Bemerkung zu einer neuen Ableitung des Wienschen Verschiebungsgesetzes.

Von Paul Ehrenfest.

Herr Prof. J. H. Jeans hat kürzlich[1]) eine überraschend einfache Ableitung des Wienschen Verschiebungsgesetzes gegeben, die aber in einigen Punkten nicht zwingend zu sein scheint. — Herr Jeans zeigt durch einige Überlegungen, deren Besprechung ich hier unterlasse, daß das Emissionsvermögen eines schwarzen Körpers bei einer bestimmten Temperatur T, für eine bestimmte Wellenlänge λ nur mehr eine

„Funktion von λ, T, V, e, m, R und K"

sein kann. (V = Lichtgeschwindigkeit, e = Ladung eines Elektrons, m = Masse eines Elektrons, R = die bekannte Konstante aus der Theorie der Gase, die so gewählt ist, daß $^2/_3 RT$ die mittlere kinetische Energie eines Elektrons ist, K = Dielektrizitätskonstante des Äthers, gemessen in beliebigem Maßsystem.) Und nun fährt Herr Jeans folgendermaßen fort (S. 548, l. c.)

§ 4. Die physikalischen Dimensionen der sieben Größen λ, T, V, e, m, R und K drücken sich in den Einheiten der Länge (L), der Masse (M), der Zeit (Z), der Temperatur (T) und der Dielektrizitätskonstante (K) folgendermaßen aus:

λ hat Dimension L
T „ „ T
V „ „ LZ^{-1}
e „ „ $L^{3/2}M^{1/2}t^{-1}K^{1/2}$
m „ „ M
R „ „ $L^2MZ^{-2}T^{-1}$ [1])
K „ „ K

Man hat hier also sieben Größen mit nur fünf unabhängigen physikalischen Grundeinheiten. Es muß also möglich sein die sieben Größen auf zwei voneinander unabhängige Weisen so zu kombinieren, daß sie eine reine Zahl bilden. Wir können als solche zwei unabhängige Verbindungen dieser sieben Grössen nehmen:

$$c_1 \equiv RTm^{-1}V^{-2} \qquad c_2 \equiv \lambda RTKe^{-2},$$

c_1 und c_2 sind reine Zahlen.

Jede andere reine Zahl, die aus diesen sieben Größen aufgebaut werden kann, muß dann die Form $f(c_1, c_2)$ besitzen.

Die physikalische Dimension der Funktion Φ_m ($\Phi_m\, d\lambda$ = Energie pro Volumeneinheit des Äthers, soweit sie in den Wellenlängen zwischen λ und $\lambda + d\lambda$ entspricht) ist die einer Energie pro Volumeneinheit und Wellenlängeneinheit. Also hat Φ_m die Dimension $L^{-2}MZ^{-2}$. (Im Original aus Versehen: $L^{-3}MZ^{-2}$.) Diese Dimension ist aber dieselbe wie die von $\lambda^{-4}RT$. Das Verhältnis von Φ_m zu dieser Größe ist also

1) J. H. Jeans, On the laws of radiation. Proc. of the Royal Soc. A Vol. 76, 546, 1905.

1) Im Original aus Versehen: $R \ldots\ldots LMZ^{-2}T^{-1}$.

eine reine Zahl; daraus folgt, daß es möglich sein muß, Φ_m in der Form

$$\Phi_m = \lambda^{-4} R T f(c_1, c_2)$$

darzustellen.

§ 5. Die Zahl c_1 besitzt eine einfache physikalische Bedeutung: Die mittlere kinetische Energie eines freien Elektrons bei der Temperatur T ist $^3/_2 RT$; also der Wert des mittleren Geschwindigkeitsquadrates $C_2 = {}^3/_2 R T m^{-1}$. Somit ist

$$^3/_2\, c_1 = \frac{C^2}{V^2}.$$

Bei 100° Celsius ist der Wert von C zirka 7×10^6 cm pro Sekunde[1]), hingegen

$$V = 3 \times 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{sec}}.$$

Der Wert von c_1 ist folglich zirka $3{,}6 \times 10^{-8}$, eine Größe, genügend klein, um vernachlässigt zu werden (!!). Indem man zur Grenze übergeht, in der c_1 gleich Null gesetzt wird, kann die Funktion $f(c_1, c_2)$ entweder einer bestimmten Grenze $f(o, c_2)$ zustreben oder auch nicht. Hier wollen wir annehmen, daß eine solche Grenze existiert, ohne uns auf eine Diskussion der exakten Bedeutung dieser Annahme einzulassen.

§ 6. Unter dieser Annahme finden wir, daß Φ_m sehr angenähert in der Form

$$\Phi_m = \lambda^{-4} R T f(c_2)$$

ausgedrückt werden kann, da der wirkliche Wert von c_1 sehr klein ist (!!). Indem man nun c_2 durch seinen Wert ersetzt und „dropping" die universellen Konstanten R, K, e (im Original aus Versehen auch noch T) finden wir:

$$\Phi_m = \lambda^{-4}\, T f(\lambda T).$$

Somit erhält man für das Strahlungsgesetz des schwarzen Körpers bei der Temperatur T für die Wellenlänge λ die Form:

$$\lambda^{-4}\, T f(\lambda T) d\lambda.$$

Ohne näher die Punkte zu besprechen, an denen ich den Schlüssen nicht zu folgen vermochte, will ich durch ein Beispiel zeigen, daß die hier gegebene Schlußreihe so ziemlich zu jedem anderen Resultat führen kann, je nachdem, wie man die Verbindungen c_1 und c_2 wählt. Zu diesem Zwecke wählen wir statt der Verbindung c_1 und c_2 neue Verbindungen c'_1, c'_2 so daß $c'_1 = c_1$, $c'_2 = c_2 \cdot c_1{}^{1/8}$, das heißt $c'_1 \equiv R T m^{-1} V^{-2}$ $c'_2 \equiv \lambda R^{9/8} T^{9/8} K e^{-2} m^{-1/8} V^{-1/4}$. c'_1 und c'_2 sind im selben Sinne voneinander unabhängig wie c_1 und c_2. (Zur Vorsicht wurde c'_2 so gewählt, daß es dieselbe — nicht untersuchte — Größenordnung besitzt wie die Größe c_2.) Übt man auf diese Größen die oben zitierte Schlußreihe aus, so kommt man zu dem Resultat:

$$\Phi'_m = \lambda^{-4}\, T f'(\lambda T^{9/8}).$$

Weesen a. Wallensee, 5. Juni 1906.

(Eingegangen 8. Juni 1906.)

1) „Jeans, The dynamical theory of Gases", p. 209.

Zur Planckschen Strahlungstheorie.

Von Paul Ehrenfest.

Mit Rücksicht auf das Erscheinen der „Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung" von Herrn Prof. Planck möchte ich mir erlauben, aus einer Arbeit, die erst später erscheinen kann, einige Bemerkungen speziell zur Planckschen Strahlungstheorie zusammenzustellen. Ihre genauere Begründung soll im Zusammenhang jener Arbeit erfolgen.

§ 1. Den Plan seiner Theorie entwickelt Herr Planck im § 104 (S. 100) seines Buches: Der Kirchhoffsche Satz von der Universalität der Hohlraumstrahlung darf auch auf fingierte Systeme ausgedehnt werden. Als solches wählt Herr Planck folgendes Modell: Eine Spiegelhülle, die einen oder mehrere Resonatoren umschließt. Die Natur der Resonatoren ist lediglich durch ihre linear homogene Schwingungsgleichung definiert. Sie besitzen nur Strahlungs-, nicht aber Reibungsdämpfung. „Sobald es nur gelingt, für irgendeine solche beliebig herausgegriffene spezielle Art und Anordnung emittierender und absorbierender Systeme einen Strahlungszustand im umgebenden Vakuum nachzuweisen, der sich durch **absolute Stabilität**[1]) auszeichnet, so kann dieser Zustand kein anderer sein, als der der schwarzen Strahlung". Herr Planck stellt nun Berechnungen darüber an, wie die Anwesenheit solcher Resonatoren eine anfänglich in das Modell eingeschlossene Strahlung verändert. Trotz der Linearität aller in Betracht kommenden Grundgleichungen sind diese Berechnungen mit enormen Schwierigkeiten verbunden und ihr unvermeidlicher Umfang erschwert beim ersten Studium den Überblick. Es sei deshalb erlaubt, zu skizzieren, wie man sich auf einem Wege, der sich an die Methoden von Rayleigh und Jeans anschließt, die bedeutsamere Hälfte des von Herrn Planck gewonnenen Resultates zumindest plausibel machen kann. Das Resultat läßt sich etwa so formulieren (siehe Schlußparagraph des Buches):

1. Die Farbenzusammensetzung der Strahlung, die man anfänglich in das Modell einbringt, wird durch die Anwesenheit beliebig

1) Die Hervorhebung dieser Worte habe ich mir mit Rücksicht auf die daran anknüpfenden Erörterungen erlaubt. (Vergl. § 2.)