men merke ten aanzien van h hetzelfde op wat reeds voor c' opgemerkt is. Men heeft voorgesteld deze grootheid den naam specifieke warmte van den verzadigden damp te geven. Voor c' kan men een dergelijken naam uitdenken.

3^o de hoeveelheid warmte λdx , dienende om de hoeveelheid vloeistof dx in dampvorm te doen overgaan; λ is de grootheid die in de natuurkunde onder den naam van latente- of verdampingswarmte bekend is.

Neemt men deze drie termen te zamen, zoo verkrijgt men

$$dQ = \lambda dx + \{c'(1-x) + hx\} dt. \quad \dots \quad (26)$$

Deze laatste vergelijking met de voorgaande vergelijkende heeft men

$$M = \lambda \text{ en } N = c'(1-x) + hx \quad \dots \quad (27)$$

Substitueert men deze waarden in de algemeene formules, waarin men nog y door t vervangt, zoo verkrijgt men achtereenvolgens:

uit (Ia)

$$J \left(\frac{d\lambda}{dt} - h + c' \right) = u \frac{dp}{dt} \quad \dots \quad (28)$$

Bij het afleiden van deze formule heeft men in het oog moeten houden dat c' , h en p slechts functiën van de temperatuur zijn.

Verder wordt (2)

$$\frac{dU}{dx} = J\lambda - pu; \quad \frac{dU}{dt} = J\{c'(1-x) + hx\} - p \left(\frac{ds'}{dt} + x \frac{du}{dt} \right). \quad (29)$$

De tweede van deze vergelijkingen kunnen wij

onder een anderen vorm brengen door middel van vergelijking (28).

Wij schrijven namelijk eerst

$$\frac{dU}{dt} = Jc' - Jx(c' - h) - px \frac{du}{dt} - p \frac{ds'}{dt}$$

en substituëeren dan voor $J(c' - h)$ de waarde die men daarvoor uit (28) vindt; men verkrijgt dan

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= Jc' - xu \frac{dp}{dt} + Jx \frac{d\lambda}{dt} - xp \frac{du}{dt} - p \frac{ds'}{dt} \\ &= Jc' + Jx \frac{d\lambda}{dt} - x \frac{d(up)}{dt} - p \frac{ds'}{dt} \\ &= Jc' + x \frac{d(J\lambda - up)}{dt} - p \frac{ds'}{dt}. \end{aligned}$$

Hierdoor verkrijgt men

$$\begin{aligned} U - U_0 &= \int_{x_0}^x (J\lambda - pu) dx + \int_{t_0}^t \left[Jc' + x \frac{d(J\lambda - up)}{dt} - p \frac{ds'}{dt} \right] dt \\ &= (J\lambda - pu)(x - x_0) + \int_{t_0}^t Jc' dt + x_0 (J\lambda - up) \\ &\quad - x_0 (J\lambda_0 - u_0 p_0) - \int_{t_0}^t p \frac{ds'}{dt} dt \\ &= J(\lambda x - \lambda_0 x_0) - (pux - p_0 u_0 x_0) + \int_{t_0}^t \left(Jc' - p \frac{ds'}{dt} \right) dt. \quad (30) \end{aligned}$$

waarin λ_0 , u_0 en p_0 de waarden van λ , u en p voor $t = t_0$ voorstellen.

19. Onder de verschillende wegen, welke een lichaam doorloopen kan (om onze uitdrukking van § 11 te bezigen), om van een toestand tot een anderen te geraken, komen er voor van bijzonderen aard, met welke wij nu zullen kennis maken. Wij kunnen ons b. v. denken dat de toestand van het lichaam zich zoodanig verandert dat eene der grootheden v , p , t , U ,

constant blijft, of zoodanig dat het lichaam warmte opneemt noch afgeeft. De graphische voorstelling van die vijf soorten van verandering vindt men in de vijf vergelijkingen

$$v = \text{constant},$$

$$p = \text{constant},$$

$$t = \text{constant},$$

$$U = \text{constant},$$

en $dQ = Mdx + Ndy = 0$,

waarin men zich v, p, t, U, M en N als functien van x en y moet voorstellen. De laatste vergelijking is niet onmiddellijk integreerbaar, daar, zooals wij weten $\frac{dM}{dy} > \frac{dN}{dx}$ is. Later zal zich een integreerende factor voor die vergelijking als van zelf voordoen. Door aan de constanten verschillende waarden toe te kennen, verkrijgen wij vijf stel lijnen. Lijnen van een zelfde stel kunnen elkaar niet snijden; dit is voor de vier eerste groepen van zelf duidelijk, daar anders het lichaam voor een zelfden toestand twee verschillende volumina, drukkingen, temperaturen of waarden voor de energie zou vertoonen. Voor de lijnen van de laatste soort zullen wij het ook als een gevolg van de tweede hoofdwet aantoonen. Door ieder punt (x, y) gaat eene lijn van ieder stel. Aan de drie laatste stellen van lijnen heeft men bijzondere namen toegekend.

De lijnen begrepen in het stel

$$t = \text{constant}$$

dragen den naam van isothermen,
die van het stel

$$U = \text{constant}$$

heeten isodynamen, en die van het stel

$$M dx + N dy = 0,$$

waarin de willekeurige constante eerst na de integratie voorkomt, heeten adiabatische of afsluitingslijnen.

De graphische voorstelling van de toestandsveranderingen van een lichaam is het eerst gebezigd door Sardi Carnot in zijn «*Réflexions sur la puissance motrice du feu.*» Hij nam echter uitsluitend volumen en druk als coördinaten aan. Hierbij stelde de inhoud van de vlakke figuur begrepen tusschen eene kromme, de ordinaten van hare uiteinden en de abscissen-as, n. l. $\int_{v_0}^v p dv$, den arbeid voor welken het lichaam verrichtte wanneer het zich langs den weg, door de kromme voorgesteld, van het volumen v_0 tot het volumen v uitzette.

HOOFDSTUK III.

Over de gevolgen, die men uit de tweede Hoofdwet
der Mechanische Warmtetheorie trekken kan.

20. Alvorens over te gaan tot het afleiden van gevolgen uit de tweede Hoofdwet, maken wij vooraf eene enkele opmerking over de toestandsveranderingen, die men in de mechanische warmtetheorie omkeerbare en niet-omkeerbare genoemd heeft.

Zoo een lichaam A aan een lichaam B warmte meedeelt, moet A noodwendig van hoogere temperatuur zijn dan B; zijn die lichamen met elkaar in aanraking, zoodat zij elkaar warmte door geleiding afstaan, of wel stralen zij elkaar hunne warmte toe, zoo kan de warmte-uitwisseling slechts zoolang plaats vinden als hunne temperaturen nog verschillen. Die warmte-uitwisseling, hetzij door geleiding, hetzij door straling tot stand komende, is eene onomkeerbare toestandsverandering, omdat het onmogelijk is dat dezelfde toestandsverandering in omgekeerden zin plaats vindt, d. i. dat het koudere lichaam, door ge-

leiding of straling warmte aan het warmere afstaat. Daar er echter, hoe klein het temperatuursverschil ook is, steeds eene warmtewisseling bestaat, neemt men aan dat ook nog warmtewisseling bestaan kan in het grensgeval waarin de temperaturen gelijk zijn, en dat in dit geval naar willekeur warmte door A aan B of door B aan A kan worden meegedeeld. In de natuur, d. i. in werkelijkheid is dit geval onmogelijk; in theorie, waar men de wiskunde op de natuurverschijnselen toepast, hebben juist dergelijke grensgevallen de grootste waarde, omdat men door de beschouwing van deze tot uitkomsten geraakt, tot welke men, zoo men ze al niet bereiken kan, dan toch onbepaald kan naderen. Het hier beschouwde grensgeval is eene omkeerbare toestandsverandering, omdat deze in beide zinnen evenzeer denkbaar is. Hier is dus de omkeerbare toestandsverandering de grens waartoe de niet-omkeerbare onbepaald naderen kan.

Wanneer een lichaam A met een lichaam B in aanraking is en daarop eene drukking uitoefent, zoo zal, wanneer de drukking van A op B grooter is dan de tegenstand, welken B zonder te wijken bieden kan, het lichaam B wijken, d. i. A zal een zekeren arbeid op B uitoefenen; men heeft hier weer te doen met eene onomkeerbare toestandsverandering, omdat deze in omgekeerden zin niet kan plaats vinden. Als grensgeval van die onomkeerbare komt weer de omkeerbare toestandsverandering, n. l. die waarbij ieder lichaam zonder wijken een tegenstand kan bieden, gelijk aan de drukking door het andere daarop uitgeoefend, en waarbij het evenzeer

mogelijk geacht wordt, dat B voor A, als dat A voor B wijkt. Ook hier is de omkeerbare toestandsverandering het grensgeval waartoe de niet-omkeerbare onbepaald naderen kan.

Wij zullen ons vooreerst slechts met omkeerbare toestandsveranderingen bezig houden.

21. In fig. 1 stellen de lijnen A_0B_0 en AB twee isothermen, en de lijnen AA_0 en BB_0 twee adiabatische lijnen voor. Omtrent de adiabatische lijnen

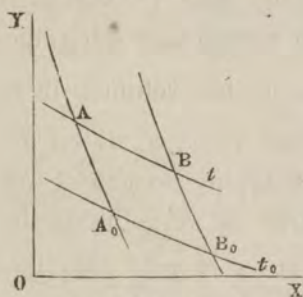


Fig. 1.

wordt ondersteld dat zij tusschen de twee isothermen elkaar niet snijden, anders neme men twee isothermen waartusschen geen snijpunt der twee adiabatische lijnen ligt.

Gesteld dat een lichaam, b. v. een kilogram van eenig gas, den omtrek der vier-

hoekige figuur doorloopt welke door deze vier lijnen wordt ingesloten; het begint bijv. bij A en gaat naar B; bij deze toestandsverandering blijft de temperatuur constant = t , terwijl volumen en druk veranderen; de arbeid, welken het lichaam naar buiten uitoefent,

is $\int_v^{v'} p dv$, waarin p moet worden uitgedrukt in

functie van v en t , en vervolgens geïntegreerd kan worden, t als constant beschouwende, terwijl de grenzen v en v' het volumen voorstellen, dat het lichaam respectivelijk in A en B inneemt. Bij die toestandsverandering onderstellen wij dat het lichaam in aanraking is met eene warmtebron K, die de tem-

peratuur t bezit, en het lichaam door toevoeging eener warmtehoeveelheid Q op de constante temperatuur t houdt; de toestandsverandering is alsdan omkeerbaar. Van B gaat het lichaam naar B_0 langs eene adiabatiscbe lijn, d. i. volumen, druk en temperatuur veranderen zoodanig dat het lichaam op geen enkel tijdstip van deze toestandsverandering warmte opneemt of afgeeft, zoodat dus gedurende deze geheele toestandsverandering voldaan wordt aan de differentiaal vergelijking $Mdx + Ndy = 0$. De arbeid, dien het lichaam verricht, wordt uitgedrukt door $\int_{v'}^{v'_0} p dv$, waarin v'_0 het volumen in B_0 is, p en dv uitgedrukt worden in x, y, dx en dy , vervolgens de differentiaalvergelijking toegepast om dy of dx te elimineeren, daarna de vergelijking der adiabatiscbe lijn BB_0 zelve om y of x te elimineeren, waarna men tusschen de behoorlijke grenzen kan integreeren. In B_0 heeft het lichaam de temperatuur t_0 , welke wij onderstellen zullen kleiner dan t te zijn. Van B_0 gaat het lichaam naar A_0 langs de isotherm $t = t_0$; waarbij wij zullen onderstellen dat het eene zekere hoeveelheid warmte Q_0 aan een lichaam K_0 afgeeft, dat de temperatuur t_0 bezit. Mocht het lichaam soms warmte van K_0 opnemen, zoo zal het later moeten blijken dat Q_0 negatief wordt of worden kan. Het lichaam verricht daarbij den arbeid $\int_{v'_0}^{v_0} p dv$, waarin v_0 het volumen in A_0 voorstelt, en de integraal kan behandeld worden als bij de eerste toestandsverandering. Van A_0 gaat het lichaam eindelijk naar A terug, waarbij het wederom warmte ontvangt

noch afgeeft, en een arbeid verricht uitgedrukt door

$$\int_{v_0}^v p dv, \text{ welke integraal behandeld kan worden even-}$$

als bij de tweede toestandsverandering. Hierna is het lichaam, na achtereenvolgens vier verschillende toestandsveranderingen ondergaan te hebben, in denzelfden toestand teruggekomen waarvan het is uitgegaan: het heeft een omkeerbaren kringloop volbracht. Het woord kringloop passen wij toe op iedere reeks van toestandsveranderingen waarbij het lichaam terugkeert tot den toestand waarvan het uitging; omkeerbaar noemen we dien wanneer deze volgens de uiteengezette beginselen omkeerbaar is. De hier beschrevene kringloop draagt den naam van Carnot, omdat deze dien kringloop het eerst bezigt in zijn boven reeds aangehaald werk.

Den zin waarin wij hier het lichaam den kringloop van Carnot hebben doen maken zullen wij in het vervolg rechtstreeks noemen, terwijl wij den zin omgekeerd zullen noemen wanneer het lichaam, dat den kringloop maakt, aan het warmere lichaam K warmte afstaat.

Gedurende den beschreven kringloop heeft het lichaam de hoeveelheid warmte Q opgenomen en Q_0 afgegeven, dat is totaal de hoeveelheid $Q - Q_0$ opgenomen. Het heeft een arbeid verricht, uitgedrukt door de som van vier termen

$$\int_v^{v'} p dv + \int_{v'}^{v'_0} p dv + \int_{v'_0}^{v_0} p dv + \int_{v_0}^v p dv,$$

welke som volstrekt niet nul behoeft te zijn omdat in de vier verschillende integralen p verschillende

functiën van v voorstelt; we laten de vier termen daarom afgezonderd staan.

De energie van het lichaam heeft na het volbrengen van dien kringloop geenerlei verandering ondergaan, dus moet volgens het eerste grondbeginsel de opgenomene warmte in den verrichten arbeid zijn omgezet.

22. Wij komen derhalve tot de vergelijking

$$J(Q-Q_0) = \int_{v_0}^{v'} p dv + \int_{v'}^{v_0'} p dv + \int_{v_0'}^{v_0} p dv + \int_{v_0}^{v} p dv.$$

Drie gevallen zijn hier te onderscheiden:

1° Is $Q > Q_0$; zoo is eene warmtehoeveelheid Q_0 van het lichaam K van hoogere temperatuur t overgegaan op een lichaam K_0 van lagere temperatuur t_0 , terwijl het overige deel $Q-Q_0$ der aan het warmere lichaam onttrokken hoeveelheid warmte is omgezet in arbeid. Was Q_0 negatief, zoo zouden de beide hoeveelheden warmte Q en $-Q_0$ aan de twee lichamen K en K_0 onttrokken, in arbeid omgezet worden.

2° Is $Q < Q_0$; zoo is de hoeveelheid warmte Q van het lichaam K op het koudere K_0 overgegaan, terwijl de verrichte arbeid negatief is, dat wil zeggen dat eene aequivalente hoeveelheid arbeid is omgezet in de warmtehoeveelheid Q_0-Q , welke insgelijks aan het lichaam van lagere temperatuur is medegedeeld.

3° Is $Q = Q_0$; zoo wordt door den kringloop slechts eene hoeveelheid warmte van het warmere op het koudere lichaam overgebracht, zonder dat verder arbeid in warmte of warmte in arbeid omgezet wordt. Daar we echter met een omkeerbaren kringloop te doen hebben, zou bij eene werkelijke omkeering (door het lichaam den weg AA_0B_0BA te doen doorloopen), eene hoeveelheid warmte van een lichaam

van lagere op een van hoogere temperatuur worden overgebracht, zonder dat eenige andere blijvende verandering plaats vond. Daar dit in strijd is met onze tweede grondstelling, zoo is het 3^e geval als onmogelijk uitgesloten. (*)

Onderstellen wij de twee eerste gevallen beide als mogelijk, en denken wij ons twee verschillende lichamen, die ieder voor zich een omkeerbaren kringloop van Carnot volbrengen, terwijl beide lichamen met dezelfde warmtebronnen K en K_0 in warmtewisseling staan. Onderstel verder dat het lichaam A een kringloop volbrengt die in het eerste geval verkeert en B een van het tweede geval, zoodanig geregeld dat de hoeveelheid arbeid, dien A op zijne omgeving verricht, gelijk is aan de hoeveelheid arbeid, welken B in warmte omzet; nu kunnen deze twee lichamen zoodanig met elkander in verband gebracht worden dat de door A geleverde arbeid door B wordt opgenomen. Het eindresultaat is dat ten gevolge van enkel omkeerbare toestandsveranderingen de som der warmtehoeveelheden, welke A en B aan het warmere lichaam ontleenen, geheel en al op het koudere lichaam wordt

(*) Deze uitkomst is in lijnrechte tegenspraak met de hypothese welke Carnot als grondslag voor zijne warmtetheorie aannam, n. l. dat de warmte eene zekere onvernietigbare stof is. Hij vergeleek het overgaan van eene hoeveelheid warmte van eene hoogere tot eene lagere temperatuur met het dalen van gewichten waarbij eene zekere hoeveelheid arbeid kan ontwikkeld worden, evenredig aan die hoeveelheid warmte zelve, en verder afhankelijk van de temperaturen van de lichamen K en K_0 . De metingen van Hirn op stoomwerktuigen met condensor, hoewel onderling tamelijk uiteenloopende, hebben, vooral door hare tamelijk goede overeenstemming met de resultaten van de proeven van Joule, met voldoende zekerheid de oude hypothese omtrent het wezen der warmte omvergeworpen.

overgebracht, terwijl verder geene veranderingen tot stand komen. Door werkelijke omkeering van die twee kringloopen zou dan eene gelijke hoeveelheid warmte van het koudere op het warmere lichaam overgebracht worden, zonder andere blijvende veranderingen in het leven te roepen, hetgeen weder tegen de tweede aangenomen grondstelling strijdt. De gevallen 1 en 2 sluiten dus elkander uit. Slechts één van die twee gevallen kan in de natuur verwezenlijkt zijn, de vraag is welk.

De metingen door Hirn op het stoomwerktuig volbracht, geven het antwoord op deze vraag. Bij het stoomwerktuig toch wordt het lichaam dat aan den kringloop onderworpen is, het water, in den stoomketel verwarmd, terwijl het andere lichaam, de condensor, waarmede het water in warmtewisseling staat, van lagere temperatuur is; het werktuig levert arbeid op zijne omgeving, waarvoor eene aequivalente hoeveelheid warmte verdwijnt. Wij zien hier dus het eerste geval verwezenlijkt, derhalve is het tweede onmogelijk.

Bij het stoomwerktuig is de hoeveelheid warmte Q_0 , welke aan het koudere lichaam, den condensor, wordt afgestaan, positief; dit kan echter nog niet voor bewijs gelden dat in den kringloop van Carnot Q_0 noodwendig positief zijn moet. Wij zijn echter gekomen tot deze stelling:

Wanneer een lichaam een omkeerbaren kringloop van Carnot maakt in rechtstreekschen zin, wordt eene hoeveelheid warmte aan een lichaam van hoogere temperatuur ontleend, en tevens eene hoeveelheid warmte omgezet in arbeid; maakt

het lichaam dien kringloop in omgekeerden zin, dan wordt eene hoeveelheid warmte aan het lichaam van hoogere temperatuur afgestaan, en tevens eene hoeveelheid arbeid omgezet in warmte.

23. Gesteld men kon zonder andere veranderingen in het leven te roepen eene hoeveelheid warmte omzetten in arbeid, zoo zou men die hoeveelheid warmte b.v. kunnen ontleenen aan een lichaam K_0 dat de temperatuur t_0 bezit. Dien arbeid kan men gebruiken om een lichaam een kringloop van Carnot in omgekeerden zin te doen maken, dat daarbij eene hoeveelheid warmte aan een lichaam K van hoogere temperatuur afstaat. Daar de bij deze twee bewerkingen totale hoeveelheid verrichte arbeid nul is, kan de aan het warmere lichaam K meegedeelde warmte slechts van het lichaam K_0 afkomstig zijn; er zou dus eene hoeveelheid warmte van het koudere op het warmere lichaam zijn overgebracht, zonder dat andere veranderingen in het leven geroepen waren, hetgeen onmogelijk is. Derhalve:

Men kan geene warmte in arbeid omzetten zonder andere toestandsveranderingen in het leven te roepen.

Anders:

Het omzetten van arbeid in warmte zonder meer, b.v. door wrijving, is eene onomkeerbare toestandsverandering.

Hieruit volgt tevens nog dat een lichaam, het welk een kringloop van Carnot in rechtstreekschen zin maakt, aan het koudere lichaam K_0 warmte moet meedeelen; want zoo het daar-

aan warmte onttrok, of zoo het daaraan warmte mededeelde noch onttrok, zou de aan het warmere lichaam K ontleende hoeveelheid warmte plus de aan het koudere ontleende, of de aan het warmere onttrokken hoeveelheid alleen, in arbeid worden omgezet zonder andere blijvende veranderingen in het leven te roepen, hetgeen tegen het laatstgevonden resultaat strijdt.

Tevens volgt er nog uit dat de adiabatiscbe lijnen elkander niet snijden kunnen, want zoo twee van die lijnen een punt gemeen hadden, zou men met die twee en een willekeurigen isotherm eene geslotene driehoekige figuur kunnen samenstellen, en een lichaam den kringloop, door die figuur voorgesteld, kunnen doen maken. Hierbij staat het lichaam slechts in warmtewisseling met eene enkele warmtebron, waaraan het warmte ontleent of afstaat, al naarmate de kringloop in den eenen of anderen zin volbracht wordt. Men zou dan eene hoeveelheid warmte, aan de warmtebron ontleend, in arbeid kunnen omzetten, zonder andere veranderingen in het leven te roepen, hetgeen zoo pas aangetoond is onmogelijk te zijn.

24. Nadat gebleken is dat het omzetten van warmte in arbeid met andere toestandsveranderingen moet gepaard gaan, rijst de vraag, welk verband er bestaat tusschen de hoeveelheid in arbeid omgezette warmte en de daarmee gepaard gaande veranderingen; want dat er een verband bestaan moet is duidelijk. Immers indien twee lichamen A en B ieder een kringloop van Carnot volbrengen (om ons bij de tot nu toe beschouwde toestandsveranderingen te beperken),

daarbij in warmtewisseling staande met dezelfde warmtebronnen K en K_0 , welke de temperatuur t en t_0 bezitter, waarvan t de hoogste is, zoodanig dat beide lichamen eene even groote hoeveelheid warmte in arbeid omzetten, kan men, zoo b.v. A bovendien eene warmtehoeveelheid van K op K_0 overbracht, die grooter is dan die welke B van K op K_0 overbrengt, den kringloop van A omkeeren, en den arbeid dien B levert voor A verbruiken. Nu zal echter de hoeveelheid warmte die A bij deze omkeering van K_0 op K overbrengt grooter zijn dan die welke B in tegenovergestelden zin overbrengt. Het resultaat is weer dat eene hoeveelheid warmte van een kouder op een warmer lichaam zou zijn overgebracht zonder dat eenige andere verandering had plaats gevonden.

Bij gelijke hoeveelheden in arbeid omgezette warmte moeten derhalve gelijke hoeveelheden warmte van K op K_0 worden overgebracht. Verder is het duidelijk dat die hoeveelheden rechtstreeks evenredig moeten zijn, hetgeen onmiddellijk blijkt, wanneer men een lichaam eenige malen achtereen denzelfden kringloop laat volbrengen. Het verband dat tusschen die hoeveelheden bestaat, moet dus uitgedrukt worden door eene formule van den vorm

$$\frac{Q-Q_0}{Q_0} = f(t, t_0),$$

waarin ten aanzien van de warmtehoeveelheden de notatie van vroeger behouden is, en het tweede lid eene functie van de temperaturen t en t_0 voorstelt, daar .boven gebleken is dat die verhouding in het eerste lid constant blijft, zoolang de temperaturen

t en t_0 constant zijn. Het is nu verder onze opgave den vorm van deze functie te bepalen.

25. Vooreerst merken wij op dat, wanneer de twee isothermen tot samenvalling gebracht worden, $Q = Q_0$ wordt, alzoo moet, voor $t = t_0$, $f(t, t_0)$ verdwijnen; deze functie kunnen wij derhalve ontwikkelen in de reeks

$$f(t, t_0) = (t - t_0) \left(\frac{df(t, t_0)}{dt} \right)_{t=t_0} + \\ + \frac{1}{2} (t - t_0)^2 \left(\frac{d^2 f(t, t_0)}{dt^2} \right)_{t=t_0} + \text{enz.}$$

Men verkrijgt dan

$$\frac{Q - Q_0}{Q_0} = (t - t_0) \left(\frac{df(t, t_0)}{dt} \right)_{t=t_0} + \\ + \frac{1}{2} (t - t_0)^2 \left(\frac{d^2 f(t, t_0)}{dt^2} \right)_{t=t_0} + \text{enz.}$$

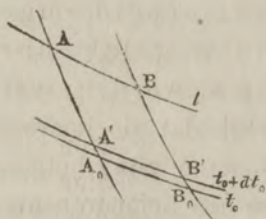


Fig. 2.

Laten wij de isotherm A B (fig. 2) tot op oneindig korten afstand van $A_0 B_0$ naderen, zoodat $t = t_0 + dt_0$ wordt, dan wordt tevens $Q = Q_0 + dQ_0$, en de gevondene vergelijking gaat over in

$$\frac{dQ_0}{Q_0} = \left(\frac{df(t, t_0)}{dt} \right)_{t=t_0} dt_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 f(t, t_0)}{dt^2} \right)_{t=t_0} dt_0^2 + \text{enz.}$$

In het tweede lid verdwijnen alle termen op de eerste na, en de factor van dt_0 is eene functie van t_0 alleen, welke functie wij door $\varphi(t_0)$ voorstellen. Door deze vergelijking tusschen de grenzen t_0 en t te integreeren vinden wij dan

$$\log \frac{Q}{Q_0} = \int_{t_0}^t \varphi(t_0) dt_0 = \psi(t) - \psi(t_0).$$

Hieruit verder

$$\frac{Q}{Q_0} = e^{\psi(t) - \psi(t_0)} = \frac{e^{\psi(t)}}{e^{\psi(t_0)}} = \frac{T}{T_0}$$

De invoering van de twee nieuwe functiën ψ en T is van zelf duidelijk. Men merke echter op dat T eene functie van t alleen is, en dat T_0 de waarde van die functie voor $t = t_0$ beteekent.

26. Daar het aannemen eener temperatuurschaal iets geheel willekeurigs is, nemen wij in het vervolg de functie T zelve als maat der temperatuur, d. i. wij noemen de grootheid T zelve eenvoudig temperatuur, en wij zullen deze absolute temperatuur noemen, om haar te onderscheiden van de temperatuur door de in gebruik zijnde thermometers aangegeven. Wij hebben aldus eene temperatuurschaal gevonden, die in de natuur zelve gegrond is, en die onafhankelijk is van de eigenschappen van eene of andere stof. Wij komen alzoo tot de volgende stelling, welke de definitie van de absolute temperatuur in zich bevat.

Wanneer een lichaam een omkeerbaren kringloop van Carnot maakt, zijn de hoeveelheden warmte, welke dat lichaam daarbij opneemt en afgeeft, evenredig aan de absolute temperaturen, die het lichaam bij het opnemen en afgeven van die warmtehoeveelheden bezit.

Daar in deze verkregene uitkomst slechts sprake is van de verhouding van temperaturen, staat het ons nog vrij een gegeven interval in een willekeurig aantal gelijke deelen te verdeelen, en ieder

deel als eenheid van temperatuursverschil, d. i. als graad aan te nemen. Wij zullen het temperatuursverschil van smeltend ijs en van verzadigden waterdamp bij gemiddelde dampkringsdrukking (760 millimeters kwik) in 100 gelijke deelen verdeeld denken, en ieder deel als eenheid van temperatuursverschil, als graad aannemen.

De hier gegevene definitie van temperatuur is het eerst door Thomson opgesteld. (*)

Wij schrijven nu in het vervolg t in plaats van T , zoodat onze formule overgaat in

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{t}{t_0}, \dots \dots \dots (31)$$

en verstaan dan onder t absolute temperatuur. Daar bij de afleiding van de formules, die gevolgen van de eerste hoofdwet zijn, van geene temperatuurmaat sprake geweest is, zoo gelden deze ook voor de absolute temperatuurschaal. Deze echter eene andere zijnde dan die welke Joule bezigde bij het bepalen van het mechanisch aequivalent der warmte, zoo moet dat getal, ingeval men de absolute temperatuurschaal ten grondslag leggen wil, daarnaar gewijzigd worden. Wij zullen echter later aanwijzen dat onze temperatuurschaal zoo weinig van die, welke de luchtthermometer aangeeft, afwijkt, dat de invloed van die afwijking op het mechanisch aequivalent der warmte geheel en al binnen de grenzen van de waarnemingsfouten valt waarmede de proeven van Joule noodwendig verbonden waren.

(*) Phil. Trans. of the R. S. of London, 1854, II. p. 351. Phil. Mag. 4th Series, t 11, p. 216.

Daar Q_0 hetzelfde teeken moet hebben als Q , blijkt uit (31) nog dat t_0 hetzelfde teeken moet hebben als t , dat wil zeggen dat t_0 niet negatief zijn kan. Derhalve:

Negatieve absolute temperaturen zijn onmogelijk.

27. Uit de boven gevondene formule volgt nog

$$\frac{Q-Q_0}{Q} = \frac{t-t_0}{t}, \dots \dots \dots (32)$$

welke ons leert dat, zoo een lichaam een omkeerbaren kringloop van Carnot maakt, de verhouding van de in arbeid omgezette warmte tot de aan de warmtebron ontleende warmte, gelijk is aan de verhouding tusschen het verschil der absolute temperaturen van het lichaam waarbij het warmte opneemt en afgeeft, tot de absolute temperatuur van de warmtebron.

Bij stoom- en calorische werktuigen heet de verhouding tusschen de in arbeid omgezette warmte, en de warmte welke aan de warmtebron ontleend wordt, het nuttig effect van dat werktuig. Doorloopt de stof, welke in die werktuigen het middel is tot omzetting van warmte in arbeid, een omkeerbaren kringloop van Carnot, dan geeft bovenstaande formule het nuttig effect van dat werktuig aan. Het is gemakkelijk aan te toonen dat geene inrichting een grooter nuttig effect bereiken kan. Gesteld bijv. een lichaam A doorloopt een kringloop van Carnot, en levert daarbij een nuttig effect $\frac{Q-Q_0}{Q}$, terwijl een

ander lichaam B, in warmtewisseling staande met dezelfde bronnen als t , een nuttig effect $\frac{Q'-Q'_0}{Q'}$ zou opleveren, waarin Q' en Q'_0 de warmtehoeveelheden voorstellen, welke B respectivelijk opneemt en afgeeft, dat grooter zou zijn dan het nuttig effect van A. Regelen wij het zoodanig dat de hoeveelheid arbeid, welke B uit warmte voortbrengt, gelijk is aan die welke A levert, dan hebben wij

$$\frac{Q'-Q'_0}{Q'} > \frac{Q-Q_0}{Q},$$

en $Q'-Q'_0 = Q-Q_0$;

en nu vindt men terstond door deeling

$$\frac{1}{Q'} > \frac{1}{Q},$$

of $Q > Q'$,

en dus ook $Q_0 > Q'_0$.

Indien men nu den kringloop van A, die omkeerbaar ondersteld werd, werkelijk omkeert, verbruikt A juist de hoeveelheid arbeid welke door B geleverd wordt; bovendien brengt A op de warmtebron van hooger temperatuur eene hoeveelheid warmte Q , die grooter is dan die welke het lichaam B daaraan ontleende, en het ontleent aan de warmtebron van lager temperatuur eene hoeveelheid warmte Q_0 , die evenveel grooter is dan die welke door B daaraan wordt afgestaan. Het resultaat is dus weer dat eene hoeveelheid warmte van een lichaam van lager temperatuur overgebracht wordt op een lichaam van hooger temperatuur, hetgeen onmogelijk is.

Het is derhalve onmogelijk door eenige inrichting een grooter nuttig effect te bereiken dan door den omkeerbaren kringloop van Carnot.

Het verbeteren van werktuigen, welke warmte in arbeid omzetten, kan dus geschieden: 1^o door het nuttig effect van het werktuig zoo na mogelijk te brengen aan de boven gevonden uitdrukking $\frac{t-t_0}{t}$, 2^o door deze uitdrukking zelve zoo groot mogelijk, d. i. t zoo groot en t_0 zoo klein mogelijk te maken.

28. Wanneer een lichaam een meer samengestelden omkeerbaren kringloop maakt dan dien van Carnot, b. v. een zooals in fig. 3 is voorgesteld, die gevormd wordt door aan elkaar sluitende deelen van isothermen en adiabaten, dan neemt het warmte op van,

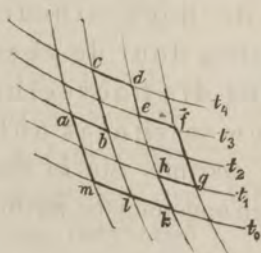


Fig. 3.

en geeft warmte af aan lichamen van verschillende temperaturen, welke wij in de figuur door de letters t_0 , t_1 , t_2 , t_3 , en t_4 , hebben aangeduid. Het lichaam beginne bijv. bij a , en neme van a naar b gaande eene hoeveelheid warmte Q_1 op bij de

temperatuur t_2 ; van b tot c gaande, neemt het geene warmte op en geeft ook geene warmte af, van c tot d neme het de warmtehoeveelheid Q_2 op bij de temperatuur t_4 ; van e tot f de warmtehoeveelheid Q_3 bij de temperatuur t_3 ; vervolgens gaat het van f tot g zonder warmte op te nemen of af te geven; van g tot h geve het de warmtehoeveelheid P_1 af bij de tem-

peratuur t_1 ; van k tot l de warmtehoeveelheid P_2 , en van l tot m de hoeveelheid P_3 , beide laatste hoeveelheden bij de temperatuur t_0 ; eindelijk keert het van m tot a terug, zonder warmte op te nemen of af te geven.

Daar de vierhoekige figuren $ablm$, $cdkl$ en $efgh$ eenvoudige kringloopen van Carnot voorstellen, zoo bestaan tusschen de bovengenoemde opgenomene en afgegevene warmtehoeveelheden en de daarbij behorende temperaturen de navolgende drie betrekkingen:

$$\frac{Q_1}{t_2} = \frac{P_3}{t_0}, \quad \frac{Q_2}{t_4} = \frac{P_2}{t_0}, \quad \frac{Q_3}{t_3} = \frac{P_1}{t_1},$$

waaruit men door optelling vindt

$$\frac{Q_1}{t_2} + \frac{Q_2}{t_4} + \frac{Q_3}{t_3} - \frac{P_1}{t_1} - \frac{P_2 + P_3}{t_0} = 0 \quad (33)$$

Dat is in woorden: De som van de quotienten, die men verkrijgt door de hoeveelheden opgenomen warmte te deelen door de absolute temperaturen, waarbij die hoeveelheden respectivelijk opgenomen zijn, is nul.

De hoeveelheden afgegevene warmte zijn in deze stelling als negatieve hoeveelheden opgenomene warmte meegerekend.

De vergelijking (33) stellen wij korter symbolisch voor door

$$\sum \frac{Q}{t} = 0 \quad (34)$$

29. Doorloopt het lichaam een omkeerbaren kringloop, welke door eene geheel willekeurig geslotene kromme wordt voorgesteld, zoo denke men zich adiabatische lijnen getrokken op oneindig kleinen afstand

(fig. 4), en de elementen der kromme, welke door die lijnen worden afgesneden, vervangen door elementen van isothermen; de warmtehoeveelheid, welke bij het doorloopen van ieder zoodanig boogje wordt opgenomen of afgegeven, wordt alsdan oneindig klein, en onze formule gaat over in deze

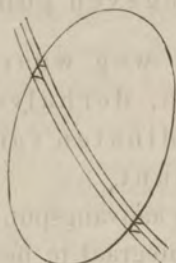


Fig. 4.

$$\int \frac{dQ}{t} = 0, \quad \dots (35)$$

waarin de integratie zich over den geheelen kringloop moet uitstrekken.

30. Doorloopt een lichaam twee verschillende wegen

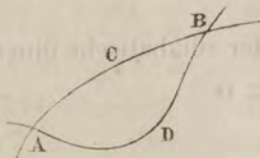


Fig. 5.

ACB of ADB (fig. 5) om van A tot B te geraken, zoo stelle G de waarde van de integraal

$$\int \frac{dQ}{t} \text{ voor, genomen langs den}$$

weg ACB, en H de waarde van diezelfde integraal genomen

langs den weg ADB. Gaat het lichaam van B den weg BCA naar A terug, zoo is de waarde van de integraal $-G$, daar de hoeveelheden opgenomen en afgegeven warmte veranderen in even groote hoeveelheden afgegeven en opgenomen warmte, terwijl de temperaturen, waarbij die hoeveelheden opgenomen en afgegeven worden, dezelfde blijven. Laat men nu het lichaam den kringloop ADBCA maken, dan is de integraal, over dien kringloop uitgestrekt, wederom nul, d. i.

$$H - G = 0,$$

of

$$G = H.$$

Dat wil zeggen: De waarde van de integraal $\int \frac{dQ}{t}$ genomen tusschen twee gegeven punten, is onafhankelijk van den weg waarlangs men de integraal neemt, derhalve alleen eene functie van de coördinaten van het aanvangspunt en het eindpunt.

31. Neemt men A als een standvastig aanvangspunt aan, en B veranderlijk, dan is de integraal te beschouwen als eene functie van de coördinaten van B, (x, y) alleen. De vergelijking

$$\frac{dQ}{t} = \frac{Mdx + Ndy}{t} = 0$$

is dus integreerbaar, $\frac{1}{t}$ is een integreerende factor van de differentiaalvergelijking der adiabatiscbe lijnen

$$Mdx + Ndy = 0$$

De vergelijking

$$\int_A \frac{Mdx + Ndy}{t} = \text{constant} \quad . \quad . \quad (36)$$

is de vergelijking eener adiabatiscbe lijn, terwijl de verschillende adiabatiscbe lijnen verkregen worden door aan de constante in het tweede lid verschillende waarden toe te kennen. Wij kunnen eveneens de verschillende adiabatiscbe lijnen verkrijgen door voor het aanhangspunt A verschillende punten aan te nemen en de constante van het tweede lid onveranderd te laten. Geven wij deze de waarde nul, dan is

$$\int_A \frac{Mdx + Ndy}{t} = 0$$

de vergelijking der adiabatiscbe lijn welke door A gaat.

32. Uit de integreerbaarheid der vergelijking

$$\frac{Mdx + Ndy}{t} = 0$$

volgt terstond

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{M}{t} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{N}{t} \right), \quad \dots \quad (\text{II}).$$

$$\begin{aligned} \int_A \frac{Mdx + Ndy}{t} &= \int_{x_0}^x \left(\frac{M}{t} \right)_{y_0} dx + \int_{y_0}^y \frac{N}{t} dy = \\ &= \int_{x_0}^x \frac{M}{t} dx + \int_{y_0}^y \left(\frac{N}{t} \right)_{x_0} dy. \quad \dots \quad (37) \end{aligned}$$

waarin x_0 en y_0 de coördinaten van A voorstellen.

33. De vergelijking (II), verder ontwikkeld, geeft

$$\frac{1}{t} \frac{dM}{dy} - \frac{M}{t^2} \frac{dt}{dy} = \frac{1}{t} \frac{dN}{dx} - \frac{N}{t^2} \frac{dt}{dx},$$

of wel
$$\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx} = \frac{1}{t} \left(M \frac{dt}{dy} - N \frac{dt}{dx} \right). \quad \dots \quad (\text{IIa})$$

Deze vergelijking in verband gebracht met (Ia) § 9, geeft

$$M \frac{dt}{dy} - N \frac{dt}{dx} = \frac{t}{J} \left(\frac{dp}{dy} \frac{dv}{dx} - \frac{dp}{dx} \frac{dv}{dy} \right). \quad \dots \quad (38)$$

34. Wij recapituleeren hier drie vergelijkingen van analogen vorm, namelijk

$$M \frac{dp}{dy} - N \frac{dp}{dx} = C \left(\frac{dp}{dy} \frac{dt}{dx} - \frac{dp}{dx} \frac{dt}{dy} \right),$$

$$M \frac{dv}{dy} - N \frac{dv}{dx} = c \left(\frac{dv}{dy} \frac{dt}{dx} - \frac{dv}{dx} \frac{dt}{dy} \right),$$

$$M \frac{dt}{dy} - N \frac{dt}{dx} = \frac{t}{J} \left(\frac{dp}{dy} \frac{dv}{dx} - \frac{dp}{dx} \frac{dv}{dy} \right).$$

De twee eerste zijn in § 13 gevonden, de laatste in de vorige §. Twee van deze, naar willekeur genomen, kunnen dienen om M en N op te lossen. Ook kunnen zij dienen om door eliminatie van M en N eene betrekking tusschen C en c te vinden. Deze eliminatie geeft.

$$(C-c) \left(\frac{dv}{dy} \frac{dt}{dx} - \frac{dv}{dx} \frac{dt}{dy} \right) \left(\frac{dp}{dy} \frac{dt}{dx} - \frac{dp}{dx} \frac{dt}{dy} \right) + \\ + \frac{t}{J} \left(\frac{dp}{dx} \frac{dv}{dy} - \frac{dp}{dy} \frac{dv}{dx} \right) = 0. \quad (39)$$

35. De tot hertoe gevondene formules gaan wij weder vereenvoudigen voor de drie verschillende gevallen, waarin wij voor x en y twee der drie grootheden v , p , en t nemen, daarbij gebruik makende van de formules welke wij in het vorige hoofdstuk voor dezelfde gevallen hebben gevonden.

Wij stellen

$$1^\circ \quad x = v \text{ en } y = p.$$

Men vindt dan uit (IIa)

$$\frac{dM}{dp} - \frac{dN}{dv} = \frac{1}{t} \left(M \frac{\partial t}{\partial p} - N \frac{\partial t}{\partial v} \right); \quad (40)$$

$$\text{uit (38)} \quad M \frac{\partial t}{\partial p} - N \frac{\partial t}{\partial v} - \frac{t}{J} \quad (41)$$

36. Wij stellen

$$2^\circ \quad x = v \text{ en } y = t.$$

Men vindt uit (IIa)

$$\frac{dM}{dt} - \frac{dN}{dv} = \frac{M}{t}; \quad (42)$$

$$\text{uit (38)} \quad M = \frac{t}{J} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (43)$$

Hieruit door differentiatie naar t

$$\frac{dM}{dt} = \frac{1}{J} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{t}{J} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{M}{t} + \frac{t}{J} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2},$$

waardoor (42) overgaat in

$$\frac{dN}{dv} = \frac{dc}{dv} = \frac{t}{J} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \dots \dots \dots (44)$$

Vergelijk (1) geeft nog

$$dQ = \frac{t}{J} \frac{\partial p}{\partial t} dv + c dt, \dots \dots \dots (45)$$

en de eerste vergelijking (2)

$$\frac{dU}{dv} = t \frac{\partial p}{\partial t} - p \dots \dots \dots (46)$$

37. Wij stellen:

$$3^\circ \dots \dots x = p \text{ en } y = t$$

Men vindt uit (IIa)

$$\frac{dM}{dt} - \frac{dN}{dp} = \frac{M}{t}; \dots \dots \dots (47)$$

uit (38)

$$M = -\frac{t}{J} \frac{\partial v}{\partial t} \dots \dots \dots (48)$$

Hieruit vindt men door differentiatie naar t

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{t}{J} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{t}{J} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{M}{t} - \frac{t}{J} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$

waardoor (47) overgaat in

$$\frac{dN}{dp} = \frac{dC}{dp} = -\frac{t}{J} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \dots \dots \dots (49)$$

Vergelijking (1) geeft nog

$$dQ = -\frac{t}{J} \frac{\partial v}{\partial t} dp + C dt, \dots \dots \dots (50)$$

en de eerste vergelijking (2)

$$\frac{dU}{dp} = -\left(t \frac{\partial v}{\partial t} + p \frac{\partial v}{\partial p}\right) \dots \dots \dots (51)$$

38. Vergelijking (39) geeft voor alle drie de gevallen hetzelfde resultaat, namelijk

$$C - c = \frac{t}{J} \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{t}{J} \frac{\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2}{\frac{\partial v}{\partial p}} \dots (52)$$

Deze laatste formule toont aan dat de specifieke warmte bij constante drukking voor alle stoffen grooter is dan de specifieke warmte bij constant volumen, daar alle stoffen door toenemende drukking, bij constante temperatuur, haar volumen verminderen, en derhalve de noemer $-\frac{\partial v}{\partial p}$ positief is, terwijl de teller steeds positief is, ook voor stoffen, die, zooals het water, tusschen het vriespunt en ongeveer 4° daarboven, bij toenemende temperatuur, bij constante drukking, haar volumen verminderen.

39. Ten slotte behandelen wij nog het geval dat het lichaam, welks toestandsveranderingen wij beschouwen, uit twee gedeelten in verschillenden aggregatietoestand bestaat, en behouden daarbij de notatie welke wij aan het slot van het 2^{de} Hoofdstuk hebben aangenomen. Men vindt dan uit (IIa)

$$\frac{dM}{dt} - \frac{dN}{dx} = \frac{M}{t}; \dots (53)$$

uit (38)
$$M = \frac{t}{J} \frac{dp}{dt} \frac{dv}{dx} \dots (54)$$

Substitueert men hierin de in (27) gevondene uitkomsten, zoo verkrijgt men

$$\frac{d\lambda}{dt} + c' - h = \frac{\lambda}{t}, \dots \dots (55)$$

$$\lambda = \frac{t}{J} \frac{dp}{dt} u \dots \dots \dots (56)$$

Deze laatste formule geeft eene waarde voor de dichtheid.

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{s' + u}$$

van dampen bij het maximum der spanning, wanneer latente warmte, spanning, en mechanisch aequivalent der warmte met voldoende nauwkeurigheid bekend zijn. Uit (55) is h te berekenen wanneer bovendien c' met genoegzame nauwkeurigheid bekend is.

Wij kunnen hier de vergelijking der adiabatiscbe lijnen onmiddellijk integreeren. Door substitutie van de waarden van M en N verkrijgt men

$$\int \frac{M dx + N dy}{t} = \int \frac{\lambda dx + \{c' - x(c' - h)\} dt}{t}$$

Substitueert men hierin de waarde van $c' - h$ uit (55), dan wordt de vergelijking der adiabatiscbe lijn, welke door het punt (x_0, t_0) gaat,

$$\int_{x_0}^x \frac{\lambda}{t} dx + \int_{t_0}^t c' \frac{dt}{t} - x_0 \int_{t_0}^t \left(\frac{\lambda}{t^2} - \frac{1}{t} \frac{d\lambda}{dt} \right) dt = 0,$$

$$\frac{\lambda}{t} (x - x_0) + \int_{t_0}^t c' \frac{dt}{t} + x_0 \left(\frac{\lambda}{t} - \frac{\lambda_0}{t_0} \right) = 0,$$

$$\frac{\lambda x}{t} - \frac{\lambda_0 x_0}{t_0} + \int_{t_0}^t c' \frac{dt}{t} = 0, \dots \dots (57)$$

waarin λ_0 de waarde van λ voor $t = t_0$ beteekent.

HOOFDSTUK IV.

Toepassing der gevondene formules op bepaalde gevallen.

a. *De ideale gassen.*

40. De in de natuur voorkomende zoogenaamde permanente gassen (waterstof, stikstof, zuurstof) volgen op zeer weinig na twee wetten: die van Boyle en die van Mayer. De wet van Boyle zegt, dat bij constante temperatuur het volumen van eene gegevene hoeveelheid gas omgekeerd evenredig is aan de drukking, zoodat de betrekking tusschen volumen, spanning en temperatuur kan uitgedrukt worden door de formule

$$pv = T, \dots \dots \dots (58)$$

waarin T eene tot nog toe onbekende functie van de absolute temperatuur voorstelt. Nauwkeurige proeven van Regnault hebben aangetoond dat geen der bekende gassen volkomen aan deze wet gehoorzaamt.

De wet van Mayer drukt uit dat, wanneer eene hoeveelheid gas zich bij constante temperatuur uitzet, de opgenomene warmte het aequivalent is van

den bij de uitzetting door het gas verrichten uitwendigen arbeid.

Deze wet kan men afleiden uit eene bekende proef van Joule. Deze verbond twee vaten door eene buis, in welke zich eene kraan bevond, aan elkander. Een van de twee vaten was luchtledig gepompt, terwijl in het andere dampkringslucht tot eene hooge spanning werd samengeperst. Werd de kraan nu geopend, dan stroomde de lucht natuurlijk zoo lang over tot dat de spanningen in de twee vaten dezelfde waren, hierbij daalde de temperatuur in het vat waarin de lucht aanvankelijk was samengeperst, en rees in het andere. Joule gaf aan dezen toestel een zoodanigen vorm dat deze in zijn geheel in een watercalorimeter geplaatst kon worden. Nadat de kraan was opengezet, en door warmtewisseling tusschen het water en de twee vaten het evenwicht der temperaturen hersteld was, bevond Joule dat de gevoeligste thermometer geene verandering in de temperatuur van het water in den calorimeter aanwees. Hieruit volgt 1° dat ook de temperatuur van de lucht in de twee vaten dezelfde was als voor den aanvang van de proef; 2° dat de hoeveelheid warmte, welke het water aan de lucht in het eene vat meedeelde, gelijk was aan die, welke het water aan de lucht in het andere vat ontrok; dat derhalve de totale hoeveelheid warmte welke het water aan de lucht meedeelde nul was. Bovendien was de arbeid welken de uitstroomende lucht verrichtte nul, omdat geen tegendruk te overwinnen was. Daar dus de lucht geene warmte van buiten had opgenomen, noch arbeid verricht had, moest de energie constant gebleven zijn; bovendien was de temperatuur bij het einde van de proef gelijk aan de temperatuur bij den aanvang. Hier-

uit blijkt dus dat bij constante temperatuur de energie constant blijft, in welken toestand zich het gas moge bevinden.

Bij deze proeven heeft de toestandsverandering van de lucht op onomkeerbare wijze plaats gevonden, omdat gedurende het overstromen van het eene vat naar het andere, de lucht eene drukking te overwinnen had welke kleiner was dan hare eigene spankracht, en het derhalve ondenkbaar is dat onder dezelfde omstandigheden een overstromen in tegengestelden zin plaats vindt.

Laat men den toestand van de lucht op omkeerbare wijze veranderen, door het eene drukking te doen overwinnen gelijk aan hare eigene spankracht, dan oefent zij een zekeren arbeid uit. Is na die toestandsverandering de temperatuur dezelfde als bij den aanvang, zoo is volgens het voorgaande de energie ook dezelfde als bij den aanvang, en het is niet anders mogelijk of de lucht moet gedurende de toestandsverandering eene zekere hoeveelheid warmte hebben opgenomen, welke juist het aequivalent is van den uitwendig verrichten arbeid.

Latere proeven, door Thomson en Joule gezamenlijk verricht, hebben aangetoond dat de dampkringslucht en andere permanente gassen niet volkomen aan deze wet gehoorzamen, doch dat de afwijkingen slechts zeer gering zijn. Wij zullen later op deze proeven terugkomen.

41. Hoewel er in de natuur geene gassen te vinden zijn welke volkomen aan de wetten van Boyle en Mayer gehoorzamen, is het niet onbelangrijk de eigenschappen op te sporen, welke de gassen zouden heb-

ben wanneer dit wel het geval was, daar de in die onderstelling gevondene eigenschappen ook zeer nabij de werkelijke eigenschappen der gassen komen moeten.

Wij zullen een gas, dat volkomen aan de twee genoemde wetten gehoorzaamt, een ideaal gas noemen. Daarvoor geldt dan vooreerst verg. (58), welke de wet van Boyle uitdrukt.

Om de wet van Mayer in vergelijking te brengen, drukken wij de energie U uit in functie van t en eene andere willekeurige veranderlijke x . Men verkrijgt dan

$$dU = \frac{dU}{dx} dx + \frac{dU}{dt} dt$$

Is nu voor constante temperatuur de energie constant, zoo moet noodwendig

$$\frac{dU}{dx} = 0$$

zijn. Nemen wij voor x òf v òf p , dan kan eene van de vier vergelijkingen (16), (21), (46) of (51) dienen. Nemen wij (46), dan is

$$\frac{dU}{dv} = t \frac{\partial p}{\partial t} - p = 0 \quad \dots \quad (59)$$

Door in het oog te houden dat het differentiaalquotient $\frac{\partial p}{\partial t}$ genomen is in de onderstelling dat v constant was, vindt men door integratie van (59)

$$p F(v) = t, \dots \dots \dots (60)$$

waarin $F(v)$ eene willekeurige functie van v beteekent. Door van formule (46) gebruik te maken hebben wij de absolute temperatuur ingevoerd. Derhalve: Bij gassen, welke aan de wet van Mayer vol-

doen, is bij constant volumen de drukking evenredig aan de absolute-temperatuur.

Deelt men (58) en (60) op elkaar, dan vindt men

$$\frac{v}{F(v)} = \frac{T}{t}$$

Het eerste lid van deze vergelijking is eene functie waarin t , en het tweede eene waarin v niet voorkomt, derhalve kan ook v niet meer in het eerste en t niet meer in het tweede lid voorkomen; dat is: de waarde van ieder lid is eene absoluut constante grootheid. Noemen wij deze R , zoo is

$$\begin{aligned} T &= Rt, \\ pv &= Rt \dots \dots \dots (61) \end{aligned}$$

Deze laatste vergelijking geeft dus het verband dat tusschen volumen, spanning en absolute temperatuur bij ideale gassen bestaat. De waarde van R kan voor verschillende gassen verschillend zijn.

Uit verg. (61) blijkt tevens dat bij ideale gassen het volumen bij constante drukking evenredig is aan de absolute temperatuur.

Ideale gassen zijn derhalve geschikt om absolute temperaturen te meten, hetzij bij constant volumen, hetzij bij constante drukking; zoo men zich slechts onafhankelijk weet te maken van de uitzetting van het vat waarin het besloten is.

42. Laat men het gas door temperatuursverhoging onder eene willekeurige doch constante drukking p zich uitzetten, en noemt men v_0 het volumen van het gas onder diezelfde drukking en bij eene zekere standaardtemperatuur t_0 , voor welke men gewoonlijk de temperatuur van smeltend ijs onder

gemiddelde dampkringsdrukking aanneemt, zoo wordt de uitzettingscoëfficiënt van het gas gedefiniëerd door de formule

$$\alpha_{p,t} = \frac{\partial v}{\partial t}$$

De aan α toegevoegde indices beduiden dat die uitzettingscoëfficiënt geldt voor het geval dat het gas onder de drukking p staat en de temperatuur t bezit.

Uit (61) vindt men

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{R}{p},$$

en uit de definitie van v_0 in verband met (61)

$$p v_0 = R t_0;$$

door deeling der laatste vergelijkingen op elkaar vindt men

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{t_0} \dots \dots \dots (62)$$

De uitzettingscoëfficiënt van een ideaal gas is eene absoluut constante grootheid, voor alle ideale gassen dezelve en het omgekeerde van de absolute waarde van de aangenomene standaardtemperatuur.

Dit is de wet van Gay-Lussac (*).

(*) In de *Annalen van Poggendorff*, Bd. 129, s. 327, is door L. Cohen Stuart het eerst aangetoond dat de wet van Gay-Lussac met behulp van de twee hoofdwetten der Mechanische warmtetheorie uit de wetten van Boyle en Mayer kon worden afgeleid. Zijn betoog is echter onafhankelijk van eenige aanname omtrent maat van temperatuur. Het resultaat waartoe hij op deze wijze geraakt is: De uitzettingscoëfficiënt is voor alle gassen, die aan de wetten van Boyle en Mayer voldoen, dezelfde functie van de temperatuur, onafhankelijk van de overige eigenschappen van die gassen.

43. Onder de bekende gassen wijkt de waterstof het minst van de wetten van Boyle en Mayer af, zoo weinig dat de uitzettingscoëfficiënt van dat gas kan dienen om bij benadering de absolute temperatuur van smeltend ijs te bepalen. Regnault vond dat de verhouding van het volumen van eene zekere hoeveelheid waterstofgas, bij de temperatuur van verzadigden waterdamp onder de gemiddelde dampkringsdrukking, tot het volumen van diezelfde hoeveelheid bij de temperatuur van smeltend ijs, de waterstof in beide gevallen onder dezelfde drukking staande, wordt uitgedrukt door het getal

$$1.3661.$$

Neemt men aan dat de waterstof volkomen aan die twee wetten gehoorzaamt, zoodat de betrekking tusschen volumen, spanning en absolute temperatuur wordt uitgedrukt door de formule

$$pv = Rt,$$

dan wordt ook de verhouding $\frac{t_1}{t_0}$ van de absolute temperaturen van verzadigden waterdamp en smeltend ijs door datzelfde getal uitgedrukt. Het verschil van die twee temperaturen hebben wij in 100 graden verdeeld gedacht, aldus

$$t_1 - t_0 = 100.$$

Men vindt nu

$$t_0 = \frac{1}{0.003661} = 273.15 \text{ en } t_1 = 373.15 \dots (63)$$

Wij hebben alzoo de plaats van het vriespunt en het kookpunt op de absolute thermometerschaal bij benadering bepaald.

44. Nemen wij v en t als onafhankelijk veran-

derlijken, dan vindt men uit (13), daar uit (61)

$$\frac{\partial t}{\partial v} = \frac{p}{R} = \frac{t}{v} \text{ is,}$$

$$M = (C - c) \frac{t}{v} \text{ en } N = c;$$

en uit (43)
$$M = \frac{t}{J} \frac{R}{v};$$

alzo
$$R = J(C - c) \dots \dots \dots (64)$$

Deze formule, welke men ook uit (52) had kunnen vinden, kan dienen om het mechanisch aequivalent van de warmte te bepalen; daartoe moet C bekend zijn, welke Regnault voor de permanente gassen zeer nauwkeurig bepaald heeft; verder c, welke men kent zoodra de verhouding $\frac{C}{c}$ bekend is; deze verhouding

kan bepaald worden uit de voortplantingssnelheid van het geluid in deze gassen, met welk onderwerp men zich in den laatsten tijd veel heeft bezig gehouden; en eindelijk R, welke uit (61) onmiddellijk gevonden wordt wanneer men een stel waarden voor volumen, spanning en temperatuur van de gewichtseenheid van het gas kent. Evenzoo kan (64) dienen om, zoo J als bekend ondersteld wordt, de verhouding $\frac{C}{c}$ te bepalen.

45. Door differentiatie van M naar t (v constant latende) vindt men

$$\frac{dM}{dt} = \frac{R}{Jv},$$

waardoor (15) overgaat in

$$\frac{R}{v} - J \frac{dc}{dv} = \frac{R}{v},$$

of $\frac{dc}{dv} = 0 \dots \dots \dots (65)$

De specifieke warmte bij constant volumen van een ideaal gas is alleen functie van de temperatuur. Hetzelfde geldt voor de specifieke warmte bij constante drukking, daar het verschil van deze twee volgens (64) constant is.

Uit (16) vindt men met behulp van (64) en (61) $\frac{dU}{dv} = 0$, zooals te verwachten was, en (17) wordt dan

$$U - U_0 = J \int_{t_0}^t c dt, \dots \dots \dots (66)$$

zooals het behoort eene functie van t alleen, daar c alleen van t afhangt.

Onderstelt men c absoluut constant, zoo wordt de laatste vergelijking

$$U - U_0 = Jc(t - t_0);$$

en nemen wij verder aan dat de energie van het gas nul is wanneer zijne absolute temperatuur nul is, dan vindt men

$$U = Jct,$$

eenvoudig evenredig aan de absolute temperatuur.

46. De vergelijking der adiabatische lijnen vindt men door toepassing van de formules (36) en (37), waarin men x door v , y door t , M door $\frac{t}{J} \frac{R}{v}$ en N door c vervangt:

$$\int_{v_0}^v \frac{R}{J} \frac{dv}{v} + \int_{t_0}^t c \frac{dt}{t} = 0,$$

welke de vergelijking der adiabatische lijn is die door het willekeurige punt (v_0, t_0) gaat. Den eersten term integreerende, vindt men

$$\frac{R}{J} \log \frac{v}{v_0} + \int_{t_0}^t c \frac{dt}{t} = 0;$$

$$v = v_0 e^{-\frac{J}{R} \int_{t_0}^t c \frac{dt}{t}} = v_0 e^{-\frac{1}{C-c} \int_{t_0}^t c \frac{dt}{t}}. \quad (67)$$

Voert men p in plaats van v in, en stelt men

$$p_0 v_0 = R t_0,$$

dan is

$$\frac{v}{v_0} = \frac{p_0 t}{p t_0};$$

en de vergelijking wordt

$$\frac{p_0}{p} = \frac{t_0}{t} e^{-\frac{1}{C-c} \int_{t_0}^t c \frac{dt}{t}},$$

of

$$\frac{p}{p_0} = \frac{t}{t_0} e^{\frac{1}{C-c} \int_{t_0}^t c \frac{dt}{t}}. \quad (68)$$

Onderstelt men als boven c constant, dan gaan de gevondene vergelijkingen over in

$$\frac{v}{v_0} = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-\frac{c}{C-c}},$$

en

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{C}{C-c}};$$

of na eliminatie van t ,

$$\left(\frac{v}{v_0}\right)^C = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{-c}.$$

Stellen wij nog $\frac{C}{c} = k$, dan gaan de drie laatste vergelijkingen over in

$$\frac{v}{v_0} = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-\frac{1}{k-1}},$$

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{k}{k-1}},$$

en
$$\left(\frac{v}{v_0}\right)^{-k} = \frac{p}{p_0}.$$

De laatste vergelijking, welke het verband aangeeft tusschen veranderlijk volumen en veranderlijke drukking voor ideale gassen, wanneer zij zich uitzetten zonder warmte op te nemen of af te staan, is de wet van Poisson.

b. *De in de Natuur voorkomende gassen.*

47. Daar de zoogenaamde permanente gassen, waterstof, zuurstof, stikstof, enz, slechts zeer weinig van de wetten van Boyle en Mayer afwijken, zoo kunnen wij de betrekking, welke voor die gassen tusschen volumen, spanning en absolute temperatuur bestaat, uitdrukken door de formule

$$pv = Rt, \quad \dots \dots \dots (69)$$

waarin R niet meer eene absoluut constante, doch eene met den toestand van het gas veranderlijke grootheid zal voorstellen, die echter slechts zeer weinig met dien toestand veranderen zal.

Nemen wij voor de volgende beschouwingen v en t als onafhankelijk veranderlijken, dan mogen wij R als eene functie van v en t beschouwen, die langzaam met

v en t verandert, zoodat de producten en machten van de partiële differentiaalquotienten $\frac{dR}{dv}$ en $\frac{dR}{dt}$ mogen verwaarloosd worden.

Door differentiatie van (69) naar p en t , vindt men

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{v} \left(R + t \frac{dR}{dt} \right) \dots (70)$$

Hierdoor wordt (43)

$$M = \frac{t}{Jv} \left(R + t \frac{dR}{dt} \right), \dots (71)$$

en (46)
$$\frac{dU}{dv} = \frac{t}{v} \left(R + t \frac{dR}{dt} \right) - p = \frac{t^2}{v} \frac{dR}{dt} \dots (72)$$

Verder is (16)

$$\frac{dU}{dt} = Jc,$$

zoodat men verkrijgt

$$U - U_0 = \int_{v_0}^v \frac{t^2}{v} \frac{dR}{dt} dv + J \int_{t_0}^t c_{v_0} dt, \dots (73)$$

waarin c_{v_0} de met de temperatuur veranderlijke waarde van c beteekent terwijl het volumen constant v_0 blijft.

48. Differentieert men (69) naar v en t , dan vindt men

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{t}{p} \left(\frac{dR}{dt} + \frac{dR}{dv} \frac{\partial v}{\partial t} \right) + \frac{R}{p},$$

of
$$\frac{\partial v}{\partial t} \left(1 - \frac{t}{p} \frac{dR}{dv} \right) = \frac{R}{p} \left(1 + \frac{t}{R} \frac{dR}{dt} \right) \dots (74)$$

Formule (52) gaat nu over in

$$J(C-c) = t \frac{R}{v} \left(1 + \frac{t}{R} \frac{dR}{dt} \right) \frac{R}{p} \frac{1 + \frac{t}{R} \frac{dR}{dt}}{1 - \frac{t}{p} \frac{dR}{dv}},$$

welke, na ontwikkeling, met inachtneming van (69), en verwaarloozing van producten en machten van $\frac{dR}{dt}$ en $\frac{dR}{dv}$, overgaat in

$$J(C - c) = R \left(1 + 2 \frac{t}{R} \frac{dR}{dt} + \frac{t}{p} \frac{dR}{dv} \right),$$

of

$$J(C - c) = R + 2t \frac{dR}{dt} + v \frac{dR}{dv} \dots (75)$$

49. Wij gaan thans over tot het vergelijken van de absolute temperatuur met de tot heden in de natuurkunde gebruikelijke temperatuurschaal van Celsius. De absolute temperatuur blijven wij voorstellen door t , en nemen voor de gewone temperatuur de letter τ aan. Deze laatste nemen wij aan dat gemeten wordt met een lucht- of koolzuur-thermometer, die bij constant volumen gebruikt wordt. Blijkens de nauwkeurige proefnemingen van Regnault wijken de aanwijzingen van die thermometers, ten minste tusschen de temperaturen 0° en 100° Celsius onmerkbaar weinig van elkander af.

Wij volgen bij ons volgend onderzoek de methode door Jochmann in het Zeitschrift für Mathematik und Physik van Schlömilch, Kahl en Cantor (5^e jaargang, bl. 69) bekend gemaakt, en maken evenals hij gebruik van de proefnemingen op uitgebreide schaal in het werk gesteld door Thomson en Joule, omtrent de afwijkingen welke de gassen in de natuur van de wet van Boyle vertoonen. De resultaten van die proefnemingen zijn te vinden in de Philosophical Transactions of the Royal Society of Londen voor het jaar 1854, bl. 321. Onze voordracht van die methode wijkt

echter in enkele ondergeschikte punten van die van Jochmann af; evenzoo enkele getallen welke bij de berekeningen gebezigd worden.

De betrekking welke tusschen volumens, spanning en gewone temperatuur van het te onderzoeken gas bestaat, kan voorgesteld worden door de vergelijking

$$pv = p_0 v_0 \{ \varphi(v) + \tau \psi(v) \} \dots (76)$$

Overeenkomstig de definitie van gewone temperatuur is, bij constant volumen, de toename van de spanning evenredig aan de toename van de temperatuur. Hier moet echter worden opgemerkt dat door den vorm waarin deze vergelijking geschreven is, ondersteld wordt dat de aanwijzing van den thermometer onafhankelijk is van het volumen, dat de gewichtseenheid van het gas inneemt.

Door p_0 verstaan wij de drukking van 760 millimeters kwik of van 10332.96 kilogrammen per vierkante meter, waarbij de densiteit van kwik op 13.596 is aangenomen, terwijl v_0 het volumen van de gewichtseenheid (kilogram) bij die spanning en de temperatuur 0° Celsius voorstelt. Stellen wij $p = p_0$, $v = v_0$ en derhalve ook $\tau = 0$, zoo komt

$$\varphi(v_0) = 1 \dots (77)$$

Wij kunnen derhalve $\varphi(v)$ ontwikkelen als volgt

$$\varphi(v) = 1 + a \left(\frac{v_0}{v} - 1 \right) + b \left(\frac{v_0}{v} - 1 \right)^2 + \text{enz.} (78)$$

Op dergelijke wijze ontwikkelen wij $\psi(v)$ in de reeks

$$\psi(v) = \alpha + \beta \left(\frac{v_0}{v} - 1 \right) + \gamma \left(\frac{v_0}{v} - 1 \right)^2 + \text{enz.} (79)$$

De vergelijking (76) wordt dan

$$\frac{pv}{p_0v_0} = 1 + a \left(\frac{v_0}{v} - 1 \right) + b \left(\frac{v_0}{v} - 1 \right)^2 + \text{enz.} \\ + \left\{ \alpha + \beta \left(\frac{v_0}{v} - 1 \right) + \gamma \left(\frac{v_0}{v} - 1 \right)^2 + \text{enz.} \right\} \tau. \quad (80)$$

De coëfficiënten a , b , enz., α , β , γ , enz. dienen door proefnemingen bepaald te worden.

Vergelijken wij (80) met de vergelijking van de ideale gassen.

$$pv = Rt,$$

waaruit wij R elimineeren door te stellen

$$p_0v_0 = Rt_0,$$

waarin p_0 en v_0 dezelfde beteekenis hebben als boven en t_0 de absolute temperatuur van smeltend ijs voorstelt, waardoor men verkrijgt

$$\frac{pv}{p_0v_0} = \frac{t}{t_0} = \alpha_1 t = 1 + \alpha_1 (t - t_0),$$

wanneer wij $t_0 = \frac{1}{\alpha_1}$ stellen.

De vergelijkingen van het ideale en niet-ideale gas worden dezelfde wanneer $a = b = \beta = \gamma = \text{enz.} = 0$, $\tau = t - t_0$, en $\alpha = \alpha_1$ zijn. Hieruit volgt dat a , b , β , γ enz. zeer kleine getallen moeten zijn, dat τ weinig van $(t - t_0)$ en α weinig van α_1 verschillen kunnen, omdat de in de natuur voorkomende (permanente) gassen op zeer weinig na aan de wetten van Boyle en Mayer gehoorzamen.

Jochmann heeft op boven aangehaalde plaats de coëfficiënten voor dampkringslucht en koolzuurgas, in de onderstelling dat de reeksen niet verder behoeften voortgezet te worden dan tot de tweede

machten van $\left(\frac{v_0}{v} - 1\right)$, afgeleid uit de waarnemingen van Regnault omtrent uitzetting aan gassen. Hij geeft nl.

voor dampkringslucht.	voor koolzuurgas.
$a = - 0.00090935$	$- 0.0065144$
$b = + 0.00001154$	$+ 0.0000331$
$\alpha = + 0.003665$	$+ 0.0036856$
$\beta = + 0.00000827$	$+ 0.00002267$
$\gamma = + 0.000000032$	$- 0.000000182.$

De coëfficiënten voor het koolzuurgas zijn aanmerkelijk grooter dan die voor de dampkringslucht.

De waarnemingen van Regnault, waaruit deze getallen zijn afgeleid, zijn geschied bij temperaturen tusschen 0° en 100° Celsius; het is dus niet geoorloofd de formule (80) met de gegevene getallen te bezigen voor temperaturen welke buiten deze grenzen liggen. Verder merken wij op, dat, zoo de getallen voor dampkringslucht resp. koolzuur gebezigd worden, τ de temperatuur beteekent, welke door een lucht- resp. koolzuur-thermometer bij constant volumen wordt aangewezen. Wij hebben reeds opgemerkt dat de aanwijzingen van die twee thermometers onmerkbaar weinig onderling verschillen.

De vergelijking (80) kunnen wij ook schrijven in den vorm.

$$\frac{pv}{p_0v_0} = l + m \frac{v_0}{v} + n \left(\frac{v_0}{v}\right)^2 + \left\{ \lambda + \mu \frac{v_0}{v} + \nu \left(\frac{v_0}{v}\right)^2 \right\} \tau \quad (81)$$

Tusschen de hier en de in (80) voorkomende coëfficiënten bestaan de navolgende betrekkingen

$$\begin{array}{ll} 1 - a + b = l, & \alpha - \beta + \gamma = \lambda, \\ a - 2b = m, & \beta - 2\gamma = \mu, \\ b = n, & \gamma = \nu. \end{array}$$

Hieruit vloeien nog de volgende betrekkingen voort, welke later gebezigd zullen worden.

$$\left. \begin{array}{l} l + m + n = 1, \quad \lambda + \mu + \nu = \alpha, \\ l + 2m + 3n = 1 + a, \quad \lambda + 2\mu + 3\nu = \alpha + \beta. \end{array} \right\} \quad (82)$$

50. De bovenvermelde proefnemingen van Thomson en Joule waren op de volgende wijze ingericht. Zij persten het te onderzoeken gas in eene lange buis, welke slangvormig opgerold in een met water gevuld vat geplaatst was. Nabij het uiteinde van die buis hadden zij er eene prop van poreuse stoffen, b. v. zijde of katoen, ingebracht, welke tusschen twee van vele gaten voorziene geelkoperen platen werd vastgehouden. Op de plaats waar zich deze prop bevond, was de buis omgeven door zeer slecht geleidende stoffen, zoodat het gas, dat er door heen geperst werd, geene warmte kon opnemen of afgeven.

Stel v' , p' en τ' zijn volumen, spanning en gewone temperatuur van het gas in de slangvormige buis, v , p en τ dezelfde grootheden voor het gas na het doorstromen door de prop. De energie van de gewichtseenheid van het gas, welke wij als functie van v en τ beschouwen, zij in de slangvormige buis $U(v', \tau')$ en na doorstroming door de prop $U(v, \tau)$. Wanneer eene gewichtseenheid van het gas door de prop heen gaat, dan verricht die gewichtseenheid in de buis een arbeid — $p' v'$, en aan de buitenzijde een arbeid $p v$, dus een

totalen arbeid $pv - p'v'$; deze arbeid moet gelijk zijn aan de afname van de energie van de doorgestroomde gewichtseenheid, omdat geene warmte is opgenomen of afgegeven; wij hebben derhalve

$$U(v', \tau') - U(v, \tau) = pv - p'v',$$

$$\text{of ook } U(v, \tau) - U(v', \tau') = p'v' - pv \dots (83)$$

Thomson en Joule hebben steeds eene geringe daling in temperatuur van het gas na de doorstrooming waargenomen. Stellen wij deze δ , dan is

$$\tau' - \tau = \delta; \dots (84)$$

bovendien bevonden zij dat deze daling, wanneer het gas bij de uitstrooming steeds dezelfde temperatuur bezat, evenredig was aan het verschil in spanning van het gas voor en na doorstrooming van de prop, zoodat men heeft

$$\delta = \delta \frac{p' - p}{p_0 + \dots} \dots (85)$$

waarin δ eene grootheid voorstelt welke alleen afhankelijk is van de temperatuur van het gas voor en na het doorstroomen van de prop.

In aanmerking nemende dat δ steeds gering is, mogen wij, met verwaarloozing van verdere termen, schrijven

$$U(v', \tau') = U(v', \tau) + \delta \frac{dU(v', \tau)}{d\tau},$$

waardoor (83) overgaat in

$$U(v, \tau) - U(v', \tau) = \delta \frac{dU(v', \tau)}{d\tau} + p'v' - pv.$$

Dewijl in § 16 nog niets is ondersteld omtrent maat van temperatuur, mogen wij in de daar voorkomende formules t vervangen door τ , dan is

$$\frac{dU(v', \tau)}{d\tau} = Jc,$$

waarin c nu beteekent de specifieke warmte bij constant

volumen, bij de meting van welke de gewone temperatuur ten grondslag ligt. Men verkrijgt alzoo

$$U(v, \tau) - U(v', \tau) = Jc\delta + p'v' - pv \quad . \quad (86)$$

De specifieke warmte is hier genomen bij het volumen v' en de temperatuur τ of τ' , hetgeen wegens het gering verschil van τ en τ' weinig ter zake doet. Wij onderstellen echter c constant tusschen de grenzen 0° en 100° Celsius. In zooverre deze onderstelling juist is, is ook de formule (85) juist, daar in dit geval de hogere differentiaal quotienten van U naar τ verdwijnen.

Wordt nu het laatste lid nul bevonden, dan is de energie onafhankelijk van het volumen, en wordt aan de wet van Mayer voldaan. Het is lichtelijk aan te toonen, dat, zoo het gas een ideaal gas ware, er geene temperatuursverlaging kan plaats vinden. Men heeft immers in dat geval

$$\begin{aligned} pv &= Rt, \\ p'v' &= Rt', \\ p'v' - pv &= R(t' - t) = R\delta, \end{aligned}$$

alzoo

$$U(v, \tau) - U(v', \tau) = (Jc + R)\delta = JC\delta.$$

Het tweede lid kan alleen verdwijnen voor $\delta = 0$, daar de factor $Jc + R = JC$ voor een ideaal gas niet nul is.

De twee volgende tafels behelzen eenige resultaten, ontleend aan de waarnemingen van Thomson en Joule. Iedere horizontale rij is het gemiddelde uit eene groote reeks van proeven. De eerste tafel behelst waarnemingen op dampkringslucht, de tweede op koolzuurgas. De beteekenis van de getallen in iedere verticale kolom is daarboven aangegeven en behoeft na het voorgaande geene verdere toelichting.

T A F E L I.

$\frac{p' - p}{p_0}$	τ'	τ	δ	δ
0.4317	17.006	16.898	0.108	0.2502
0.5537	20.125	19.979	0.146	0.2637
1.4572	17.744	17.390	0.354	0.2429
1.2668	18.975	18.610	0.365	0.2881
2.7126	17.809	17.102	0.707	0.2606
4.3859	15.483	14.373	1.110	0.2531
4.0275	12.734	11.701	1.033	0.2565
5.0991	91.578	90.528	1.050	0.2059

T A F E L II.

$\frac{p' - p}{p_0}$	τ'	τ	δ	δ
0.4054	18.962	18.503	0.459	1.1322
1.2649	20.001	18.555	1.446	1.1431
2.5345	19.077	16.139	2.938	1.1592
4.1235	12.844	7.795	5.049	1.2244
5.0991	91.516	87.930	3.568	0.7033

Uit deze tafels blijkt dat de verhouding δ voor nagenoeg gelijke temperaturen nagenoeg dezelfde waarde vertoont, voor lucht is deze verhouding veel geringer dan voor koolzuur. Tevens blijkt uit de laatste

waarneming in iedere tafel dat voor hogere temperaturen deze verhouding zeer merkbaar afneemt, voor koolzuur sterker dan voor dampkringslucht. Neemt men voor dampkringslucht de gemiddelde waarden uit de zeven eerste waarnemingen, dan vindt men

$$\tau = 16.579, \quad \delta = 0.2593;$$

en voor koolzuurgas vindt men als gemiddelde uit de drie eerste waarnemingen

$$\tau = 17.732, \quad \delta = 1.1448.$$

51. Om een voorbeeld in getallen te geven, zullen wij onderstellen dat een kilogram lucht of koolzuur door de prop geperst wordt, en stellen daarbij $v' = \frac{1}{2} v_0$ en $v = v_0$, zoodat bij het doorgaan het volumen verdubbelt. Voor de dampkringslucht stellen wij $\tau = 16.579$ en voor het koolzuur $\tau = 17.732$, dan is volgens het voorgaande voor de dampkringslucht $\delta = 0.2593$, en voor het koolzuurgas $\delta = 1.1448$.

Door toepassing van vergelijking (80), vindt men

$$p' = 2p_0 \{1 + a + b + (\alpha + \beta + \gamma) \tau\},$$

$$p = p_0 (1 + \alpha \tau);$$

en bovendien is volgens (83) en (84)

$$\tau' - \tau = \delta \frac{p' - p}{p_0}.$$

Uit deze drie vergelijkingen berekenen wij p , p' en τ' . Door substitutie van p' en p uit de twee eerste vergelijkingen in de derde vindt men

$$\tau' = \frac{(1 - \delta \alpha) \tau + (1 + 2a + 2b) \delta}{1 - 2(\alpha + \beta + \gamma) \delta}$$

Nadat τ' berekend is kan de eerste of derde verge-

lijking dienen om p' te berekenen, terwijl de tweede onmiddellijk de waarde van p geeft. Door substitutie van boven gegevene getallen voor lucht en koolzuur, en 10332.96 voor p_0 vindt men dan

voor dampkringslucht. voor koolzuurgas.

$$p = 10958.29$$

$$p = 11008.25$$

$$p' = 21926.81$$

$$p' = 21984.00$$

$$\tau = 16.854$$

$$\tau = 18.948$$

$$\delta = 0.275$$

$$\delta = 1.216$$

Eindelijk kunnen wij formule (86) gebruiken, door daarin de gevondene waarden te substituëeren; deze

gaat nl. voor $v' = \frac{1}{2} v_0$ en $v = v_0$ over in

$$U(v, \tau) - U(v', \tau) = Jc \delta + v_0 \left(\frac{1}{2} p' - p \right).$$

Hierin stellen wij $J = 423.55$.

Regnault geeft voor de specifieke warmte bij constante spanning voor de dampkringslucht 0.2377, en voor koolzuur 0.2163. De specifieke warmte bij constant volumen vinden wij door deze getallen te deelen door de verhouding tusschen de specifieke warmte bij constante spanning en die bij constant volumen, welke verhouding wij vroeger reeds door de letter k hebben voorgesteld. Deze verhouding nemen wij voor de lucht 1.4081 (zie Thomson en Joule t. a. p.). Die voor koolzuur berekenen wij uit waarnemingen van Masson omtrent de voortplantingssnelheid van het geluid in koolzuurgas (*). Deze geeft voor de waargenomene snelheid, herleid op 0° Celsius en gemiddelde

(*) Ann. de Chimie et de Physique, 3^{me} Série, Tome LIII, p. 257.

dampkringsdrukking, 256.83 meters per secunde. De snelheid in de lucht is 333.5; de snelheid in koolzuur is derhalve 0.7701 malen de snelheid in de lucht. De waarde van k voor koolzuur is dan

$$k = 1.4081 \times 1.529 \times (0.7701)^2 = 1.27685,$$

waarin het getal 1.529 de densiteit van koolzuur is, die van de lucht = 1 gesteld.

Het volumen v_0 van de gewichtseenheid is het omgekeerde van de densiteit. Volgens Regnault weegt een kub. meter lucht te Parijs 1.293187 kilogr., en derhalve een kub. meter koolzuur $1.293187 \times 1.529 = 1.9773$ kilogr.

Door behoorlijke substitutie van de gegevene getallenwaarden vindt men dan voor dampkringslucht

$$U(v_0, \tau) - U\left(\frac{1}{2}v_0, \tau\right) = 21.67393 \text{ kilogrammeters,}$$

en voor koolzuurgas

$$U(v_0, \tau) - U\left(\frac{1}{2}v_0, \tau\right) = 79.02989 \text{ kilogrammeters.}$$

De arbeid, welke in ons geval verricht is om een kilogram gas door de prop heen te drijven, wordt uitgedrukt door $v' p' = \frac{1}{2} v_0 p'$, dat is voor dampkrings-

lucht 8478, en voor het koolzuurgas 5559 kilogrammeters. De verhouding van de bovengevondene waar-

den voor $\dot{U}(v_0, \tau) - U\left(\frac{1}{2}v_0, \tau\right)$ tot dezen arbeid is

voor dampkringslucht 0.00255,

voor koolzuur . . . 0.01416.

Het blijkt dat bij toenemend volumen en constante temperatuur de energie van het gas toeneemt; voor

koolzuur in veel sterker mate dan voor dampkringslucht. Men heeft deze toename van de energie bij constante temperatuur de inwendige arbeid van het gas genoemd.

Thomson en Joule hebben nog eene enkele proefneming gemaakt op kleine schaal met waterstofgas, en bevonden dat de afkoeling, welke dit gas bij het stroomen door de prop vertoont, slechts ongeveer $\frac{1}{13}$

bedraagt van de afkoeling welke dampkringslucht onder gelijke omstandigheden vertoont. Zij deelen dit resultaat met eenige reserve mede, wegens de onvolkomenheid van zulke proeven op kleine schaal, doch er kan geen twijfel zijn, dat de afkoeling van waterstof veel geringer is dan die van lucht.

52. In § 36, waar wij volumen en absolute temperatuur tot onafhankelijk veranderlijken genomen hebben, vonden wij

$$\frac{dU}{dv} = t \frac{\partial p}{\partial t} - p.$$

Daar absolute en gewone temperatuur slechts van elkander afhankelijk zijn, zoo mogen wij deze formule als volgt wijzigen

$$\frac{dU}{dv} = t \frac{d\tau}{dt} \frac{\partial p}{\partial \tau} - p,$$

waaruit

$$t \frac{d\tau}{dt} = \left(\frac{dU}{dv} + p \right) : \frac{\partial p}{\partial \tau} \dots \dots (87)$$

Hierin substituëeren wij voor $\frac{dU}{dv}$ en $\frac{\partial p}{\partial \tau}$ waarden die

wij gaan afleiden uit (86) en (81). Deze laatste geeft terstond

$$\frac{\partial p}{\tau} = \frac{p_0 v_0}{v} \left\{ \lambda + \mu \frac{v_0}{v} + \nu \left(\frac{v_0}{v} \right)^2 \right\} \dots (88)$$

Wij schrijven (86) onder den vorm

$$\frac{U(v, \tau) - U(v', \tau)}{v - v'} = \frac{Jc\delta}{v - v'} + \frac{p'v' - pv}{v - v'},$$

en merken op dat het eerste lid voor $v' = v$ overgaat in het gezochte differentiaalquotient. Wij hebben aldus

$$\begin{aligned} \frac{dU(v, \tau)}{dv} &= \lim_{v' \rightarrow v} \left(\frac{Jc\delta}{v - v'} \right)_{v' = v} + \\ &+ \lim_{v' \rightarrow v} \left(\frac{p'v' - pv}{v - v'} \right)_{v' = v} \dots (89) \end{aligned}$$

Wij zullen nu het tweede lid door middel van de vergelijkingen (81,) (84) en (85) transformeeren.

Uit (85) is

$$\lim_{v' \rightarrow v} \left(\frac{\delta}{v - v'} \right)_{v' = v} = \frac{\delta}{p_0} \lim_{v' \rightarrow v} \left(\frac{p' - p}{v - v'} \right)_{v' = v}, \quad (90)$$

daar δ alleen functie van τ is.

Vergelijking (81) toepassende op het gas voor en na doorstrooming van de prop, heeft men

$$\begin{aligned} p'v' &= p_0 v_0 \left[l + m \frac{v_0}{v'} + n \left(\frac{v_0}{v'} \right)^2 + \right. \\ &\left. + \left\{ \lambda + \mu \frac{v_0}{v'} + \nu \left(\frac{v_0}{v'} \right)^2 \right\} \tau' \right], \end{aligned}$$

$$\text{en} \quad pv = p_0 v_0 \left[l + m \frac{v_0}{v} + n \left(\frac{v_0}{v} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left\{ \lambda + \mu \frac{v_0}{v} + \nu \left(\frac{v_0}{v} \right)^2 \right\} \tau \right].$$

Substitueert men in de eerste van deze $\tau = \tau + \delta$ en trekt men dan de tweede af, dan verkrijgt men

$$p'v' - pv = p_0 v_0 \left[m \left(\frac{v_0}{v'} - \frac{v_0}{v} \right) + n \left(\frac{v_0^2}{v'^2} - \frac{v_0^2}{v^2} \right) + \right. \\ \left. \left\{ \mu \left(\frac{v_0}{v'} - \frac{v_0}{v} \right) + \nu \left(\frac{v_0^2}{v'^2} - \frac{v_0^2}{v^2} \right) \right\} \tau \right] \\ + p_0 v_0 \left\{ \lambda + \mu \frac{v_0}{v'} + \nu \left(\frac{v_0}{v'} \right)^2 \right\} \delta.$$

De eerste term van het tweede lid heeft een factor

$$\left(\frac{v_0}{v'} - \frac{v_0}{v} \right) = \frac{v_0 (v - v')}{v v'}.$$

Neemt men dezen factor uit, en deelt men dan de vergelijking door $(v - v')$, zoo komt er

$$\frac{p'v' - pv}{v - v'} = \frac{p_0 v_0^2}{v v'} \left[m + n \left(\frac{v_0}{v'} + \frac{v_0}{v} \right) + \right. \\ \left. + \left\{ \mu + \nu \left(\frac{v_0}{v'} + \frac{v_0}{v} \right) \right\} \tau \right] + \\ + p_0 v_0 \left\{ \lambda + \mu \frac{v_0}{v'} + \nu \left(\frac{v_0}{v'} \right)^2 \right\} \frac{\delta}{v - v'};$$

en lettende op (90) vindt men

$$\begin{aligned} & \lim. \left(\frac{p'v' - pv}{v - v'} \right)_{v' = v} = \\ & = p_0 \frac{v_0^2}{v^2} \left[m + 2n \frac{v_0}{v} + \left\{ \lambda + 2\nu \frac{v_0}{v} \right\} \tau \right] + \\ & + \delta v_0 \left\{ \lambda + \mu \frac{v_0}{v} + \nu \left(\frac{v_0}{v} \right)^2 \right\} \lim. \left(\frac{p' - p}{v - v'} \right)_{v = v} \quad (91) \end{aligned}$$

De vergelijking (81) onder een eenigszins anderen vorm geschreven, toegepast op het gas voor en na de doorstroming, geeft

$$\begin{aligned} p' = p_0 \left[l \frac{v_0}{v'} + m \left(\frac{v_0}{v'} \right)^2 + n \left(\frac{v_0}{v'} \right)^3 + \right. \\ \left. + \left\{ \lambda \frac{v_0}{v'} + \mu \left(\frac{v_0}{v'} \right)^2 + \nu \left(\frac{v_0}{v'} \right)^3 \right\} \tau' \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{en } p = p_0 \left[l \frac{v_0}{v} + m \left(\frac{v_0}{v} \right)^2 + n \left(\frac{v_0}{v} \right)^3 + \right. \\ \left. + \left\{ \lambda \frac{v_0}{v} + \mu \left(\frac{v_0}{v} \right)^2 + \nu \left(\frac{v_0}{v} \right)^3 \right\} \tau \right]. \end{aligned}$$

Substitueert men in de eerste $\tau' = \tau + \delta$ en trekt men dan de tweede af, zoo verkrijgt men

$$\begin{aligned} p' - p = p_0 \left[l \left(\frac{v_0}{v'} - \frac{v_0}{v} \right) + \right. \\ \left. + m \left(\frac{v_0^2}{v'^2} - \frac{v_0^2}{v^2} \right) + n \left(\frac{v_0^3}{v'^3} - \frac{v_0^3}{v^3} \right) + \right. \\ \left. + \left\{ \lambda \left(\frac{v_0}{v'} - \frac{v_0}{v} \right) + \mu \left(\frac{v_0^2}{v'^2} - \frac{v_0^2}{v^2} \right) + \nu \left(\frac{v_0^3}{v'^3} - \frac{v_0^3}{v^3} \right) \right\} \tau \right] + \\ + p_0 \left\{ \lambda \frac{v_0}{v'} + \mu \left(\frac{v_0}{v'} \right)^2 + \nu \left(\frac{v_0}{v'} \right)^3 \right\} \delta. \end{aligned}$$

Hieruit vindt men verder

$$\frac{p' - p}{v - v'} = \frac{p_0 v_0}{v v'} \left[l + m \left(\frac{v_0}{v'} + \frac{v_0}{v} \right) + n \left(\frac{v_0^2}{v'^2} + \frac{v_0^2}{vv'} + \frac{v_0^2}{v^2} \right) + \right. \\ \left. + \left\{ \lambda + \mu \left(\frac{v_0}{v'} + \frac{v_0}{v} \right) + \nu \left(\frac{v_0^2}{v'^2} + \frac{v_0^2}{vv'} + \frac{v_0^2}{v^2} \right) \right\} \tau \right] + \\ + p_0 \left\{ \lambda \frac{v_0}{v'} + \mu \left(\frac{v_0}{v'} \right)^2 + \nu \left(\frac{v_0}{v'} \right)^3 \right\} \frac{\delta}{v - v'};$$

$$\lim. \left(\frac{p' - p}{v - v'} \right)_{v' = v} =$$

$$\frac{p_0 v_0}{v^2} \left[l + 2m \frac{v_0}{v} + 3n \left(\frac{v_0}{v} \right)^2 + \left\{ \lambda + 2\mu \frac{v_0}{v} + 3\nu \left(\frac{v_0}{v} \right)^2 \right\} \tau \right] \\ + \delta \left\{ \lambda \frac{v_0}{v} + \mu \left(\frac{v_0}{v} \right)^2 + \nu \left(\frac{v_0}{v} \right)^3 \right\} \lim. \left(\frac{p' - p}{v - v'} \right)_{v' = v};$$

$$\lim. \left(\frac{p' - p}{v - v'} \right)_{v' = v} =$$

$$\frac{p_0 v_0}{v^2} \left[l + 2m \frac{v_0}{v} + 3n \left(\frac{v_0}{v} \right)^2 + \left\{ \lambda + 2\mu \frac{v_0}{v} + 3\nu \left(\frac{v_0}{v} \right)^2 \right\} \tau \right] \\ \frac{1 - \delta \left\{ \lambda \frac{v_0}{v} + \mu \left(\frac{v_0}{v} \right)^2 + \nu \left(\frac{v_0}{v} \right)^3 \right\}}{\quad} \quad (92)$$

Dewijl in vergelijking (87) de factor $\left(\frac{dU}{dv} + p \right)$ voorkomt, zullen wij p , uitgedrukt in v en τ , bij vergelijking (91) optellen. Deze verandert daardoor in

$$\lim. \left(\frac{p' v' - pv}{v - v'} \right)_{v' = v} + p =$$

$$\frac{p_0 v_0}{v} \left[l + 2m \frac{v_0}{v} + 3n \left(\frac{v_0}{v} \right)^2 + \left\{ \lambda + 2\mu \frac{v_0}{v} + 3\nu \left(\frac{v_0}{v} \right)^2 \right\} \tau \right] \\ + \delta v_0 \left\{ \lambda + \mu \frac{v_0}{v} + \nu \left(\frac{v_0}{v} \right)^2 \right\} \lim. \left(\frac{p' - p}{v - v'} \right)_{v' = v}$$

Bij deze vergelijking tellen wij (90) op, na deze met Jc vermenigvuldigd te hebben, en er komt

$$\frac{dU}{dv} + p = \frac{p_0 v_0}{v} \left[l + 2m \frac{v_0}{v} + 3n \left(\frac{v_0}{v} \right)^2 + \left\{ \lambda + 2\mu \frac{v_0}{v} + 3\nu \left(\frac{v_0}{v} \right)^2 \right\} \tau \right] + \left[\frac{Jc\delta}{p_0} + \delta v_0 \left\{ \lambda + \mu \frac{v_0}{v} + \nu \left(\frac{v_0}{v} \right)^2 \right\} \right] \lim. \left(\frac{p' - p}{v - v'} \right)_{v' = v}$$

Hierin (92) substituërende vindt men na eene lichte herleiding

$$\frac{dU}{dv} = \frac{p_0 v_0}{p_0 v} \left(\frac{Jc\delta}{p_0 v} + 1 \right) \times \frac{l + 2m \frac{v_0}{v} + 3n \left(\frac{v_0}{v} \right)^2 + \left\{ \lambda + 2\mu \frac{v_0}{v} + 3\nu \left(\frac{v_0}{v} \right)^2 \right\} \tau}{1 - \delta \left\{ \lambda \frac{v_0}{v} + \mu \left(\frac{v_0}{v} \right)^2 + \nu \left(\frac{v_0}{v} \right)^3 \right\}}$$

Eindelijk deze laatste uitdrukking en (88) substituërende in (87)

$$t \frac{dx}{dt} = \left(\frac{Jc\delta}{p_0 v} + 1 \right) \times \frac{l + 2m \frac{v_0}{v} + 3n \left(\frac{v_0}{v} \right)^2 + \left\{ \lambda + 2\mu \frac{v_0}{v} + 3\nu \left(\frac{v_0}{v} \right)^2 \right\} \tau}{\left\{ \lambda + \mu \frac{v_0}{v} + \nu \left(\frac{v_0}{v} \right)^2 \right\} \left[1 - \delta \left\{ \lambda \frac{v_0}{v} + \mu \left(\frac{v_0}{v} \right)^2 + \nu \left(\frac{v_0}{v} \right)^3 \right\} \right]} \quad (93)$$

Wordt nu, zooals door Thomson en Joule werkelijk geschied is, de spanning van het uitstroomende gas waargenomen, dan kan men door (80) of (81) het volu-

men van de gewichtseenheid van het uitstroomende gas berekenen, en dan geeft iedere waarneming door

(93) twee bij elkaar behoorende waarden van τ en $t \frac{d\tau}{dt}$.

Stelt men dan verder als betrekking tusschen t en τ

$$t = A + B\tau + C\tau^2 + D\tau^3 + \text{enz.}, \dots (94)$$

dan vindt men hieruit

$$\frac{dt}{d\tau} = B + 2C\tau + 3D\tau^2 + \text{enz.},$$

$$t \frac{d\tau}{dt} = \frac{A + B\tau + C\tau^2 + D\tau^3 + \text{enz.}}{B + 2C\tau + 3D\tau^2 + \text{enz.}};$$

waaruit

$$A = B \left(t \frac{d\tau}{dt} - \tau \right) + C \left(2\tau t \frac{d\tau}{dt} - \tau^2 \right) + \\ D \left(3\tau^2 t \frac{d\tau}{dt} - \tau^3 \right) + \text{enz.}$$

of

$$1 = x \left(t \frac{d\tau}{dt} - \tau \right) + y \left(2\tau t \frac{d\tau}{dt} - \tau^2 \right) + \\ + z \left(3\tau^2 t \frac{d\tau}{dt} - \tau^3 \right) + \text{enz.} \dots (95)$$

waarin

$$x = \frac{B}{A}, \quad y = \frac{C}{A}, \quad z = \frac{D}{A}, \quad \text{enz.} \dots (96)$$

De resultaten van iedere waarneming in (95) gesubstituëerd, geven eene vergelijking. Uit een voldoende aantal waarnemingen kan men dus x, y, z enz. bereke-

nen. Om A, B, C, enz. te bepalen, bedenke men dat bij de absolute temperatuur, evenals bij de gewone, het interval tusschen de temperaturen van smeltend ijs en verzadigden waterdamp bij gemiddelde dampkringsdrukking, in honderd graden verdeeld wordt. Stellen wij de absolute temperatuur van smeltend ijs door t_0 voor, zoo geeft (94)

$$t_0 = A,$$

$$t_0 + 100 = A + 100 B + 10000 C + \text{enz.};$$

waaruit

$$1 = B + 100 C + 10000 D + \text{enz.},$$

en met inachtneming van (96)

$$1 = A (x + 100 y + 10000 z + \text{enz.}).$$

Hierdoor is $A = t_0$ bekend, en door (96) de overige coëfficiënten.

De te verrichten berekeningen worden aanmerkelijk vereenvoudigd wanneer men gerechtigd is $v = v_0$ te stellen, dat is: te onderstellen, of de proeven daarnaar in te richten, dat het volumen van de gewichtseenheid uitstroomend gas v_0 is. Dit was bij de proeven van Thomson en Joule ten naastenbij het geval, daar zij het gas in den dampkring lieten uitstroomen, en slechts bij enkele proeven de spanning van het uitstroomende gas verhoogden; dit laatste had o. a. plaats met de 7^e door ons vermelde proefneming op dampkringslucht, waarbij de spanning van de uitstroomende lucht nog ongeveer $1\frac{1}{2}$ zoo groot als de dampkringsdrukking was.

De in vergelijking (93) voorkomende grootheden welke de verhouding $\frac{v_0}{v}$ of machten daarvan tot fac-

tor hebben, zijn allen zeer gering, men zal dus eene geringe fout begaan door die verhouding, welke weinig van de eenheid verschilt, gelijk aan de eenheid te stellen, daardoor gaat deze over in

$$t \frac{d\tau}{dt} = \left(\frac{Jc\delta}{p_0 v_0} + 1 \right) \frac{l + 2m + 3n + (\lambda + 2\mu + 3\nu)\tau}{(\lambda + \mu + \nu) \{1 - \delta(\lambda + \mu + \nu)\}},$$

of met inachtneming van (82)

$$t \frac{d\tau}{dt} = \left(\frac{Jc\delta}{p_0 v_0} + 1 \right) \frac{1 + a + (\alpha + \beta)\tau}{\alpha(1 - \delta\alpha)} \dots (79)$$

Wij zullen nu van drie waarnemingen bij zooveel mogelijk uiteenlopende temperaturen gebruik maken, en daar de waarneming op lucht, welke bij de laagste temperatuur geschied is, nl. de 7^e, om bovengemelde reden onbruikbaar is, zoo nemen wij de 4^e, 2^e en 5^e waarneming op koolzuur. Wij substituëeren dan in (97) de getallen welke voor koolzuur gegeven zijn en achterevolgens:

$$1^{\circ} \tau = 7.795 \text{ en } \delta = 1.2244,$$

$$2^{\circ} \tau = 18.555 \text{ en } \delta = 1.1431,$$

$$3^{\circ} \tau = 87.930 \text{ en } \delta = 0.7033.$$

Men vindt dan

$$\text{voor } \tau = 7.795, \quad t \frac{d\tau}{dt} = 283.344;$$

$$\text{» } \tau = 18.555, \quad t \frac{d\tau}{dt} = 293.990;$$

$$\text{» } \tau = 87.930, \quad t \frac{d\tau}{dt} = 362.426.$$

Onderstellen wij dat de reeks (94) niet verder behoeft te worden voortgezet dan tot de tweede machten van τ , dan beperkt zich het tweede lid van (95) tot twee termen. Na substitutie van de bij elkander behoorende

waarden van τ en $t \frac{d\tau}{dt}$, verkrijgt men de drie vergelijkingen

$$1 = 275.549 x + 4356.57 y,$$

$$1 = 275.435 x + 10564.80 y,$$

$$1 = 274.496 x + 56004.55 y.$$

Hieruit vindt men door de methode der kleinste quadraten

$$x = 0.00362787 \quad \text{en} \quad y = 0.00000007431;$$

en verder

$$A = 275.08,$$

$$B = 0.997956,$$

$$C = 0.00002044.$$

De betrekking tusschen t en τ is alzoo

$$t = 275.08 + 0.997956 \tau + 0.00002044 \tau^2.$$

Berekent men hiermede de waarden van $t \frac{d\tau}{dt}$ voor de drie temperaturen der waarnemingen, dan vindt men

$$\text{voor } \tau = 7.795, \quad t \frac{d\tau}{dt} = 283.350;$$

$$\text{» } \tau = 18.555, \quad t \frac{d\tau}{dt} = 293.985;$$

$$\text{» } \tau = 87.930, \quad t \frac{d\tau}{dt} = 362.430;$$

welke waarden zeer goed met de onmiddellijk uit de waarnemingen berekende overeenstemmen.

Met de gevondene getallen stelt men de nu volgende tafel samen, welke voor temperaturen tusschen 0° en 100° Celsius de absolute met de gewone temperatuur vergelijkt.

τ	$t - 275.08$	$\tau - (t - 275.08)$	Afwijking volgens Thomson en Joule.
0	0.0000	0.0000	0.0000
10	9.9816	0.0184	
20	19.9637	0.0327	0.0298
30	29.9571	0.0429	
40	39.9509	0.0491	0.0403
50	49.9489	0.0511	
60	59.9509	0.0491	0.0366
70	69.9571	0.0429	
80	79.9637	0.0327	0.0233
90	89.9816	0.0184	
100	100.0000	0.0000	0.0000

De door ons gevondene afwijkingen zijn iets grooter dan die welke Thomson en Joule door eene andere methode gevonden hebben. De reden waarom wij de afwijkingen op gelijke afstanden van 50° gelijk vinden, ligt in den vorm waarin wij de absolute temperatuur in de gewone hebben uitgedrukt. Om tot eene behoorlijke vergelijking te geraken, ware het wenschelijk dat de proeven van Thomson en Joule op groote schaal herhaald werden, en dan bij geregeld uiteenlopende temperaturen. Uit ons onderzoek kan alleen blijken dat de afwijkingen tusschen de absolute en gewone temperatuur hoogstens $\frac{1}{20}$ graad Celsius bedragen tusschen 0° en 100° Celsius.

Voor de absolute temperatuur van het smeltpunt van ijs vinden wij

$$t_0 = 275.08$$

De uitzettings-coëfficiënt der ideale gassen zal dus zijn (§ 42)

$$\alpha = \frac{1}{t_0} = 0.0036353.$$

53. Ten slotte zullen wij nog de vergelijkingen (75) en (80) of (81) met elkaar verbinden om eene betrekking te vinden tusschen het mechanisch aequivalent der warmteëenheid en het verschil der specifieke warmten bij constante drukking en bij constant volumen van het gas. Wij schrijven daartoe (81) in den vorm

$$pv = \frac{p_0 v_0}{t} \left[l + m \frac{v_0}{v} + n \left(\frac{v_0}{v} \right)^2 + \left\{ \lambda + \mu \frac{v_0}{v} + \nu \left(\frac{v_0}{v} \right)^2 \right\} \tau \right],$$

waardoor men door vergelijking met (69) verkrijgt

$$R = \frac{p_0 v_0}{t} \left[l + m \frac{v_0}{v} + n \left(\frac{v_0}{v} \right)^2 + \left\{ \lambda + \mu \frac{v_0}{v} + \nu \left(\frac{v_0}{v} \right)^2 \right\} \tau \right]; \quad (98)$$

R is naar behooren in functie van het volumen en de absolute temperatuur uitgedrukt, daar wij de betrekking tusschen t en τ als bekend rekenen.

Uit (98) leidt men af

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} = & - \frac{p_0 v_0}{t^2} \left[l + m \frac{v_0}{v} + n \left(\frac{v_0}{v} \right)^2 + \left\{ \lambda + \mu \frac{v_0}{v} + \nu \left(\frac{v_0}{v} \right)^2 \right\} \tau \right] \\ & + \frac{p_0 v_0}{t} \left\{ \lambda + \mu \frac{v_0}{v} + \nu \left(\frac{v_0}{v} \right)^2 \right\} \frac{d\tau}{dt}, \end{aligned}$$

$$\frac{dR}{dv} = - \frac{p_0 v_0}{v t} \left[m \frac{v_0}{v} + 2 n \left(\frac{v_0}{v} \right)^2 + \left\{ \mu \frac{v_0}{v} + \nu \left(\frac{v_0}{v} \right)^2 \right\} \tau \right].$$

Substituëert men deze waarden in (75), dan vindt men

$$\begin{aligned}
 J(C-c) = & -\frac{p_0 v_0}{t} \left[l + 2m \frac{v_0}{v} + 3n \left(\frac{v_0}{v} \right)^2 + \right. \\
 & + \left. \left\{ \lambda + 2\mu \frac{v_0}{v} + 3\nu \left(\frac{v_0}{v} \right)^2 \right\} \tau \right] + \\
 & + 2p_0 v_0 \left\{ \lambda + \mu \frac{v_0}{v} + \nu \left(\frac{v_0}{v} \right)^2 \right\} \frac{d\tau}{dt} \dots \quad (99)
 \end{aligned}$$

Het verschil $(C-c)$ komt hier als functie van v en t te voorschijn, doch kan, zooals uit het tweede lid zelf te zien is, slechts weinig met v en t veranderen. Onderstelt men $v = v_0$ en $\tau = 0$, derhalve $t = t_0 = 275.08$, dan komt

$$\begin{aligned}
 J(C-c) = & -\frac{p_0 v_0}{t_0} (l + 2m + 3n) + \\
 & 2p_0 v_0 (\lambda + \mu + \nu) \left(\frac{d\tau}{dt} \right)_{\tau=0}.
 \end{aligned}$$

Uit (94) is $\frac{dt}{d\tau} = B + 2C\tau$, dus $\left(\frac{d\tau}{dt} \right)_{\tau=0} = \frac{1}{B}$,

en dus met inachtneming van (82)

$$J(C-c) = -\frac{p_0 v_0}{t_0} (1+a) + 2p_0 v_0 \frac{\alpha}{B} = p_0 v_0 \left(\frac{2\alpha}{B} - \frac{1+a}{t_0} \right).$$

Stelt men nog $C : c = k$, dan gaat deze nog over in

$$J C \frac{k-1}{k} p_0 v_0 \left(\frac{2\alpha}{B} - \frac{1+a}{t_0} \right) \dots \dots (100)$$

Hieruit kan men, J gegeven zijnde, k berekenen en omgekeerd;

men vindt voor dampkringslucht

uit $J = 423.55$, $k = 1.4178$;

en uit $k = 1.4081$, $J = 430.66$;

en voor koolzuurgas
 uit $J = 423.55,$ $k = 1.3069;$
 en uit $k = 1.27685,$ $J = 458.796.$

Alhoewel aan deze laatste berekeningen geen al te groot gewicht kan worden toegekend, schijnen zij er toch op te wijzen, dat de waarden welke wij voor het mechanisch aequivalent der warmteëenheid, en voor de verhouding k voor lucht en voor koolzuur aangenomen hebben, te klein zijn.

c. Vloeistoffen.

54. Wij onderstellen dat op eene vloeistof, in een vat besloten plotseling eene groote drukking wordt uitgeoefend, en dat de vloeistof daarbij geene warmte aan hare omgeving kan afgeven noch daarvan opnemen, en stellen ons voor de temperatuursverandering te bepalen, welke de vloeistof bij die drukverandering vertoonen moet. Wij nemen daartoe drukking en absolute temperatuur als onafhankelijk veranderlijken, en nemen ter vereenvoudiging aan dat absolute en gewone temperatuur hetzelfde verloop vertoonen, zoodat men schrijven kan

$$t = t_0 + \tau = 275.08 + \tau, \dots (101)$$

hetgeen wij in de volgende beschouwingen steeds zullen doen.

Dat de vloeistof warmte opneemt noch afgeeft, wordt uitgedrukt door de vergelijking (zie § 37)

$$dQ = - \frac{t}{J} \frac{\partial v}{\partial t} dp + C dt = 0,$$

waaruit
$$dt = \frac{t}{JC} \frac{\partial v}{\partial t} dp.$$

Stelt men $\frac{\partial v}{\partial t} = v_0 \delta$, waarin v_0 het volumen bij 0° Celsius, en δ de uitzettingscoëfficiënt, dan vindt men, tevens dt en dp door Δt en Δp vervangende,

$$\Delta t = \frac{t v_0 \delta}{J C} \Delta p; \dots (102)$$

of, zoo men de densiteit $\rho_0 = \frac{1}{v_0}$ wil invoeren,

$$\Delta t = \frac{t v_0}{J C \rho_0} \Delta p.$$

Deze formule is het eerst opgemaakt door Thomson (*) en door Joule experimenteel bevestigd (**).

Het blijkt dat de temperatuur van de vloeistof zal toenemen als δ positief is, en anders zal afnemen. Voor water tusschen 0° en 4° Celsius moet zich dus eene daling in temperatuur vertoonen.

Joule experimenteerde met twee vloeistoffen, nl. met water en met traan.

Volgens Kopp (***) is het volumen van het water bij τ° , dat bij 0° = 1 gesteld, tusschen 0° en 25° Celsius

$$v = 1 - 0.0461045 \tau + 0.0577183 \tau^2 - 0.073734 \tau^3,$$

en tusschen 25° en 50° Celsius

$$v = 1 - 0.0465415 \tau + 0.0577587 \tau^2 - 0.0735408 \tau^3;$$

waaruit de uitzettingscoëfficiënt tusschen 0° en 25° Celsius

$$\delta = -0.0461045 + 0.04154366 \tau - 0.0411202 \tau^2,$$

tusschen 25 en 50° Celsius

$$\delta = -0.0465415 + 0.04155174 \tau - 0.04106224 \tau^2;$$

(*) Proc. of the R. S. of London, 1857. p. 566.

(**) Phil. Trans of the R. S. of London, 1859. p. 133.

(***) Pogg. Ann. Bd. LXXII. s. 43.

en volgens Regnault is voor water

$$C = 1 + 0.00004 \tau + 0.0000009 \tau^2.$$

Met deze gegevens berekenen wij uit (102) de laatste kolom van de volgende tafel, welke de waarnemingen van Joule op water bevat.

τ	Δp	δ	C	Δt	
				Waargenomen.	Berekend.
1.20	261874	-0.04437	1.045	-0.0083	-0.0073
5.00	261874	+0.04133	1.032	+0.0044	+0.0023
11.69	261874	0.03104	1.037	0.0205	0.0184
18.00	261874	0.03181	1.001	0.0312	0.0327
18.76	261874	0.03189	1.001	0.0315	0.0343
30.00	261874	0.03305	1.002	0.0544	0.0573
31.37	161697	0.03317	1.002	0.0394	0.0370
40.40	161697	0.03388	1.003	0.0450	0.0466

Wij hadden bij de berekening C constant = 1 kunnen aannemen, dat kan blijkens de waarden welke C bij de verschillende temperaturen verkrijgt alleen van geringen invloed zijn op de laatste decimaal van de uitkomsten bij de hoogste temperaturen. Neemt men in aanmerking dat het meten van zulke geringe temperatuursverschillen aan betrekkelijk groote waarnemingsfouten moet onderhevig zijn, zoo moet men de overeenkomst tusschen waargenomen en berekende getallen als zeer voldoende achten.

Eene andere reeks van proefnemingen heeft Joule

met traan volbracht, waarvan hij door de mengingsmethode de specifieke warmte bepaalde op 0.5223 bij 16° 5 Celsius. De densiteit bij 0° was 0.915 malen die van water, derhalve voor onze berekening 915.0; de uitzettings-coëfficiënt was 0.0007582 bij 21° 3 Celsius.

Met deze gegevens verkrijgen wij de laatste kolom van de volgende tafel welke de waarnemingen van Joule op traan bevat.

τ	Δp	δ	C	Δt	
				Waargenomen.	Berekend.
16.00	81916	0.007582	0.5223	0.0792	0.0893
17.29	161697	0.007582	0.5223	0.1686	0.1771
16.27	261874	0.007582	0.5223	0.2663	0.2858

Ook hier komt de berekening tamelijk goed met de waarneming overeen.

Hoewel de formule (102) evenzeer van toepassing is op vaste lichamen en op gassen, zijn er nog geene proeven op die lichamen geschied om die formule te verifiëren. Voor gassen is het dan ook niet wel mogelijk om eene plotselinge verandering in drukking aan te brengen, en tevens het gas te beletten warmte naar buiten af te staan.

55. De formule (52)

$$C - c = \frac{t}{J} \frac{\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2}{\frac{\partial v}{\partial p}}$$

kan dienen om de specifieke warmte bij constant volumen van vaste lichamen en vloeistoffen te bepalen, wij stellen weer $\frac{\partial v}{\partial t} = v_0 \delta$ en $-\frac{\partial v}{\partial p} = v_0 \kappa$; κ is dan de coëfficiënt van samendrukbaarheid van het lichaam, of zoo men wil het omgekeerde van de elasticiteits-coëfficiënt. De vergelijking gaat dan over in

$$C - c = \frac{t v_0 \delta^2}{J \kappa} = \frac{t \delta^2}{J \kappa p_0} \dots \dots (103)$$

Passen wij deze formule toe op water en kwik bij 0° Celsius, zoo is voor water $\delta = -0.0^{\circ}61045$ en voor kwik $\delta = 0.0^{\circ}317905$. De coëfficiënt van samendrukbaarheid bij 0° C is, wanneer de gemiddelde dampkringsdrukking tot eenheid genomen wordt, voor water 0.0⁴503 en voor kwik 0.0²295; deze getallen moeten derhalve door het getal 10332.96 gedeeld worden om ze te herleiden tot de eenheid welke wij aangenomen hebben, nl. de drukking van een kilogram op een vierkante meter. De densiteit van water is in onze eenheden 1000, die van kwik 13596. De specifieke warmte voor water bij 0° is 1 en die van kwik stellen wij 0.03332. Met deze getallen vindt men uit (103)

voor water

$$C - c = 0.0^{\circ}3497, \quad c = 0.999503, \quad C : c = 1.00048;$$

en voor kwik

$$C - c = 0.005743, \quad c = 0.02758, \quad C : c = 1.208.$$

Volgens Kopp (t. a. p.) is voor water tusschen 75° en 100° Celsius

$$v = 1 + 0.0^{\circ}8645 \tau + 0.0^{\circ}31892 \tau^2 + 0.0^{\circ}24487 \tau^3,$$

waaruit

$$\delta = 0.0^{\circ}8645 + 0.0^{\circ}63784 \tau + 0.0^{\circ}73461 \tau^2;$$

voor $\tau = 100$ vindt men $\delta = 0.00079775$;
 voor $\tau = 100$ is de coëfficiënt α niet bekend, doch men weet dat deze voor stijgende temperaturen afneemt; voor 0° is deze 0.0^4503 , voor 53° 0.0^4441 (zie Wüllner, Experimentalphysik), wij stellen dus voor 100° ruw weg 0.0^4400 ; men vindt dan voor water bij 100° Celsius

$$C - c = 0.146, C = 1.013, c = 0.867, C : c = 1.168.$$

Hier is het verschil tusschen specifieke warmte bij constante drukking en constant volumen niet meer te verwaarloozen.

De samendrukbaarheid van vaste lichamen is te weinig bekend om daarop de formule te kunnen toepassen.

d. *Lichamen die gedeeltelijk in één en gedeeltelijk in een anderen agregatie-toestand verkeeren.*

56. Wij vangen aan met het voor de kennis van het stoomwerktuig gewichtigste geval; dat het te beschouwen lichaam bestaat uit water, gedeeltelijk in vloeibaren en gedeeltelijk in dampvormigen toestand, en zullen de waarden der coëfficiënten, welke in de op het tegenwoordige geval toepasselijke formules voorkomen, bepalen.

Regnault heeft door nauwkeurige proefnemingen bepaald hoeveel warmte vrijkomt, wanneer een kilogram verzadigde waterdamp van gegevene (gewone) temperatuur tot water verdicht, en vervolgens tot 0° Celsius afkoelt, en geeft daarvoor de empirische formule

$$606.5 + 0.305 \tau.$$

De hoeveelheid warmte, door Regnault gemeten, is natuurlijk dezelfde als die welke noodig is om een

kilogram water van 0° C. tot de gegevene temperatuur te verwarmen en vervolgens bij die temperatuur te verdampen, terwijl de ontstaande damp de bij die temperatuur behorende maximum-spanning overwint. Deze hoeveelheid wordt uitgedrukt door

$$\int_0^\tau c \, d\tau + \lambda = \int_{t_0}^t c \, dt + \lambda$$

waarbij weder $t = t_0 + \tau$ gesteld is, en c en λ dezelfde beteekenis van vroeger hebben. Men heeft dus door gelijkstelling

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\tau c \, d\tau + \lambda &= 606.5 + 0.305 \tau, \\ \int_{t_0}^t c \, dt + \lambda &= 606.5 + 0.305 (t - t_0). \end{aligned} \right\} \quad (104)$$

Het komt er dus vooreerst op aan c te bepalen, waarna men λ uit deze vergelijking berekenen kan. c is die hoeveelheid warmte, die men een kilogram water van τ° moet meedeelen om het 1° in temperatuur te doen stijgen; terwijl de drukking zoodanig toeneemt als de maximum-spanning van waterdamp bij diezelfde temperatuur. Deze hoeveelheid is spoedig gevonden door middel van formule (50), welke, na deeling door dt , onmiddellijk geeft

$$c = \frac{dQ}{dt} = C - \frac{t}{J} \frac{\partial v}{\partial t} \frac{dp}{dt} = C - \frac{t}{J} v_0 \delta \frac{dp}{dt}, \quad (105)$$

waarin δ de uitzettingscoëfficiënt bij de gegevene temperatuur, en $\frac{dp}{dt}$ uit de maximum-spanning als functie van de temperatuur moet worden afgeleid.

Daar ons voor δ geene waarden bekend zijn voor temperaturen boven 100° , bepalen wij ons tot het bereke-

nen van de waarde van c voor deze temperatuur. Uit de tafel van spanningen door Regnault opgemaakt (*), vindt men voor de temperatuur 100° C.

$$\frac{dp}{dt} = 27.21 \text{ millimeters kwik}$$

welk getal, met 13.596 vermenigvuldigd, in (105) moet gesubstituëerd worden. Verder is nog $t = 375.08$ en $\delta = 0.00079775$ (zie § 55). Met deze waarden verkrijgt men

$$C - c = 0.0002634$$

$$\text{verder is } C = 1 + 0.0^{44} \tau + 0.0^{69} \tau^2 = 1.013.$$

Men ziet hieruit dat men ten minste voor 100° C. zonder merkbare fout te maken $c = C$ stellen kan. Het verschil ($C - c$) zal echter voor toenemende temperaturen ook toenemen, daar $\frac{dp}{dt}$ bijna evenredig aan p zelf, en hoogst waarschijnlijk ook δ met hogere temperaturen sterk toeneemt. Wij zijn echter niet in staat verder te gaan daar ons de waarden van δ boven 100° C. ontbreken. In het vervolg nemen wij aan dat ook voor temperaturen niet al te ver boven 100° C. het verschil $C - c$ verwaarloosd mag worden, en stellen dan, waar wij het noodig hebben

$$c = C = 1 + 0.0^{44} \tau + 0.0^{69} \tau^2 \dots \quad (106)$$

Substituëert men dit in (104), dan komt

$$\tau + 0.0^{42} \tau^2 + 0.0^{63} \tau^3 + \lambda = 606 + 0.305 \tau,$$

waaruit

$$\lambda = 606.5 - 0.695 \tau - 0.0^{42} \tau^2 - 0.0^{63} \tau^3, \dots \quad (107)$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{d\lambda}{d\tau} = -0.695 - 0.0^{44} \tau - 0.0^{69} \tau^2. \quad (108)$$

*) Mém de l'Acad. de l'Inst. de France. T. XXI. 1847.

Uit (104) vindt men nog door differentiatie

$$c' + \frac{d\lambda}{dt} = 0.305, \dots (109)$$

welke laatste formule vrij is van allen twijfel omtrent de waarde van c' .

Uit (55) vindt men

$$h = c' + \frac{d\lambda}{dt} - \frac{\lambda}{t},$$

welke door substitutie van (107) en (109) overgaat in

$$h = 0.305 - \frac{1}{t_0 + \tau} (606.5 - 0.695 \tau + 0.042 \tau^2 - 0.063 \tau^3), \dots (110)$$

waaruit men de volgende waarden voor h berekent

voor $\tau = 0$	is $h = -1.900,$
» $\tau = 50$	» $h = -1.453,$
» $\tau = 100$	» $h = -1.125,$
» $\tau = 150$	» $h = -0.873,$
» $\tau = 200$	» $h = -0.672.$

Daar h negatief is zal men dus aan eene hoeveelheid verzadigden waterdamp warmte moeten onttrekken om deze op het punt van verzadiging te houden, terwijl men door samendrukking de temperatuur verhoogt. Omgekeerd zal men warmte moeten toevoegen om den damp op het verzadigingspunt te houden, terwijl het zich uitzet en daarbij in spanning en temperatuur afneemt. Zet verzadigde waterdamp zich uit zonder toevoeging van warmte, dan zal een gedeelte moeten neerslaan. Bij stoomwerktuigen die met expansie werken zal dus een gedeelte waterdamp verdichten. Deze uitkomsten zijn het eerst door

Clausius bekend gemaakt (*). De getallen welke wij geven verschillen iets van die welke Clausius gevonden heeft, daar deze $t_0 = 273$ heeft aangenomen.

Door middel van (56) heeft Clausius voor eene reeks van temperaturen van 58° tot 145° C. de dichtheid van verzadigden waterdamp berekend (**). De uitkomsten van die berekening stemmen veel nauwkeuriger overeen met de waarnemingen van Fairbairn en Tate dan met de vroeger aangenomene waarden, welke berekend werden in de onderstelling dat de waterdamp gehoorzaamde aan de wetten van Boyle en Gay-Lussac.

57. Thans gaan wij onderzoeken welken invloed de uitwendige drukking op het smeltpunt van vaste stoffen heeft, en stellen als voorbeeld het ijs. Dezelfde formules zijn toepasselijk, en de daarin voorkomende letters hebben de volgende beteekenis: λ is de latente smeltingswarmte, s het volumen der gewichtseenheid der stof in vloeibaren, s' hetzelfde voor den vasten toestand; c' en h de warmtehoeveelheden welke aan de gewichtseenheid, resp. in vasten en in vloeibaren toestand, moeten worden medegedeeld, om deze één graad in temperatuur te doen stijgen, terwijl de drukking volgens de te zoeken wet met de temperatuur verandert. Deze wet vindt men onmiddellijk uitgedrukt door formule (56) geschreven in den vorm

$$\frac{dp}{dt} = \frac{J\lambda}{tu} \quad \text{of} \quad \frac{dt}{dp} = \frac{tu}{J\lambda}$$

(*) Abh. über die Mech. Wärmeth. 1e Abth. s. 74.

(**) T. a. p. bl. 89.

$\frac{dt}{dp}$ zal met u positief of negatief zijn; voor ons geval dus negatief, daar het volumen van de gewichtseenheid ijs grooter is dan die voor water bij 0° C. Substituëert men $s = 0.001$, $s' = 0.001087$ en $\lambda = 79$, en vermenigvuldigt men de uitkomst nog met 10332.96 om de verandering van het smeltpunt door toename in drukking van een atmosfeer te verkrijgen, dan vindt men

$$\frac{dt}{dp} = -0.00739.$$

Thomson (*), die opzettelijke proeven omtrent dit onderwerp genomen heeft, vond uit die proeven het getal -0.0075 , welke uitkomst zeer nabij met onze berekende overeenstemt.

58. Uit (55) verkrijgt men

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{\lambda}{t} - c' + h,$$

welke de verandering van de smeltingswarmte met de temperatuur aangeeft zoodra c' en h bekend zijn. Deze grootheden zijn onmiddellijk door (105) gegeven, nl.

$$h = C - \frac{t}{J} v_0 \delta \frac{dp}{dt},$$

en

$$c' = C' - \frac{t}{J} v'_0 \delta' \frac{dp}{dt}.$$

Hierbij hebben de letters C , v_0 en δ betrekking op het water en C' , v'_0 en δ' op het ijs. Elimineeren wij nog $\frac{dp}{dt}$

(*) Proc. of the R. S. of Edinburgh, Febr. 1850.

door formule (56), dan gaan deze over in

$$h = C - \frac{\lambda v_0 \delta}{u}$$

$$c = C' - \frac{\lambda v'_0 \delta'}{u}$$

h is te berekenen, doch c niet, daar de uitzettingscoëfficient van water wel, die van ijs niet bekend is. Substituëert men $C = 1$, $\lambda = 79$, $s = v_0 = 0.001$, $u = s - s' = -0.000087$ en $\delta = -0.0461045$, dan vindt men

$$1 - h = 0.0554.$$

Komt men overeen de verschillen $C - h$ en $C' - c$ te verwaarloozen, dan kan men in (55) voor h en c de specifieke warmten van water en ijs in de plaats schrijven. Die van water is 1, en die van ijs is 0.48. De formule geeft dan

$$\frac{d\lambda}{dt} = 1 - 0.48 + \frac{79}{275} = 0.52 + 0.29 = 0.81.$$

Wordt dus door drukvermindering het smeltpunt van ijs verhoogd, dan neemt de smelttingswarmte toe.

e. *Uitstrooming van gassen en dampen.*

59. Bij het uitstroomen van een gas of een damp door eene opening in eene ruimte waar eene geringere spanning heerscht, onderscheiden wij drie verschillende perioden, waarin het gas of de damp zich achtereenvolgens bevindt. Een klein gedeelte van het gas (klein genoeg gedacht om het steeds als homogeen te kunnen beschouwen) begint van lieverlede in beweging te komen en zich uit te zetten, daarbij een voorgaand gedeelte voor zich uitdrijvende en evenzoo door een vol-

gend vooruitgestuwd wordende. Het ondervindt bij het vooruitstuwen van het voorgaand deel steeds eene reactie gelijk aan zijn eigen spankracht; het oefent op het voorgaand deel een arbeid uit en neemt evenzoo van het volgend deel eene zekere hoeveelheid arbeid op, welke laatste gedeeltelijk als levende kracht optreedt. Dit gedeelte dient dus niet ter vermeerdering van de energie (*) van het gedeelte gas dat wij beschouwen. Daar het gas of de damp bij die beweging geene warmte opneemt of afstaat, zoo moet de arbeid, welken het beschouwde deel van zijne omgeving opneemt, gelijk zijn aan de toename van de energie vermeerderd met de levende kracht welke het door zijne beweging verkrijgt. Deze eerste periode duurt zoolang totdat de spanning van het beschouwde gedeelte gas of damp gelijk geworden is aan die welke heerscht in de ruimte waarheen het stroomt, en het heeft tevens zijne grootste snelheid verkregen. In de tweede periode neemt de snelheid van beweging langzamerhand af, de levende kracht, welke het gas (in den vorm van beweging) bezit, zet zich om in warmte, en het gas verwarmt zich onder constante drukking totdat de snelheid is uitgeput. In de derde periode eindelijk vindt vermenging en herstelling van evenwicht van temperaturen plaats.

(*) Wij blijven onder energie van een lichaam verstaan wat wij er tot nog toe onder verstaan hebben: eene grootheid die afhangt van slechts twee grootheden, welke den toestand van het lichaam bepalen, en niet boven dien nog van de beweging welke het lichaam bezit, hoewel levende kracht eigenlijk ook als een vorm van energie moet beschouwd worden. Wij houden de oude beteekenis bij om de formules, welke wij voor de energie ontwikkeld hebben, ongewijzigd te kunnen bezigen.

Wij moeten echter opmerken dat de hier gegevene voorstelling van den gang der zaken slechts eene ruwe benadering zijn kan, omdat de drie perioden welke wij hier scherp van elkaar onderscheiden hebben in werkelijkheid waarschijnlijk in elkaar vloeien, zoodat zich reeds een gedeelte van de levende kracht in warmte omzet, vóórdat de spanning verminderd is tot die welke buiten heerscht, en er reeds vermenging van gassen zal plaats vinden, vóórdat de snelheid van het uitstroomende gas uitgeput is. Wij zullen onze formules echter opmaken in de onderstelling dat de drie genoemde perioden niet in elkaar vloeien.

Wij denken ons het oppervlak getrokken waarin de gasmolekulen zich bevinden bij den aanvang der eerste periode, en evenzoo het oppervlak waar zij zich bij het einde dierzelfde periode bevinden. Stel v_1 , p_1 , t_1 zijn volumen, spanning en absolute temperatuur van de gewichtseenheid in het eerste oppervlak, en v_2 , p_2 en t_2 dezelfde grootheden in het tweede oppervlak; p_2 is dan de spanning in de ruimte waarheen het gas of de damp uitstroomt; zij verder w de snelheid waarmede het gas dit tweede oppervlak passeert, dan is $\frac{w^2}{2g}$ de levende kracht welke aan de gewichtseenheid van het doorstroomende gas wordt meegedeeld, wanneer g de versnelling van de zwaartekracht voorstelt. Denken wij ons dat eene gewichtseenheid doorstroomt, dan verricht het doorstroomende gas in het eerste oppervlak een arbeid $- p_1 v_1$, en in het tweede een arbeid $+ p_2 v_2$, en er ontstaat eene hoeveelheid levende kracht $\frac{w^2}{2g}$. Stellen wij nog de energie in

het eerste en tweede oppervlak achtereenvolgens U_1 en U_2 , dan heeft men

$$p_1 v_1 - p_2 v_2 = U_2 - U_1 + \frac{w_2}{2g},$$

of
$$\frac{w_2}{2g} = U_1 - U_2 + p_1 v_1 - p_2 v_2 \quad \dots (111)$$

Hierin zijn p_1 , v_1 , U_1 en p_2 als bekend te beschouwen, v_2 kan dan gevonden worden uit de vergelijking van de adiabatistische lijn, daar de toestandsverandering van ieder gedeelte gas op damp, terwijl het zich van het eerste oppervlak tot het tweede beweegt, door die vergelijking bepaald wordt; daarna is U_2 als functie van p_2 en v_2 bekend, en eindelijk wordt w door middel van boven gevondene vergelijking gegeven.

Gedurende de tweede periode blijft de spanning constant p_2 . Stellen wij volumen, absolute temperatuur en energie van de gewichtseenheid aan het einde van deze periode door v_3 , t_3 en U_3 voor, dan geeft ons vergelijking (22) § 17, in aanmerking nemende dat p constant gelijk p_2 blijft

$$U_3 - U_2 = \int_{t_2}^{t_3} \left(Jc - p \frac{\partial v}{\partial t} \right)_{p_2} dt.$$

Deze toename der energie is gelijk aan de levende kracht waaruit zij ontstond, derhalve

$$\frac{w_2}{2g} = U_3 - U_2 = \int_{t_2}^{t_3} \left(Jc - p \frac{\partial v}{\partial t} \right)_{p_2} dt. \quad (112)$$

Uit deze vergelijkingen en die van het gas zijn dan de grootheden U_3 , v_3 en t_3 achtereenvolgens te berekenen.

Voor een ideaal gas is

$$U_1 - U_2 = Jc (t_1 - t_2), \quad U_3 - U_2 = Jc (t_3 - t_2)$$

$$p_1 v_1 - p_2 v_2 = R (t_1 - t_2).$$

Hierdoor gaan (111) en (112) over in

$$\frac{w_2}{2g} = (Jc + R) (t_1 - t_2) = JC (t_1 - t_2),$$

en
$$\frac{w_2}{2g} = Jc (t_3 - t_2).$$

De vergelijking der adiabatische lijn, in p en t als veranderlijken uitgedrukt, geeft (zie § 46)

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{t_2}{t_1} \right)^{\frac{k}{k-1}},$$

waaruit
$$t_2 = t_1 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}}.$$

Wij vinden derhalve

$$\frac{w_2}{2g} = JC t_1 \left\{ 1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right\},$$

en
$$t_3 = t_2 + \frac{1}{Jc} \frac{w_2}{2g} = t_1 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} +$$

$$+ kt_1 \left\{ 1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right\} = t_1 \left\{ k - (k-1) \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right\}.$$

60. Passen wij onze beschouwing nog toe op verzadigden damp, welke, met eene hoeveelheid vloeistof in fijn verdeelden toestand vermengd, uitstroomt. Stellen wij den toestand van den damp in het vat, waaruit het stroomt, bepaald door de gegevens x_1 en t_1 , waardoor ook p_1 bepaald is. Na het einde van de eerste periode zijn deze grootheden overgegaan in x_2 , t_2 en p_2 , waar t_2 door p_2 bepaald wordt. Men heeft nu volgens vergelijking (30) in (111) te stellen

$$U_1 - U_2 = J(\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2) - (p_1 u_1 x_1 - p_2 u_2 x_2) + \\ + \int_{t_2}^{t_1} \left(Jc' - p \frac{ds'}{dt} \right) dt,$$

en volgens (23)

$v_1 = s'_1 + x_1 u_1$ en $v_2 = s'_2 + x_2 u_2$,
waarin de beteekenis van de indices van zelf duidelij-
k is.

Vergelijking (111) gaat dan over in

$$\frac{w_2}{2g} = J(\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2) - (p_1 u_1 x_1 - p_2 u_2 x_2) + \\ + \int_{t_2}^{t_1} \left(Jc' - p \frac{ds'}{dt} \right) dt + \\ + p_1 (s'_1 + x_1 u_1) - p_2 (s'_2 + x_2 u_2) \\ = J(\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2) + p_1 s'_1 - p_2 s'_2 + \\ + \int_{t_2}^{t_1} Jc' dt - \int_{t_2}^{t_1} p \frac{ds'}{dt} dt.$$

De laatste term bij gedeelten integreerende
vindt men

$$\int_{t_2}^{t_1} p \frac{ds'}{dt} = p_1 s'_1 - p_2 s'_2 - \int_{t_2}^{t_1} s' \frac{dp}{dt} dt,$$

waardoor de voorgaande overgaat in

$$\frac{w_2}{2g} = J(\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2) + \int_{t_2}^{t_1} \left(Jc' + s' \frac{dp}{dt} \right) dt. \quad (113)$$

De waarde van x_2 welke hierin voorkomt moet ge-
vonden worden uit de vergelijking der adiabatische
lijn (57). Deze vergelijking geeft voor ons tegen-
woordig geval

$$\lambda_2 x_2 = \frac{t_2}{t_1} \lambda_1 x_1 - t_2 \int_{t_1}^{t_2} c' \frac{dt}{t}.$$

Wij onderstellen dat de waarde van x_2 welke hieruit gevonden wordt, kleiner dan, of hoogstens gelijk aan de eenheid is, daar wij in het tegengestelde geval niet meer met verzadigen, maar met oververhitten damp te doen zouden krijgen, en daardoor genoodzaakt zouden worden om de eerste periode in twee deelen te splitsen, en op het tweede deel de formules van de vorige § toe te passen.

Aan de laatste vergelijking geven wij nog een anderen vorm door in plaats van c' de waarde in te voeren, welke men uit (55) vindt. De integraal van den laatsten term wordt daardoor

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} c' \frac{dt}{t} &= \int_{t_1}^{t_2} h \frac{dt}{t} - \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{t} \frac{d\lambda}{dt} - \frac{\lambda}{t} \right) dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} h \frac{dt}{t} - \frac{\lambda_2}{t_2} + \frac{\lambda_1}{t_1}. \end{aligned}$$

Door substitutie hiervan gaat bovenstaande vergelijking over in

$$(1 - x_2) \lambda_2 = \frac{t_2}{t_1} (1 - x_1) \lambda_1 + t_2 \int_{t_1}^{t_2} \frac{h}{t} dt.$$

Was de damp aanvankelijk verzadigd en droog, zoo is $x_1 = 1$ en het tweede lid reduceert zich tot den tweeden term. De bovenste grens van de integraal in dien term noodwendig kleiner zijnde dan de onderste, zal die term in teeken verschillen met h , aannemende dat h binnen de grenzen t_2 en t_1 niet van teeken verandert. Is h negatief, dan vindt men voor $1 - x_2$ eene positive uitkomst, en x_2 wordt kleiner dan de eenheid; dit is voor waterdamp, althans voor de temperaturen

voor welke wij h bij behadering berekend hebben, het geval. Is h positief dan vinden wij voor x_2 eene waarde die grooter dan de eenheid is, hetgeen beteekent dat de damp oververhit wordt en de formules van de vorige § moeten worden toegepast.

Gedurende de tweede periode zet zich de levende kracht weder in warmte om. De spanning en dus ook de temperatuur blijven hierbij constant. De in warmte omgezette levende kracht doet dus niets anders dan een gedeelte der mechanisch meegevoerde vloeistof verdampen; hierbij kan zich echter het geval voordoen dat de uit de levende kracht gewonnen warmte grooter is dan de tot de verdamping noodige warmte. De overmaat zal dan den damp verder verwarmen, en men verkrijgt damp in oververhitten toestand.

De hoeveelheid warmte, welke noodig is om bij de temperatuur t_2 het vloeibare gedeelte $1 - x_2$ te verdampen, is uitgedrukt door

$$Q = \int_{x_2}^1 \lambda_2 dx = \lambda_2 (1 - x_2).$$

De warmte, welke uit de levende kracht $\frac{w_2}{2g}$ gewonnen wordt, is

$$\frac{w_2}{2gJ};$$

de overmaat is dus

$$\begin{aligned} \frac{w_2}{2gJ} - Q &= \lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2 + \frac{1}{J} \int_{t_2}^{t_1} \left(Jc' + s' \frac{dp}{dt} \right) dt - \lambda_2 (1 - x_2) \\ &= \lambda_1 x_1 - \lambda_2 + \frac{1}{J} \int_{t_2}^{t_1} \left(Jc' + s' \frac{dp}{dt} \right) dt. \quad (114) \end{aligned}$$

Is het tweede lid positief, dan zal men in het laatste

geval verkeerren, en de uitstroomende damp is op genoegzamen afstand van de opening oververhit; is het daarentegen negatief, dan kan niet al de meegevoerde vloeistof verdampen, en de uitvloeiende damp blijft nat; men stelle dan

$$\frac{w_2}{2gJ} = \int_{x_2}^{x_3} \lambda_2 dx = \lambda_2 (x_3 - x_2),$$

en berekene daaruit x_3 , dan is $1 - x_3$ de overgeblevene hoeveelheid in vloeibaren toestand aan het einde van de tweede periode. Men verkrijgt dan door van (113) gebruik te maken

$$J\lambda_2 x_2 = J\lambda_1 x_1 + \int_{t_2}^{t_1} \left(Jc' + s' \frac{dp}{dt} \right) dt \quad . \quad (115)$$

Was de damp aanvankelijk droog en dus $x_1 = 1$, zoo toont vergelijking (114) aan dat er werkelijk een overmaat van warmte ontstaat, en dat derhalve op eenigen afstand van de opening de uitstroomende damp oververhit moet zijn.

Daar het omzetten van arbeid in levende kracht eene omkeerbare, en het omzetten van arbeid in warmte eene niet-omkeerbare verandering is, zoo is ook het omzetten van levende kracht in warmte eene niet-omkeerbare verandering. Het uitstroomen van een gas of een damp door eene opening uit eene ruimte waar grootere, in eene ruimte waar kleinere spanning heerscht, is een (in de tweede periode) niet-omkeerbaar verschijnsel.

f. *De calorische werktuigen.*

61. Door calorische werktuigen verstaan wij die werktuigen welke ten doel hebben warmte in arbeid om te zetten. Hiertoe behooren onder anderen de werktuigen met verwarmde lucht (van Stirling en Ericson), en het stoomwerktuig in alle mogelijke gedaanten. In al die werktuigen is eene stof aan een kringloop onderworpen waarbij deze beurtelings warmte ontvangt en weder afstaat, en beurtelings zich uitzet en weder tot haar vorig volumen terug keert. De al of niet veranderlijke temperatuur, waarbij de stof warmte opneemt, is grooter* dan de al of niet veranderlijke temperatuur waarbij de stof weder warmte afstaat; dit is eene noodzakelijke voorwaarde voor het leveren van arbeid. De wijze waarop de achtereenvolgende uitzettingen en inkrimpingen met de verwarmingen en afkoelingen samenhangen, bepaalt den aard van den kringloop dien de stof maakt. De voor de wiskundige behandeling eenvoudigste kringloop is de omkeerbare van Carnot, met welks beschouwing wij ons tot hiertoe voornamelijk hebben beziggehouden, en voor welke wij in § 27 een nuttig effect gevonden hebben uitgedrukt door

$$\frac{t_1 - t_0}{t_1},$$

waarin t_1 en t_0 de absolute temperaturen voorstellen van de warmtebronnen waaraan de veranderlijke stof warmte ontleent en afstaat, terwijl wij aantoonde dat door geen anderen kringloop een grooter nuttig effect kon worden opgeleverd.

Alvorens tot de behandeling van bovengenoemde

werktuigen over te gaan zullen we een en ander opmerken over niet-omkeerbare kringloopen, en de integraal

$$\int \frac{dQ}{t},$$

welke, over een geheelen omkeerbaren kringloop uitgestrekt, de waarde nul heeft (zie § 29).

Wij noemen een kringloop niet-omkeerbaar, wanneer niet alle toestandsveranderingen, welke in dien kringloop voorkomen, omkeerbaar zijn. Twee soorten van niet-omkeerbare veranderingen kunnen in aanmerking komen: 1^e het door geleiding of straling overgaan van warmte van een lichaam van hogere op een ander van lagere temperatuur, 2^e het stroomen van gas of damp door buizen of openingen uit eene ruimte in eene andere, terwijl in de eerste ruimte eene grootere spanning heerscht dan in de tweede. Wij zullen van beide soorten van verandering den invloed nagaan op de waarde van bovengenoemde integraal.

Wanneer het lichaam, dat den kringloop maakt, op verschillende punten van dien kringloop warmtehoeveelheden ontleent en afstaat aan warmtebronnen, welke met dat lichaam in temperatuur verschillen (men denke slechts aan het vuur dat de warmte produceert en het gas of de damp welke die warmte opneemt), dan kan men in de integraal $\int \frac{dQ}{t}$ voor de temperatuur t twee verschillende waarden aannemen, namelijk die van het lichaam zelf, of die van de warmtebron. Neemt men de temperatuur van het lichaam zelf, dan verhindert ons niets om de warmte-

bronnen, welke met het lichaam in temperatuur verschillen, vervangen te denken door zulke, welke in temperatuur daarmede overeenkomen, en het is duidelijk dat men dan den kringloop tot een omkeerbaren gemaakt heeft, ten minste in geval geene onomkeerbare veranderingen daarin voorkomen van de soort, welke wij in de tweede plaats genoemd hebben. De waarde van de integraal zal dan nul zijn. Neemt men daarentegen de temperaturen van de warmtebronnen, waarmede het lichaam in warmtewisseling staat, dan zal men voor de hoeveelheden warmte welke opgenomen worden (d. i. voor positive elementen van de integraal), temperaturen moeten substituëeren welke grooter zijn dan die van het lichaam, en voor de afgegevene hoeveelheden (d. i. voor negative elementen van de integraal), moet men temperaturen substituëeren, welke kleiner zijn dan die van het lichaam; in beide gevallen merkt men de strekking op om de waarde van die elementen, en dus ook die van de integraal, algebraïsch kleiner te maken; deze laatste zal daardoor eene negatieve waarde verkrijgen.

Bij onomkeerbare veranderingen welke wij in de tweede plaats genoemd hebben, zagen wij dat steeds eene zekere hoeveelheid levende kracht (\equiv arbeidsvermogen) werd omgezet in warmte, welke door het lichaam werd opgenomen. Brengt men deze hoeveelheid warmte als opgenomen in rekening met de temperatuur waarbij die verandering van levende kracht in warmte plaats vindt, en substituëert men voor de andere opgenomene en afgegevene hoeveelheden warmte de temperaturen welke het lichaam tijdens de opname of afgave bezit, dan moet de waarde

van de integraal $\int \frac{dQ}{t}$ wederom nul zijn. Laat men die uit levende kracht ontstane warmte buiten rekening, dan laat men eenige positive elementen uit de integraal weg, en deze moet eene negatieve waarde verkrijgen. Substituëert men bovendien nog de temperaturen van de warmtebronnen, dan zal de integraal algebraïsch nog kleiner worden, en dus negatief blijven. Alzoo: wanneer een lichaam een niet-omkeerbaren kringloop maakt, waarin beide bovengenoemde soorten van niet-omkeerbare veranderingen kunnen voorkomen, en men brengt in de integraal $\int \frac{dQ}{t}$ alleen de warmtehoeveelheden in rekening welke het lichaam van andere lichamen opneemt, en aan andere lichamen afstaat, en men substituëert de temperaturen van deze lichamen, dan verkrijgt deze integraal eene negatieve waarde.

Is dus N eene positive grootheid, dan is voor een niet-omkeerbaren kringloop

$$\int \frac{dQ}{t} = - N. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (116)$$

62. Onderstelt men dat het veranderlijke lichaam, terwijl het eene temperatuur t_0 bezit, eene warmtehoeveelheid Q_0 afstaat aan een lichaam van dezelfde temperatuur, dan geeft deze hoeveelheid in de integraal een term $-\frac{Q_0}{t_0}$, en men verkrijgt

$$\int \frac{dQ}{t} - \frac{Q_0}{t_0} = -N,$$

waarin de integratie zich natuurlijk nog maar over de overige hoeveelheden opgenomene en afgegevene warmte moet uitstrekken. Men vindt hieruit

$$Q_0 = t_0 \int \frac{dQ}{t} + t_0 N.$$

Is Q_0 de eenige warmtehoeveelheid welke wordt afgegaan en Q_1 de totale hoeveelheid opgenomene warmte, dan is de geleverde arbeid

$$W = J (Q_1 - Q_0) = J \left\{ Q_1 - t_0 \int_0^{Q_1} \frac{dQ}{t} - t_0 N \right\}, \quad (117)$$

waarin zich de integratie alleen over de opgenomene hoeveelheid warmte uitstrekt, hetgeen wij door het schrijven van grenzen bij het integraalteeken hebben aangeduid. Komen er in den kringloop geene niet-omkeerbare veranderingen van de tweede soort voor, en substituëert men in de integraal de temperatuur van het veranderlijke lichaam, dan is $N = 0$, en de vergelijking wordt

$$W = J \left\{ Q_1 - t_0 \int_0^{Q_1} \frac{dQ}{t} \right\} \dots \quad (118)$$

Uit (117) vinden wij voor het nuttig effect van het werktuig, dat door het veranderlijke lichaam gedreven wordt,

$$\frac{Q_1 - Q_0}{Q_1} = 1 - \frac{t_0}{Q_1} \int_0^{Q_1} \frac{dQ}{t} - \frac{t_0}{Q_1} N. \quad (119)$$

Is nu de hoogste temperatuur van het lichaam waarbij het warmte opneemt t_1 , en onderstellen wij dat alle warmte bij die temperatuur opgenomen wordt, dan

is de waarde van de in (119) voorkomende integraal

$\frac{Q_1}{t_1}$, en men vindt

$$\frac{Q_1 - Q_0}{Q_1} = 1 - \frac{t_0}{t_1} - \frac{t_0}{Q_1} N = \frac{t_1 - t_0}{t_1} - \frac{t_0}{Q_1} N.$$

De grootheid N in den laatsten term kan alleen dan eene positieve waarde verkrijgen wanneer in den kringloop veranderingen van de tweede soort voorkomen, daar wij de veranderingen van de eerste soort tot omkeerbare hebben teruggebracht. Wordt $N = 0$, d. i. komen er ook geene veranderingen van de tweede soort voor, dan wordt de kringloop een van Carnot, en de waarde van het nuttig effect zooals het behoort gelijk aan de vroeger verkregene uitkomst; komen er daarentegen wel veranderingen van de tweede soort voor, dan is N positief, en wij verkrijgen een kleiner nuttig effect.

Onderstellen wij nu dat niet alle warmte door het lichaam wordt opgenomen bij de hoogste temperatuur t_1 , dan moet men in de integraal van vergelijking (119) voor sommige elementen voor t kleinere waarden substituëeren; hierdoor wordt de waarde van de integraal grooter en de geheele uitkomst kleiner. Men vindt dus in dat geval voor het nuttig effect eene kleinere waarde dan die voor den kringloop van Carnot, ook dan wanneer $N = 0$ is.

Op dergelijke wijze als wij hier gedaan hebben, kunnen wij nagaan wat het gevolg zal zijn van de omstandigheid dat niet de geheele hoeveelheid afgestane warmte bij de temperatuur t_0 , doch een gedeelte daarvan bij hoogere temperaturen wordt afgestaan,

en wij zullen vinden dat ook dan de waarde van het nuttig effect verminderd wordt.

Brengt men nu nog, om het grootst mogelijk theoretisch nuttig effect te bepalen, de temperaturen van de warmtebronnen in rekening in plaats van de temperaturen welke het veranderlijke lichaam verkrijgt, dan wordt de verhouding tusschen het werkelijk verkregen nuttig effect en het grootst mogelijke nog nadeeliger.

62. Het schijnt dus dat door geen anderen kringloop dan door dien van Carnot het nuttig effect

$$\frac{Q_1 - Q_0}{Q_1} = \frac{W}{JQ_1}$$

tot de waarde aan dien kringloop eigen kan opgevoerd worden, en dit is werkelijk het geval zoolang wij het nuttig effect blijven bepalen op de wijze zooals wij tot nu toe gedaan hebben, namelijk door voor Q_1 in den noemer de totale hoeveelheid warmte, welke gedurende den kringloop wordt opgenomen, te substituëeren. Wanneer wij echter in plaats van Q_1 in den noemer slechts een gedeelte van de totale hoeveelheid opgenomene warmte behoeven in rekening te brengen, hetgeen, zooals wij zien zullen, in sommige gevallen werkelijk veroorloofd is, dan kunnen wij voor het werkelijk verkregen nuttig effect eene grootere uitkomst verkrijgen, en onder sommige omstandigheden is het zelfs mogelijk de waarde aan den kringloop van Carnot eigen te bereiken.

Stellen wij weder t_1 en t_0 de hoogste en laagste temperatuur welke het gas (*) aanneemt, dan zal de geheele

(*) Wij schrijven in het vervolg *gas* in plaats van *veranderlijk lichaam*.

kromme, welke den kringloop voorstelt tusschen de twee isothermen $t = t_0$ en $t = t_1$ gelegen zijn. Zij de figuur ABCD (fig. 6) de graphische voorstelling van dien

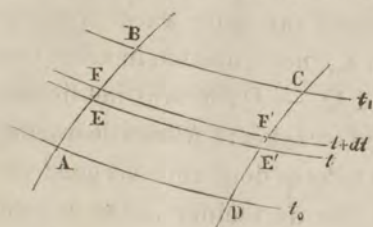


Fig. 6.

kringloop, waarin wij onderstellen dat geene niet-omkeerbare veranderingen van de tweede soort voorkomen. Terwijl het gas den weg A B aflegt neemt het warmte op

van eene bron K, van welke wij onderstellen dat het op verschillende punten, waarmede het gas in aanraking komt, verschillende temperaturen bezit, tusschen t_0 en t_1 gelegen, en dat er geene warmtegeleiding tusschen de verschillende deelen van dat lichaam bestaat. Daarna zet het gas zich uit onder constante temperatuur t_1 terwijl het van eene warmtebron K_1 eene hoeveelheid warmte Q_1 opneemt. Van C tot D staat het gas warmte af aan verschillende punten van een lichaam K' , waaromtrent wij hetzelfde onderstellen als omtrent K. Eindelijk doorloopt het gas den weg DA, daarbij eene warmtehoeveelheid Q_0 aan een lichaam K_0 van de temperatuur t_0 afstaande. Onderstellen wij nu dat het lichaam K' hetzelfde lichaam is als K, dan zal het gas aan de verschillende deelen van dat lichaam eerst warmte onttrekken en daarna weder afstaan, en onderstellen wij bovendien dat ieder deel evenveel warmte terug ontvangt als er door het gas aan ontnomen was, dan zullen alle deelen van het lichaam K na afloop van een kringloop evenveel warmte bevatten als vroeger, en weer in staat zijn om het gas

een volgenden kringloop op dezelfde wijze te doen maken. Het resultaat van iederen gemaakten kringloop is dus het onttrekken van eene warmtehoeveelheid Q_1 aan het lichaam K_1 , het afstaan van eene warmtehoeveelheid Q_0 aan een lichaam K_0 , het omzetten in arbeid van eene warmtehoeveelheid $Q_1 - Q_0$, terwijl het lichaam K tot denzelfden toestand terugkeert. Alleen de warmtehoeveelheid Q_1 moet nu telkens door vuur vergoed worden, deze hoeveelheid, die nu kleiner is dan de totale hoeveelheid warmte welke gedurende een kringloop wordt opgenomen, stelt het warmteverbruik gedurende iederen kringloop voor, en wij mogen voor het nuttig effect van het werktuig schrijven

$$\frac{W}{JQ_1} = \frac{Q_1 - Q_0}{Q_1}$$

waarin Q_1 eene andere beteekenis heeft als vroeger.

64. Wij gaan thans het verband opsporen dat er tusschen de twee kromme lijnen AB en DC bestaat. Wij nemen daartoe v en t als onafhankelijk veranderlijken aan, en stellen voor de vergelijking van AB

$$v = \varphi(t),$$

en voor die van DC

$$v' = \psi(t),$$

wanneer wij voor het veranderlijk volumen van het gas, terwijl het den weg CD aflegt, v' schrijven.

Trekken wij nog twee isothermen voor de temperaturen t en $t + dt$, welke stukken EF en $E'F'$ van de lijnen AB en DC afsnijden.

De warmtehoeveelheid welke het gas opneemt wanneer het volumen met dv en de temperatuur met dt toeneemt is

$$dQ = Mdv + Ndt$$

waarin M en N de waarden hebben welke wij in § 16 of § 36 gevonden hebben. Deze vergelijking passen wij toe op het boogje EF en op het boogje $E'F'$, en wij zullen de waarden van M en N in het punt E' door M' en N' aanduiden. Voor dv moeten wij nu voor het boogje EF schrijven $\frac{d\varphi}{dt}dt$, en voor het boogje $E'F'$ $\frac{d\psi}{dt}dt$. Men vindt dan voor de warmtehoeveelheid welke het gas opneemt, wanneer dit het boogje EF doorloopt

$$dQ = \left(M \frac{d\varphi}{dt} + N \right) dt,$$

en voor de warmtehoeveelheid welke het opneemt terwijl het gas het boogje $F'F'$ doorloopt, welke gelijk is aan de warmtehoeveelheid welke het afstaat bij het doorlopen van het boogje $F'E'$ (tegengesteldend zin)

$$dQ' = \left(M' \frac{d\psi}{dt} + N' \right) dt.$$

Deze twee hoeveelheden moeten nu aan elkander gelijk zijn, men heeft dus

$$M \frac{d\varphi}{dt} + N = M' \frac{d\psi}{dt} + N' \quad . \quad . \quad (120)$$

uit welke vergelijking ψ te vinden is wanneer φ gegeven is en omgekeerd. Men moet daartoe M en N in functie van v en t uitdrukken, en v vervangen door φ , evenzoo M' en N' in v' en t , en v' vervangen door ψ , men heeft dan alleen met t als onafhankelijk veranderlijke te doen.

Stellen wij, om tot eene oplossing van deze vergelijking te geraken

$$M = F(v, t) = F(\varphi, t) \text{ en dus } M' = F(v', t) = F(\psi, t),$$

$$N = f(v, t) = f(\varphi, t) \text{ en dus } N' = f(v', t) = f(\psi, t),$$

dan gaat de vergelijking, na vermenigvuldiging met dt , over in

$$F(\varphi, t) d\varphi + f(\varphi, t) dt = F(\psi, t) d\psi + f(\psi, t) dt.$$

Volgens § 31 is ieder lid van deze vergelijking, na door t gedeeld te zijn een volkomen differentiaal. Men vindt door integratie overkomstig formule (37)

$$\begin{aligned} & \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{F(\varphi, t_0)}{t_0} d\varphi + \int_{t_0}^t \frac{f(\varphi, t)}{t} dt = \\ & = \int_{\psi_0}^{\psi} \frac{F(\psi, t_0)}{t_0} d\psi + \int_{t_0}^t \frac{f(\psi, t)}{t} dt. \end{aligned}$$

Bij de integratie van den tweeden term van ieder lid zijn φ en ψ als constanten te beschouwen; φ_0 beteekent de waarde van φ voor $t = t_0$ en ψ_0 de waarde van ψ voor $t = t_0$; is φ en dus ook φ_0 gegeven, dan is ψ_0 als willekeurige constante te beschouwen. Voeren wij eene nieuwe functie F_1 in, bepaald door de quadratuur

$$F_1(v, t) = \int F(v, t) dv,$$

genomen bij constante t , dan gaat de vergelijking over in

$$\begin{aligned} \frac{1}{t_0} \{F_1(\varphi, t_0) - F_1(\varphi_0, t_0)\} &= \frac{1}{t_0} \{F(\psi, t_0) - F(\psi_0, t_0)\} + \\ &+ \int_{t_0}^t \frac{f(\psi, t) - f(\varphi, t)}{t} dt. \end{aligned}$$

Den laatsten term van het tweede lid herleiden wij wij verder door gebruik te maken van vergelijking (42), welke de integreerbaarheid onzer vergelijking uit-

drukt. Deze gaat door de gemaakte substitutie en verschikking der termen over in

$$\frac{d f (v, t)}{d v} = \frac{d F (v, t)}{d t} - \frac{F (v, t)}{t}$$

Deze integreeren wij naar v tusschen de grenzen $v = \varphi$ en $v = \psi$, waardoor wij vinden

$$\begin{aligned} f(\psi, t) - f(\varphi, t) &= \frac{d}{dt} \int_{\varphi}^{\psi} F(v, t) dv - \frac{1}{t} \int_{\varphi}^{\psi} F(v, t) dv \\ &= \left\{ \frac{d F_1(\psi, t)}{dt} - \frac{1}{t} F_1(\psi, t) \right\} - \left\{ \frac{d F_1(\varphi, t)}{dt} - \frac{1}{t} F_1(\varphi, t) \right\} dt. \end{aligned}$$

Na deeling door t en integratie naar t vinden wij

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \frac{f(\psi, t) - f(\varphi, t)}{t} dt &= \left\{ \frac{F_1(\psi, t)}{t} - \frac{F_1(\psi, t_0)}{t_0} \right\} - \\ &\quad - \left\{ \frac{F_1(\varphi, t)}{t} - \frac{F_1(\varphi, t_0)}{t_0} \right\}. \end{aligned}$$

Voert men eindelijk deze waarde in, dan komt, na weglating der termen die elkaar opheffen

$$\frac{F_1(\psi, t) - F_1(\varphi, t)}{t} = \frac{F_1(\psi, t_0) - F_1(\varphi, t_0)}{t_0} = \text{Constant} \quad (121)$$

welke de oplossing der differentiaalvergelijking (120) is.

Stelt men nog $t = t_1$ en de waarden van φ en ψ voor deze waarde van t , resp. φ_1 en ψ_1 , dan vindt men nog

$$\frac{F_1(\psi_1, t_1) - F_1(\varphi_1, t_1)}{t_1} = \frac{F_1(\psi_0, t_0) - F_1(\varphi_0, t_0)}{t_0}. \quad (122)$$

welke eene betrekking tusschen de volumina in de punten A, B, C en D (fig. 6) geeft.

65. In de integraal $\int \frac{dQ}{t}$ komen vooreerst in aan-

merking de hoeveelheden Q_1 en Q_0 , van welke de eerste bij temperatuur t_1 is opgenomen en de tweede bij de temperatuur t_0 is afgestaan, hierdoor verkrijgt men de twee termen

$$\frac{Q_1}{t_1} \text{ en } -\frac{Q_0}{t_0}.$$

De elementen welke door de lijn AB worden gegeven, worden een voor een opgeheven door de elementen welke de lijn CD bijdraagt, zooals wordt uitgedrukt door de differentiaal vergelijking (120) nadat zij door t gedeeld is. Men verkrijgt dus door toepassing van (35)

$$\frac{Q_1}{t_1} - \frac{Q_0}{t_0} = 0;$$

waaruit

$$\frac{Q_1 - Q_0}{Q_1} = \frac{t_1 - t_0}{t_0},$$

waaruit blijkt, dat het nuttig effect van dezen kringloop gelijk is aan dat van den kringloop van Carnot.

Tot dezelfde uitkomst kunnen wij ook aldus geraken.

De hoeveelheid warmte welke het lichaam opneemt, wanneer het volumen met dv en de temperatuur dt toeneemt, is volgens onze laatste notatie

$$dQ = F(v, t) dv + f(v, t) dt.$$

Terwijl het lichaam den weg AB aflegt is de temperatuur constant t_1 terwijl het volumen van φ_1 tot ψ_1 verandert, men heeft dus voor de opgenomene warmte

$$Q_1 = \int_{\varphi_1}^{\psi_1} F(v, t_1) dv = F_1(\psi_1, t_1) - F_1(\varphi_1, t_1);$$

evenzoo vindt men

$$Q_0 = \int_{\varphi_0}^{\psi_0} F(v, t) dv = F_1(\psi_0, t_0) - F_1(\varphi_0, t_0).$$

Substituëert men deze uitkomsten in (122) dan komt men onmiddellijk tot het verlangde resultaat.

66. Voor een ideaal gas neemt de vergelijking (121) eene zeer eenvoudige gedaante aan. Voor zulk een gas is volgens § 44

$$M = F(v, t) = \frac{Rt}{Jv},$$

waaruit men vindt

$$F_1(v, t) = \int F(v, t) dv = \frac{Rt}{J} \log v.$$

Hierdoor gaat (121) over in

$$\frac{1}{t} \left\{ \frac{Rt}{J} \log \psi - \frac{Rt}{J} \log \varphi \right\} = \frac{1}{t_0} \left\{ \frac{Rt_0}{J} \log \psi_0 - \frac{Rt_0}{J} \log \varphi_0 \right\},$$

waaruit verder

$$\log \frac{\psi}{\varphi} = \log \frac{\psi_0}{\varphi_0}, \quad \text{of} \quad \frac{\psi}{\varphi} = \frac{\psi_0}{\varphi_0} = \text{Constant.}$$

Voor de warmtehoeveelheden Q_1 en Q_0 vindt men

$$Q_1 = \frac{Rt_1}{J} \log \frac{\psi_1}{\varphi_1} \quad \text{en} \quad Q_0 = \frac{Rt_0}{J} \log \frac{\psi_0}{\varphi_0},$$

waaruit nog

$$\frac{Q_1}{t_1} = \frac{Q_0}{t_0},$$

wijl

$$\frac{\psi_1}{\varphi_1} = \frac{\psi_0}{\varphi_0} \text{ is.}$$

67. Het lichaam K , dat beurtelings warmte aan het gas afstaat en weder daarvan opneemt, draagt den naam regenerator.

Stirling en Ericson hebben werktuigen geconstru-

ëerd waarin verwarmde lucht de beweegkracht levert, en waaraan zij een regenerator hebben aangebracht. Die van Stirling is in hoofdzaak als volgt ingericht. Een groote gesloten staande cilinder is door een beweegbaren, slecht warmtegeleidenden zuiger in twee ruimten verdeeld. Onmiddellijk onder het deksel ligt het verkoelingsapparaat, bestaande uit eene buis, in vele windingen opgerold, en steeds door koud water doorstroomd. De bodem van den cilinder wordt door vuur verwarmd. De twee ruimten staan met elkaar in gemeenschap door een wijd kanaal waarin zich vele ijzeren en glazen staven bevinden, welke gezamenlijk den dienst van regenerator vervullen. Wordt de zuiger omhoog bewogen dan begeeft zich de lucht in den cilinder van boven door den regenerator naar beneden en wordt daar verwarmd. Gaat daarna de zuiger omhoog, dan zal de verwarmde lucht terugstroomen en aan den regenerator een groot deel der verkregene warmte afstaan, om in de bovenste ruimte van den cilinder de temperatuur van het verkoelingsapparaat aan te nemen. Gaat daarna de zuiger weer omhoog, dan neemt de lucht van den regenerator weder een groot deel van de warmte op welke zij vroeger afstond, enz. Nu staat de bovenste ruimte van den beschreven cilinder nog in verband met een werkcilinder waarin de lucht, wanneer hare spanning door verwarming in het onderste deel van den eersten cilinder vergroot wordt, een zuiger voor zich uitdrijft, terwijl deze zuiger eene teruggaande beweging aanneemt, wanneer de lucht in den eersten cilinder door daling van den daarin aanwezigen zuiger naar de bovenste ruimte gedreven wordt, door den regenerator en het

verkoelingsapparaat wordt afgekoeld, en daardoor in spanning afneemt. Het werktuig zelf brengt natuurlijk den zuiger in den eersten cilinder in beweging; de arbeid, die daartoe vereischt wordt, bestaat nagenoeg alleen in het overwinnen van wrijvingsweerstand.

Voor verdere bijzonderheden van het werktuig, en voor de beschrijving van dat van Ericson, verwijzen wij naar *Rankine Steamengine and other prime movers*.

68. Ten slotte behandelen wij nog met ruwe trekken het stoomwerktuig, en vangen aan met het algemeenste geval, namelijk het stoomwerktuig met expansie en condensatie. De stof welke hier den kringloop maakt is water. Wij zullen den loop nagaan van eene gewichtseenheid. Deze hoeveelheid vangt aan met uit den condensor in den stoomketel gepompt te worden waarna het zich tot de temperatuur van den stoomketel verwarmt, en verder verdampt. Vervolgens komt zij in dampvorm in den cilinder alwaar zij zich, na van den stoomketel te zijn afgesloten, tot op zekere hoogte uitzet zonder warmte op te nemen of af te geven, in de onderstelling ten minste, dat er geene warmte-wisseling tusschen den waterdamp en de cilinderwanden bestaat. Eindelijk stroomt die hoeveelheid in den condenser, alwaar zij tot haren oorspronkelijken toestand terugkeert.

De temperatuur in den stoomketel stellen wij t_1 en wij nemen aan dat iedere kilogram damp eene kleine hoeveelheid water mechanisch meevoert naar den cilinder, wij stellen dus x_1 de hoeveelheid waterdamp en $1-x_1$ de hoeveelheid water, waaruit iedere gewichtseenheid, welke in den cilinder komt,

bestaat. Na de expansie stellen wij de temperatuur van den damp t_2 en de hoeveelheid in dampvormigen toestand x_2 , de temperatuur in den condensor zij t_0 , en verder hebben de in het vervolg voorkomende letters eene beteekenis welke van zelf duidelijk is.

Wij zullen nu eerst den arbeid bepalen welke door de gewichtseenheid gedurende den kringloop geleverd wordt; wij nemen daarbij s' , het volumen van de gewichtseenheid in vloeibaren toestand, als constant aan, daar de veranderingen van dat volumen te gering zijn om eenigen merkbaaren invloed uit te oefenen op den geleverden arbeid. Deze vereenvoudiging brengt nog eene andere mede; wanneer wij namelijk de volumenverandering van het water als zeer klein buiten rekening laten, dan moeten wij ook de uitzettingscoëfficiënt δ verwaarloozen en alsdan geeft formule (105) $c' = C$.

a. Terwijl het water uit den condensor in den stoomketel gepompt wordt, verricht het geen arbeid, daar het volumen constant blijft.

b. Terwijl het tot de temperatuur van den ketel verwarmd wordt, verricht het geen arbeid daar het volumen constant blijft.

c. Terwijl het gedeelte x_1 bij de temperatuur t_1 verdampst, neemt het volumen van s' tot $s' + x_1 u_1$ toe (zie § 18), onder de constante spanning p_1 , en er wordt eene hoeveelheid arbeid verricht:

$$+ p_1 x_1 u_1.$$

d. Terwijl de damp met het mechanisch meegevoerde water uit den stoomketel naar den cilinder vloeit, verricht deze geen arbeid, daar, in de onder-

stelling dat in den cilinder dezelfde spanning heerscht als in den ketel, het volumen constant blijft.

e. Terwijl de damp zich uitzet, de gemeenschap met den stoomketel afgesloten zijnde, verricht het den arbeid

$$U_1 - U_2,$$

namelijk de afname van de energie, daar er bij deze verandering warmte is opgenomen noch afgegeven. Formule (30) geeft, wanneer men daarin $c' = C$ en

$$\frac{ds'}{dt} = 0 \text{ stelt:}$$

$$U_1 - U_2 = J (\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2) - (p_1 x_1 u_1 - p_2 x_2 u_2) + \\ + J \int_{t_2}^{t_1} C dt.$$

Het volumen is hierbij van $s' + x_1 u_1$ toegenomen tot $s' + x_2 u_2$. Hier is de vergelijking (57) der adiabatische lijn toepasselijk; deze geeft voor $t = t_2$ en $t_0 = t_1$, enz.

$$\lambda_2 x_2 = \frac{t_2}{t_1} \lambda_1 x_1 + t_2 \int_{t_2}^{t_1} \frac{C}{t} dt.$$

Deze waarde invoerende, vindt men

$$U_1 - U_2 = J \left\{ \frac{t_1 - t_2}{t_1} \lambda_1 x_1 + \int_{t_2}^{t_1} \frac{t - t_2}{t} C dt \right\} - \\ - (p_1 x_1 u_1 - p_2 x_2 u_2).$$

f. Eindelijk wordt de gemeenschap opengesteld met den condensor, waarin de spanning p_0 heerscht, het volumen neemt af van $s' + x_2 u_2$ tot s' en de condenseerende damp verricht den arbeid

$$- p_0 x_2 u_2,$$

waarna het water den kringloop volbracht heeft.

Neemt men de gevondene grootheden te zamen,

dan vindt men voor den totalen arbeid door 1 kilogram water gedurende den kringloop verricht:

$$W = J \left\{ \frac{t_1 - t_2}{t_1} \lambda_1 x_1 + \int_{t_2}^{t_1} \frac{t - t_2}{t} C dt \right\} + u_2 x_2 (p_2 - p_0).$$

Uit deze algemeene formule kunnen wij den arbeid voor verschillende bijzondere gevallen afleiden.

Werkt de machine zonder expansie, dan stelle men eenvoudig $t_2 = t_1$, $x_2 = x_1$, enz., en men vindt

$$W' = u_1 x_1 (p_1 - p_0).$$

Is de expansie daarentegen volkomen, d. i. wordt de expansie zoo ver doorgevoerd dat de spanning in den cilinder gelijk is geworden aan de spanning in den condensor, dan wordt $p_2 = p_0$, en dus ook $t_2 = t_0$, enz., en men vindt

$$W'' = J \left\{ \frac{t_1 - t_0}{t_1} \lambda_1 x_1 + \int_{t_0}^{t_1} \frac{t - t_0}{t} C dt \right\}.$$

Is de machine niet van een condensor voorzien, en stroomt de afgewerkte stoom in den dampkring uit, dan kan men even goed onderstellen dat er een condensor aanwezig is met eene spanning van eene atmosfeer, men stelle dienovereenkomstig $p_0 = 10333$ en $t_0 = 375.08$.

De warmtehoeveelheid welke door de gewichtseenheid water gedurende iederen kringloop wordt opgenomen, bestaat

a. uit de hoeveelheid warmte welke noodig is om een kilogram van t_0 tot t_1 te verwarmen; deze hoeveelheid wordt uitgedrukt door

$$\int_{t_0}^{t_1} C dt;$$

b. uit de hoeveelheid warmte welke noodig is om het gedeelte x_1 bij de temperatuur t_1 te verdampen; deze wordt uitgedrukt door

$$x_1 \lambda_1;$$

de totale hoeveelheid warmte, welke dus in den stoomketel aan het vuur onttrokken wordt, is

$$Q_1 = x_1 \lambda_1 + \int_{t_0}^{t_1} C dt;$$

en het nuttig effect van het werktuig vindt men door de formule

$$\frac{W}{JQ_1}$$

De verrichte arbeid, voor het geval van volkomen condensatie, kan nog op de volgende wijze gevonden worden, door middel van formule (118), welke uit (117) ontstaan is door $N = 0$ te stellen, hetgeen in dit geval geoorloofd is, daar er geene niet-omkeerbare veranderingen van de tweede soort meer in den kringloop voorkomen, en de totale afgegevene hoeveelheid warmte bij de temperatuur t_0 is afgegeven.

De twee bovengegevene hoeveelheden warmte, welke door het water worden opgenomen, geven ieder een term in de integraal $\int_0^{Q_1} \frac{dQ}{t}$, welke in (118) voorkomt. Voor de elementen van de hoeveelheid $\int_{t_0}^{t_1} C dt$ moeten wij de temperatuur in rekening brengen welke het water bij de verwarming achtereenvolgens aanneemt, d. i. voor ieder element $C dt$ de temperatuur t , en men vindt voor den term welke deze hoeveelheid in de gezochte integraal levert

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{C}{t} dt.$$

De tweede hoeveelheid $\lambda_1 x_1$ wordt opgenomen bij de constante temperatuur t_1 , en levert derhalve den term

$$\frac{\lambda_1 x_1}{t_1},$$

zoodat men door samenvoeging van deze twee termen vindt

$$\int_0^{Q_1} \frac{dQ}{t} = \frac{\lambda_1 x_1}{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \frac{C}{t} dt.$$

Substituëert men deze uitkomst en de waarde van Q_1 in (118), dan komt er

$$W'' = J \left\{ \frac{t_1 - t_0}{t_1} \lambda_1 x_1 + \int_{t_0}^{t_1} \frac{t - t_0}{t} C dt \right\},$$

als boven.

Neemt men C constant, dan vindt men

$$W = J \left\{ \frac{t_1 - t_2}{t_1} \lambda_1 x_1 + C (t_1 - t_2) + C t_2 \log \frac{t_2}{t_1} \right\} + u_2 x_2 (p_2 - p_0),$$

$$W'' = J \left\{ \frac{t_1 - t_0}{t_1} \lambda_1 x_1 + C (t_1 - t_0) + C t_0 \log \frac{t_0}{t_1} \right\},$$

$$Q_1 = \lambda_1 x_1 + C (t_1 - t_0).$$

Stelt men het grootst mogelijk nuttig effect voor door z , zoodat men heeft

$$z = \frac{t_1 - t_0}{t_1}, \text{ waaruit } \frac{t_0}{t_1} = 1 - z;$$

dan gaat de uitdrukking voor W'' over in

$$W'' = Jz \left\{ \lambda_1 x_1 + C t_1 \left[1 + (1 - z) \frac{\log (1 - z)}{z} \right] \right\}.$$

De ontwikkeling van den factor tusschen vierkante haken geeft

$$1 + (1-z) \frac{\log(1-z)}{z} = \frac{z}{1.2} + \frac{z^2}{2.3} + \frac{z^3}{3.4} + \text{enz} = z z',$$

wanneer men

$$\frac{1}{1.2} + \frac{z}{2.3} + \frac{z^2}{3.4} + \text{enz.} = z'$$

stelt. Deze reeks is voor alle waarden, welke z kan aannemen, convergent. Deze grootheid is namelijk steeds begrepen tusschen 0 en 1; voor $z=0$ is $z'=\frac{1}{2}$ en voor $z=1$ is $z'=1$; z' ligt dus steeds tusschen $\frac{1}{2}$ en 1.

Door deze substitutie vindt men voor W'' , na $t_1 z$ weder door $t_1 - t_0$ vervangen te hebben

$$W'' = Jz \{ \lambda_1 x_1 + C (t_1 - t_0) z' \}.$$

De grootst mogelijke in arbeid om te zetten hoeveelheid warmte is zQ_1 , en de daaruit verkregene arbeid is

$$JzQ_1 = Jz \{ \lambda_1 x_1 + C (t_1 - t_0) \}.$$

De gevondene uitdrukking voor den werkelijk verkregen arbeid verschilt van deze alleen door den factor z' , waarmede de tweede term vermenigvuldigd is. De werkelijk voortgebrachte arbeid is dus, zooals te verwachten was, geringer, omdat $z' < 1$ is. Dit heeft daarin zijn grond, dat de hoeveelheid warmte $C (t_1 - t_0)$ niet is opgenomen bij de hoogste temperatuur t_1 , doch bij temperaturen welke van t_0 tot t_1 variëeren.

Wij laten hier nog eene kleine tafel volgen van eenige waarden van z voor gewone temperaturen

welke bovenaan en in de eerste kolom links vermeld staan. De absolute temperaturen worden daaruit door eenvoudige optelling van het getal 275.08 verkregen. De onderste horizontale rij kan gelden voor stoomwerktuigen zonder condensatie.

	100°	150°	200°
0°	0.2667	0.3529	0.4211
10°	0.2400	0.3294	0.4000
20°	0.2133	0.3059	0.3789
30°	0.1867	0.2824	0.3579
40°	0.1600	0.2588	0.3368
50°	0.1333	0.2353	0.3157
100°	0.0000	0.1176	0.2105

Bedenkt men zich dat deze maximum-waarden van het nuttig effect onbereikbaar zijn, en in de praktijk op verre na niet bereikt kunnen worden, wegens de vele storende invloeden, zoo komt men tot het besluit dat de stoom- en calorische werktuigen slechts een zeer klein gedeelte van de door het vuur ontwikkelde warmte in arbeid kunnen omzetten.

STELLINGEN.

ST. JAMES

STELLINGEN.

I.

De absolute temperatuurschaal, zooals zij door Thomson is gedefiniëerd, (zie bl. 39), is de eenige rationeele.

II.

De formule van Weber $V = \int \frac{dq}{r} \left\{ 1 - \lambda^2 \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right\}$, is geene potentiaalformule.

III.

De dubbelbreking van licht in kristallen mag niet verklaard worden door de densiteit van den ether met de richting veranderlijk aan te nemen.

IV.

Het grootere warmtegeleidend vermogen van waterstofgas kan gedeeltelijk daardoor verklaard worden, dat het meer dan andere gassen den zoogenaamden ideaaltoestand nadert.

V.

Het grootere warmtegeleidend vermogen van waterstofgas mag niet genoemd worden onder de gronden

welke men aanvoert om het gas als een metaal te beschouwen.

VI.

De uitstraling van volkomen zwarte lichamen is bij gelijke temperatuur in verschillende middenstoffen verschillend, en wel evenredig aan den index van refractie van de middenstof, en niet zooals Clausius zegt, evenredig aan het vierkant van dien index.

VII.

Het is niet bewezen dat de electromotorische kracht der thermo-stroomen alleen aan de soldeerplaatsen zetelt.

VIII.

In leerboeken over natuurkunde (zooals Wüllner, Bosscha) is de werking van den barometer van Bourdon niet verklaard, niettegenstaande die verklaring hoogst eenvoudig is.

IX.

De redeneering van Wüllner, «Lehrbuch der Experimentalphysik»; Uitgave van 1863, Deel I, bl. 682), om aan te toonen dat bij de breking van licht door een prisma een minimum van afwijking verkregen wordt, wanneer de hoek van inval gelijk is aan den hoek van uittreding, is valsch.

X.

De leer der oneindig kleinen is gevallen, of wel mag alleen beschouwd worden als eene gewijzigde voorstelling van de leer der limieten.

XI.

De indeeling, welke door Wilhelm Schell in zijn leerboek der werktuigkunde gevolgd is, is de meest rationeële.

XII.

Het is verkeerd eene methode van onderzoek boven eene andere voor te trekken, b. v. de analytische boven de synthetische, of omgekeerd.

XIII.

De metalen, waarvan sesquioxyden bestaan, zijn quadrivalent.

XIV.

De zuivering van drinkwater door ferridchloride berust op de aanwezigheid van anorganische zouten in de oplossing.

XV.

Ten onrechte zegt Prof. Harting op bl. 52 van het 3^e deel van zijn Leerboek der Dierkunde: Reeds in den *larventoestand* brengen de bladluizen levende jongen ter wereld.

XVI.

De wijze waarop de Hoogleraar Scholten in zijne «Godsdienst en Wijsbegeerte» (Uitgave 1863, bl. 344), de ledige ruimte wegredeneert, is een sophisme.

XVII.

Verplicht onderwijs is noodzakelijk.

VERBETERINGEN.

		— 308 —			
bladz.	5 regel	3 v. b. staat	het	moet zijn	een
"	19 "	4 v. o. "	$\frac{\partial}{\partial p}$	" "	$\frac{\partial t}{\partial p}$
"	38 "	7 v. b. "	$\left(\frac{df(t, t_0)}{dt}\right)_{t=t_0}$	" "	$\left(\frac{df(t, t_0)}{dt}\right)_{t=t_0}$
"	38 "	11 v. b. "	$\frac{d f(t, t_0)}{dt}$	" "	$\frac{d^2 f(t, t_0)}{dt}$
"	44 "	11 v. b. "	$\frac{P^1}{t_1}$	" "	$\frac{P}{t_1}$
"	46 "	5 v. o. "	aanhangspunt	" "	aanvangspunt
"	47 "	2 v. o. "	$N \frac{dt}{dx}$	" "	$N \frac{dv}{dx}$
"	48 "	8 v. b. ") = 0	" ") ² = 0
"	48 "	6 v. o. "	$-\frac{t}{J}$	" "	$= \frac{t}{J}$
"	67 "	2 v. b. "	aan	" "	van
"	69 "	15 v. b. "	$\frac{p' - p}{p_0 +}$	" "	$\frac{p' - p}{p_0}$
"	76 "	3 v. b. "	$\frac{\partial p}{\tau}$	" "	$\frac{\partial p}{\partial \tau}$
"	80 "	8 v. b. "	$\frac{dU}{dv}$	" "	$\frac{dU}{dv} + p$
"	80 "	5 v. o. "	$Ic \delta$	" "	$Jc \delta$
"	83 "	7 v. b. "	$Ic \delta$	" "	$Jc \delta$
"	89 "	6 v. b. "	$t v_0$	" "	$t \delta$
"	92 "	7 v. b. "	$J \times p_0$	" "	$J \times q_0$
"	102 "	1 v. o. "	$p_1 v_2$	" "	$p_1 v_1$

