eine reine Zahl; daraus folgt, daß es möglich sein muß, Φ_m in der Form

$$\Phi_m = \lambda^{-4} R T f(c_1, c_2)$$

darzustellen.

§ 5. Die Zahl c_1 besitzt eine einfache physikalische Bedeutung: Die mittlere kinetische Energie eines freien Elektrons bei der Temperatur T ist $^3/_2 RT$; also der Wert des mittleren Geschwindigkeitsquadrates $C_2 = {}^3/_2 R T m^{-1}$. Somit ist

$$^3/_2\, c_1 = \frac{C^2}{V^2}.$$

Bei 100^0 Celsius ist der Wert von C zirka 7×10^6 cm pro Sekunde[1]), hingegen

$$V = 3 \times 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{sec}}.$$

Der Wert von c_1 ist folglich zirka $3{,}6 \times 10^{-8}$, eine Größe, genügend klein, um vernachlässigt zu werden (!!). Indem man zur Grenze übergeht, in der c_1 gleich Null gesetzt wird, kann die Funktion $f(c_1, c_2)$ entweder einer bestimmten Grenze $f(o, c_2)$ zustreben oder auch nicht. Hier wollen wir annehmen, daß eine solche Grenze existiert, ohne uns auf eine Diskussion der exakten Bedeutung dieser Annahme einzulassen.

§ 6. Unter dieser Annahme finden wir, daß Φ_m sehr angenähert in der Form

$$\Phi_m = \lambda^{-4} R T f(c_2)$$

ausgedrückt werden kann, da der wirkliche Wert von c_1 sehr klein ist (!!). Indem man nun c_2 durch seinen Wert ersetzt und „dropping" die universellen Konstanten R, K, e (im Original aus Versehen auch noch T) finden wir:

$$\Phi_m = \lambda^{-4} T f(\lambda T).$$

Somit erhält man für das Strahlungsgesetz des schwarzen Körpers bei der Temperatur T für die Wellenlänge λ die Form:

$$\lambda^{-4} T f(\lambda T) d\lambda.$$

Ohne näher die Punkte zu besprechen, an denen ich den Schlüssen nicht zu folgen vermochte, will ich durch ein Beispiel zeigen, daß die hier gegebene Schlußreihe so ziemlich zu jedem anderen Resultat führen kann, je nachdem, wie man die Verbindungen c_1 und c_2 wählt. Zu diesem Zwecke wählen wir statt der Verbindung c_1 und c_2 neue Verbindungen c'_1, c'_2 so daß $c'_1 = c_1$, $c'_2 = c_2 \cdot c_1^{1/8}$, das heißt $c'_1 \equiv R T m^{-1} V^{-2}$ $c'_2 \equiv \lambda R^{9/8} T^{9/8} K e^{-2} m^{-1/8} V^{-1/4}$. c'_1 und c'_2 sind im selben Sinne voneinander unabhängig wie c_1 und c_2. (Zur Vorsicht wurde c'_2 so gewählt, daß es dieselbe — nicht untersuchte — Größenordnung besitzt wie die Größe c_2.) Übt man auf diese Größen die oben zitierte Schlußreihe aus, so kommt man zu dem Resultat:

$$\Phi'_m = \lambda^{-4} T f'(\lambda T^{9/8}).$$

Weesen a. Wallensee, 5. Juni 1906.

(Eingegangen 8. Juni 1906.)

1) „Jeans, The dynamical theory of Gases", p. 209.

Zur Planckschen Strahlungstheorie.

Von Paul Ehrenfest.

Mit Rücksicht auf das Erscheinen der „Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung" von Herrn Prof. Planck möchte ich mir erlauben, aus einer Arbeit, die erst später erscheinen kann, einige Bemerkungen speziell zur Planckschen Strahlungstheorie zusammenzustellen. Ihre genauere Begründung soll im Zusammenhang jener Arbeit erfolgen.

§ 1. Den Plan seiner Theorie entwickelt Herr Planck im § 104 (S. 100) seines Buches: Der Kirchhoffsche Satz von der Universalität der Hohlraumstrahlung darf auch auf fingierte Systeme ausgedehnt werden. Als solches wählt Herr Planck folgendes Modell: Eine Spiegelhülle, die einen oder mehrere Resonatoren umschließt. Die Natur der Resonatoren ist lediglich durch ihre linear homogene Schwingungsgleichung definiert. Sie besitzen nur Strahlungs-, nicht aber Reibungsdämpfung. „Sobald es nur gelingt, für irgendeine solche beliebig herausgegriffene spezielle Art und Anordnung emittierender und absorbierender Systeme einen Strahlungszustand im umgebenden Vakuum nachzuweisen, der sich durch **absolute Stabilität**[1]) auszeichnet, so kann dieser Zustand kein anderer sein, als der der schwarzen Strahlung". Herr Planck stellt nun Berechnungen darüber an, wie die Anwesenheit solcher Resonatoren eine anfänglich in das Modell eingeschlossene Strahlung verändert. Trotz der Linearität aller in Betracht kommenden Grundgleichungen sind diese Berechnungen mit enormen Schwierigkeiten verbunden und ihr unvermeidlicher Umfang erschwert beim ersten Studium den Überblick. Es sei deshalb erlaubt, zu skizzieren, wie man sich auf einem Wege, der sich an die Methoden von Rayleigh und Jeans anschließt, die bedeutsamere Hälfte des von Herrn Planck gewonnenen Resultates zumindest plausibel machen kann. Das Resultat läßt sich etwa so formulieren (siehe Schlußparagraph des Buches):

1. Die Farbenzusammensetzung der Strahlung, die man anfänglich in das Modell einbringt, wird durch die Anwesenheit beliebig

1) Die Hervorhebung dieser Worte habe ich mir mit Rücksicht auf die daran anknüpfenden Erörterungen erlaubt. (Vergl. § 2.)

vieler Planckscher Resonatoren nicht beeinflußt, sondern bleibt dauernd erhalten.

2. Unter der Wirkung der Absorption und Emission der Oszillatoren stellt sich schließlich ein stationärer Strahlungszustand ein, in dem die Intensitäten und Polarisationen aller Strahlen jeder Farbe für sich nach Größe und Richtung sich gegenseitig ausgleichen.

Zusammenfassend: Eine im Planckschen Modell eingeschlossene Strahlung mag im Laufe der Zeit beliebig ungeordneter werden — sicher wird sie nicht schwärzer. — Für die folgende Erörterung am meisten angepaßt ist diese Formulierung: Die Resonatoren innerhalb der Spiegelhülle leisten dasselbe wie eine leere Spiegelhülle, die an einzelnen Stellen diffus reflektiert.

Daß die Planckschen Resonatoren auf die Strahlung ebenso zerstreuend einwirken wie diffuse Reflexion — vielleicht nur mit anderer Geschwindigkeit — das wird man fürs erste auch ohne Rechnung zugeben.[1]) Da es sich aber gerade um das Schwärzer-Werden der Strahlung handelt, ist besonders die erste Hälfte des Planckschen Resultates bedeutsam. Wir wollen uns genau der Schlüsse bedienen, die Herr Planck für einen anderen Zweck ausgearbeitet hat: Eine exakt oder diffus reflektierende Hülle umschließe nur reinen Äther. Jeder Strahlungsvorgang innerhalb dieser Hülle ist dann einfach eine bestimmte Superposition der Eigenschwingungen des Hohlraumes. Ihre Amplituden (und Phasen) bleiben bekanntlich so lange konstant, solange das System abgeschlossen sich überlassen bleibt. Es „kann also hierbei keine Rede sein . . . von einer Tendenz zu einem Ausgleich der auf die einzelnen Partialschwingungen entfallenden Teilenergien" (l. c. S. 175). Diese Schlüsse übertragen sich nun ohne weiteres auf das Plancksche Modell. Solange nämlich die Oszillatoren durch nichts weiter definiert sind als durch die linear homogenen Differentialgleichungen[2]), die Herr Planck für sie ansetzt, sind sie im wesentlichen mit kleinen Stäbchen aus vollkommenen Leitern oder passenden Dielektrikas identisch. Dann ist aber jeder Bewegungszustand des Planckschen Modells wieder um eine Superposition der Eigenschwingungen dieses komplizierteren Systems. Und so kann auch hier keine Rede sein von einer Tendenz zu einem Ausgleich der auf die einzelnen Partialschwingungen entfallenden Teilenergien.[1]) Dieses von Herrn Planck gefundene Resultat ist um so bedeutsamer, als der erste Anschein so sehr dagegen spricht: Ein Planckscher Resonator spricht wegen seiner Strahlungsdämpfung auf Wellen aller Perioden an, die der Periode seiner Eigenschwingung genügend nahe liegen. Es wäre darnach zu erwarten, daß eine Schar von Resonatoren mit eng aneinander anschließenden Eigenschwingungsfrequenzen, die sich zusammen über das ganze Spektrum erstrecken, imstande sein müßten, eine anfänglich monochromatische Strahlung sukzessive in Strahlung kontinuierlicher Spektralverteilung zu verwandeln.[2])

§ 2. Schreibt man jedem Bewegungszustand des Modelles eine bestimmte Entropie zu, so läßt sich bei passender Wahl des Ausdruckes für die Entropie das Plancksche Resultat auch so formulieren: Die Entropie des Modelles nimmt zu bis zu einem Wert, den sie nicht mehr überschreitet, so lange das Modell abgeschlossen sich selbst überlassen bleibt. Dieser obere Grenzwert hängt aber nicht nur von der Totalenergie, sondern auch von der anfänglichen Spektralverteilung der eingeschlossenen Strahlung ab. — Eine Analogie aus der kinetischen Gastheorie ermöglicht einen tieferen Einblick. Wir definieren ein eigentümlich idealisiertes Gas: die Moleküle dieses Gases seien füreinander vollständig durchdringlich. Sie erfahren also nur an den Wänden und den gleich zu definierenden „Zerstreuern" Stöße. Diese „Zerstreuer" seien elastische Kugeln ebenfalls von molekularer Größe regellos über den Raum verteilt und zwar mit absolut fixen Mittelpunkten. Die Gasmoleküle behalten also bei jedem Stoß ihre Absolutgeschwindigkeit (Energie) bei; ihre Bewegungsrichtung

1) Dabei kommen die bekannten Einwände von Loschmidt und Zermelo gegen die Erklärbarkeit irreversibler Prozesse durch reversible Modelle ganz in derselben Weise in Betracht wie in der kinetischen Gastheorie. Diese Seite der Frage soll an anderer Stelle eingehend berücksichtigt werden. Im folgenden wird sie bewußt beiseite gelassen, um in diesem Punkt mit der Planckschen Darstellung in Übereinstimmung zu bleiben.

2) Anders, falls Molekularstöße eingreifen oder die Differentialgleichungen nicht mehr linear homogen wären. — Siehe P. Ehrenfest, „Über die physikalischen Voraussetzungen der Planckschen Theorie". Wien. Ber. 114 [2a], 1905, § 9 und M. Planck, „Vorlesungen . . .". Schlußparagraph und Anmerk. zu § 109.

1) Wenn wir hier „Spektralverteilung" und „Energieverteilung auf die einzelnen Partialschwingungen" identifizieren, so entspricht das den Festsetzungen, die Herr Planck in den §§ 164—166 akzeptiert. Die Beziehung zu den Festsetzungen des § 180 bleibe an dieser Stelle unerörtert.

2) In der Tat findet sich in der Einleitung jener Arbeit, mit der Herr Planck vor neun Jahren die Publikation seiner Theorie eröffnete, folgender Passus (Berl. Akademie 4II, 1897, § 7): „Der Resonator beeinflußt aber auch die Färbung der erregenden Welle, wenn man darunter die Verteilung ihrer gesamten Intensität auf die verschiedenen in ihr enthaltenen einfach periodischen Schwingungsarten versteht und es ist zu erwarten, daß er auch hier im Sinne eines gewissen Ausgleichs unter den Intensitäten verschiedener Farben wirkt, woraus sich dann wichtige Schlüsse auf die Energieverteilung im stationären Strahlungszustand innerhalb des betrachteten Raumes ergeben." — Eine vollständig befriedigende Auflösung dieses interessanten Paradoxons läßt sich nur bei eingehenderer Auseinandersetzung über die beiden Definitionen der Spektralverteilung geben. (Siehe vorige Anmerkung.)

aber ändert sich. Für dieses Modell kann man eine vollständige Analogie zum H-Theorem aufbauen. Akzeptiert man für den Augenblick das H-Theorem ohne Vorbehalt, so würde es zeigen: Eine anfängliche Ungleichförmigkeit in der Dichteverteilung und in den Geschwindigkeitsrichtungen gleicht sich aus. Von einer Tendenz zu einem Ausgleich der auf die einzelnen Moleküle entfallenden Energiebeträge kann natürlich keine Rede sein. Wohl wächst die Größe H bis zu einem Wert, den sie nicht mehr überschreitet, solange das Modell abgeschlossen bleibt, entsprechend der partiellen Verminderung der anfänglichen Ordnung. Die Entropie nimmt aber in beiden Modellen nicht ihren „absoluten" Maximalwert für die vorgegebene Totalenergie an. Den würde sie nur annehmen, wenn in jenem Modell die Strahlung schwarz, in diesem Modell die Geschwindigkeitsverteilung maxwellisch werden wollte, wozu nicht die Möglichkeit besteht.[1]) Die Strahlung vermag also im abgeschlossenen Modell im allgemeinen auch nicht einen Zustand zu erreichen, „der sich durch absolute Stabilität auszeichnet". Im Planckschen Modell sind unendlich viele nicht-schwarze Strahlungen vollkommen stabil. Es hat sich dieses besonders einfach mit Hilfe einer dimensionellen Methode zeigen lassen.[2]) Wenn nun Herr Planck in die jetzige Darstellung der Grundlage seiner Resonatorentheorie die Forderung der „absoluten Stabilität" explizit mit aufgenommen hat, so drängt sich die Frage auf: Wodurch soll diese absolute Stabilität bewirkt oder auch nur erkannt werden?

§ 3. Wir verdanken Herrn Planck eine zweite Theorie der Hohlraumstrahlung, die — wenn ich richtig verstanden habe — von dieser Resonatorentheorie physikalisch unabhängig ist und die schon ein ungewöhnlich schönes Resultat gezeitigt hat: die sehr scharfe Festlegung der Boltzmannschen Konstante k ($^3/_2\, k\, T =$ mittlere kinetische Energie eines Moleküles bei der Temperatur T). Für das Folgende sei diese Theorie kurz als „Komplexionentheorie" bezeichnet. Es sei eine Darstellung erlaubt, die mehr den Methoden von Rayleigh und Jeans entspricht.[3]) Die Amplituden und Phasen der Eigenschwingungen eines Raumes innerhalb einer Spiegelhülle sind im selben Sinne voneinander als physikalisch unabhängig anzusehen wie die Geschwindigkeiten der Moleküle eines kräftefreien Gases. Diese Bemerkung gibt Anlaß, die kinetische Definition, die Boltzmann für die Entropie eines nicht im Gleichgewicht befindlichen Gasgemisches gegeben hat, auf dieses System zu übertragen. Den enorm vielen Molekülen einer Sorte hätten zu entsprechen die enorm vielen Hauptschwingungen des Hohlraumes, deren Frequenz zwischen ν und $\nu + d\nu$ liegt. Die Entropie einer in der Spiegelhülle eingeschlossenen Strahlung würde dann gegeben sein durch[1])

$$S = \text{konst.} - k \int_0^\infty d\nu\, N(\nu) \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu, f, g) \lg F(\nu, f, g)\, df\, dg. \tag{1}$$

Hierin bedeutet $N(\nu)\, d\nu$ die Gesamtzahl aller Eigenschwingungen, deren Frequenz zwischen ν und $\nu + d\nu$ liegt; $N(\nu)\, d\nu\, F(f, g, \nu)\, df\, dg$ die Zahl derjenigen unter ihnen, für die augenblicklich

1. die Elongation f zwischen f und $f + df$,
2. das Moment g zwischen g und $g + dg$

liegt. Bezeichnen wir die Gesamtenergie einer solchen Eigenschwingung in diesem Zustand mit ε_ν, so sei

$$\varepsilon_\nu = \frac{\alpha_\nu}{2} f^2 + \frac{\beta_\nu}{2} \dot{f}^2, \tag{2}$$

somit

$$g_\nu = \frac{\partial \varepsilon_\nu}{\partial \dot{f}}. \tag{3}$$

Die Grundhypothese der kinetischen Komplexionentheorie ist dann diese: Teilt man dem betrachteten System durch die in der Natur vorhandenen Mittel ein gewisses Quantum Energie mit und schließt das System ab, nachdem Gleichgewicht eingetreten ist, so wird im Gleichgewicht jene Verteilungsfunktion F herrschen, die der Funktion S den größten Wert erteilt, der bei Berücksichtigung aller den Endzustand einschränkenden Bedingungen überhaupt möglich ist. (Die dadurch festgelegte spezielle Form der Funktion F heiße im folgenden die „Grenzverteilung".) — Diese Grundhypothese der Boltzmannschen Komplexionentheorie ist zugleich die der Planckschen. Dementsprechend hat man alle einschränkenden Bedingungen in Form von Relationen niederzuschreiben, denen

1) Statt Zerstreuer zu Hilfe zu nehmen, kann man einfach die Wand aufgerauht denken als Analogon zur diffusen Reflexion. Aber auch die Reflexion der Moleküle (respektiv der Strahlung) an glatten Wänden von nur einigermaßen unregelmäßiger Gestalt wird im allgemeinen denselben Erfolg aufweisen, allerdings erst in größeren Zeiträumen. Daß in solchen Fällen die Boltzmannsche Größe H sich überhaupt verändern kann (entgegen den Sätzen in § 18 des Bd. I (S. 126) und § 75 des Bandes II der Boltzmannschen Gastheorie) wird an anderer Stelle gezeigt werden zugleich mit den analogen Aussagen für die Strahlungsthermodynamik.

2) P. Ehrenfest, Wien. Ber. **114** [2a], S. 1301, 1905. Diese Methode ist von H. A. Lorentz im Jahre 1901 Amst. Akad. angegeben worden.

3) Zitat und Besprechung in § 165 und 166 der „Vorlesungen . . ." von Planck.

1) Weitere Bemerkungen zu dieser Festsetzung an anderer Stelle. Bei Modellen, wie sie im vorigen Paragraphen besprochen wurden, gibt es zwei verschiedene Arten von Definitionen von S. In einem Falle bleibt im abgeschlossenen Modell S zeitlich konstant, im andern Falle nicht. — Bei der Wahl von S hat man die Bemerkungen zu berücksichtigen, die M. Laue über den Einfluß der Kohärenz auf den Entropiewert gemacht hat. Ann. d. Phys. **20**, 365, 1906.

F genügen muß[1]) und hat durch Variation von F bei Berücksichtigung dieser Relationen das relative Maximum von S aufzusuchen. — Als solche Bedingungen kommen hier jedenfalls in Betracht:

$$\text{I.} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\int F(\nu, f, g)\, df\, dg = 1.$$

Denn entsprechend der Definition von F ist ja:

$$N(\nu)\, d\nu = N(\nu)\, d\nu \int_{-\infty}^{+\infty}\int F(\nu, f, g)\, df\, dg.$$

$$\text{II.} \qquad \int_0^\infty d\nu\, N(\nu) \int_{-\infty}^{+\infty}\int \varepsilon_\nu F(\nu, f, g)\, df\, dg = E,$$

wo E die im Hohlraum eingeschlossene Strahlungsenergie ist, deren Gesamtwert vorgegeben sei. — Über das Eingreifen anderer Bedingungen weiter unten. — Bestimmt man das relative Maximum von S unter alleiniger Berücksichtigung der Relationen I und II, so verlaufen die Rechnungen genau so wie für ein Gasgemisch.[2]) Man erhält dann als Grenzfunktion die bekannte Boltzmann-Maxwellsche Verteilung und als Konsequenz die Aussage, daß der mittlere Energieinhalt für die Hauptschwingung jedes Frequenzgebietes derselbe ist. Behandelt man mit derselben Methode ein System, das aus Äther + Molekülen besteht, was hier unterbleiben soll, so ergibt sich: dieser mittlere Energieinhalt wäre weiter auch noch gleich dem mittleren Energieinhalt der Moleküle. Daraus aber würde schließlich, wie Rayleigh und Jeans durch Auswertung der Größe $N(\nu)$ für einen Würfel gezeigt haben, folgende Spektralgleichung für die Hohlraumstrahlung folgen

$$\varphi(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2 k T}{c^3}, \qquad (4)$$

wo c die Lichtgeschwindigkeit und $^3/_2\, k T$ die mittlere kinetische Energie eines Moleküles bei der Temperatur T ist. — Diese Formel kann nur für lange Wellen und hohe Temperaturen mit der Beobachtung in Einklang gebracht werden. Bemerkt aber muß werden

1. sie besitzt die vom Wienschen Verschiebungsgesetz geforderte Form

$$\varphi(\nu, T) = \nu^3 f\left(\frac{T}{\nu}\right); \qquad (5)$$

2. sie beansprucht genau ebenso wie die Plancksche Spektralgleichung eine exakte Determination der Boltzmannschen Konstante k zu geben, sobald man sie in ihrem Gültigkeitsbereich mit der Beobachtung vergleicht.[3])

1) Es sind Bedingungen konstruierbar, für die diese Darstellungsform nicht mehr möglich ist.

2) Die Rechnung für ein Gas ist vollständig durchgeführt im § 142 der „Vorlesungen".

3) Siehe Rayleigh und Jeans Briefe in „Nature" Bd. 72 (1905), ferner H. A. Lorentz, Amsterd. Ak. 1903, S. 666. — Die gesamte Strahlungsenergie, die auf das Frequenzgebiet ν_1 bis ν_2 entfällt, ist durch Strahlungsmessung sehr genau bestimmbar. — Die Zahl der daran beteiligten Eigenschwingungen ist sehr genau berechenbar (im Gegensatz zu der dazu analogen Loschmidtschen Zahl), so gelangt man zu einer sehr guten Bestimmung des Energieinhaltes eines Moleküles bei der betreffenden Temperatur.

Für höhere Frequenzen ist die Spektralgleichung (4) schon deshalb zu verwerfen, weil sie für $\nu = \infty$ zu unendlich hohen Intensitäten führt. — Es ist darnach die Frage naheliegend: Durch welches Mittel hat die Plancksche Komplexionentheorie diese Schwierigkeit vermieden?

§ 4. Man hat da zunächst ganz allgemein das Eingreifen noch anderer einschränkender Bedingungen neben I und II zu berücksichtigen. Daß solche physikalisch begründet sein könnten, dürfte folgende Bemerkung zeigen, die ich übrigens nur zur Exemplifikation anführe. Nehmen wir an, daß in der Natur alle Strahlungserregung ausschließlich durch die Vermittelung von Elektronen erfolge und daß diese Elektronen durchaus eine bestimmte Struktur besäßen. Diese spezielle Struktur — vielleicht einfach der ein für allemal feste Durchmesser der Elektronen[1]) vermag prinzipiell schon zu bewirken, daß nicht jede beliebige denkbare Erregung der Hauptschwingungen unseres Hohlraumes durch natürliche Mittel verwirklicht werden kann. Zurzeit ist es noch nicht gelungen, irgendeine derartige weitere Einschränkungsbedingung aus einer physikalischen Hypothese abzuleiten.[2])

Durch willkürliche Ansetzung aber auch nur einer einzigen weiteren Relation für $F(\nu, f, g)$ kann man natürlich schon jede beliebige Funktion F als Grenzverteilung herausrechnen.

Man setze z. B. eine dritte Relation für F in der sogar noch sehr speziellen Form[3]) an:

$$\text{III.} \quad \int_0^\infty d\nu\, N(\nu) \int_{-\infty}^{+\infty}\int \Phi(\nu, f, g)\, F(\nu, f, g, df\, dg = A,$$

wo Φ eine willkürlich gewählte Funktion und A eine Konstante ist. Der Kalkül zur Bestimmung der Grenzverteilung F lautet dann:

$$\delta H + \varrho\, \delta I + \sigma\, \delta II + \tau\, \delta III = 0, \qquad (6)$$

wo ϱ, σ, τ Multiplikatoren sind, die sich schließlich aus I, II, III bestimmen. Die Ausrechnung liefert:

$$\lg F_{(\nu, f, g)} + 1 + \varrho + \sigma\varepsilon_\nu + \tau\, \Phi(\nu, f, g) = 0$$

oder

$$F(\nu, f, g) = e^{-[1 + \varrho + \sigma\varepsilon_\nu(f, g) + \tau\Phi(\nu, f, g)]}, \qquad (7)$$

also ganz von der willkürlichen Wahl von Φ abhängig.

Eine beliebig erwünschte Spektralverteilung läßt sich erst recht auf unendlich viele verschiedene Weisen durch Adjunktion einer passenden Re-

1) Die Ausdehnung des Elektrons kommt besonders für die Erregung der Eigenschwingungen sehr kurzer Wellenlängen in Betracht.

2) Vergl. Bemerk. 1 im § 5.

3) Vergl. die 3. Anmerkung zu § 3.

lation III errechnen. Denn sie schreibt ja nicht einmal das F selber, sondern nur die Werte von

$$N(\nu)\int_{-\infty}^{+\infty}\int \varepsilon_\nu F(\nu, f, g)\, df\, dg \qquad (8)$$

für jedes ν vor. — Da der Weg von der Beobachtung zu einer empirischen Formel für die Spektralverteilung und vollends von da zur Aufstellung einer solchen Variationsbedingung (III) nichts weniger als eindeutig ist, so hat die Ableitung einer Spektralgleichung aus einer Variationsbedingung erst von dem Moment an als eine theoretische Ableitung zu gelten, wo man die gewählte Variationsbedingung irgendwie physikalisch begründen kann. In den Fällen, wo Boltzmann die Methoden der Komplexionentheorie benützte, steht natürlich gerade die physikalische Diskussion der verwendeten Variationsbedingungen an der Spitze der Untersuchung.[1])

§ 5. Man kann speziell die von Herrn Planck angegebene Spektralgleichung[2])

$$\varphi(\nu, T) = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

zu erhalten wünschen, da sie bekanntlich sehr gut mit der Beobachtung übereinstimmt. Nach dem oben Erörterten kann man da natürlich wieder beliebig verschiedene Formen für die noch zu adjungierende Variationsbedingung wählen. Wir wollen nun diejenige betrachten, die Herr Planck gewählt hat. In der hier benutzten Terminologie würde sie etwa so auszusprechen sein: Die Eigenschwingungen der Frequenz ν sollen nur solche Energiebeträge ε_ν besitzen können, die ganzzahlige Vielfache des Energiequantums

$$\varepsilon_\nu{}^0 = h \cdot \nu = 6{,}548 \cdot 10^{-27} \cdot \nu \; erg \qquad (9)$$

sind; gleichsam als ob für jede Frequenz ν die Schwingungsenergie aus „Energie-Atomen" von der zahlenmäßigen angebbaren Größe

$$\varepsilon_\nu{}^0 = 6{,}548 \cdot 10^{-27} \cdot \nu \; erg$$

bestünde.[3]) Es sei gestattet, diese Bedingung in die in der statistischen Mechanik übliche Form zu bringen. Ich vermochte nicht, sie in volle Übereinstimmung mit der analogen Formulierung zu bringen, die Herr Planck im § 150 der „Vorlesungen" gibt. Wir führen für die Eigenschwingungen der Frequenz ν eine f-g-Bildebene ein. Jede Eigenschwingung hat dort einen Bildpunkt, der ihrem augenblicklichen Schwingungszustand entspricht. Jene Energieatomhypothese besagt dann: Der Bildpunkt einer Eigenschwingung von der Frequenz ν kann nicht jede beliebige Lage auf der Fläche einnehmen; er darf vielmehr nur auf bestimmten Kurven liegen — nämlich auf der Ellipsenschar

$$(\varepsilon_\nu =) \frac{\alpha_\nu}{2} f^2 + \frac{1}{2\beta_\nu} g^2 = m \cdot h\nu, \qquad (10)$$

wo m die Reihe der ganzen Zahlen durchläuft bis zu einem solchen Wert, daß $mh\nu$ den vorgegebenen Wert für die totale Strahlungsenergie bei weiterer Vergrößerung von m überschreiten würde.

Nach diesem Exkurs kehren wir nun noch einmal zu der Frage am Schlusse des § 3 zurück: Durch welches Mittel macht die Plancksche Theorie die unendlich vielen ultravioletten Obertöne des Hohlraumes unschädlich, so daß sie nicht wie bei Rayleigh und Jeans die ganze Energie wegsaugen, sondern daß vielmehr die Spektralkurve nach dem Ultravioletten zu stark abfällt?[1]) Man erkennt nun leicht, wieso der Ansatz (9) für die Größe der Energieatome in diesem Sinne wirken kann: Nach Gleichung (9) wachsen die Planckschen Energieatome mit wachsendem ν über alle Grenzen. Dieser Umstand bildet natürlich an sich keinen ernstlichen physikalischen Einwand; denn wie eine Abschätzung auf Grund der von Herrn Planck gegebenen Zahlen zeigt, hat $\varepsilon_\nu{}^0$ im Gebiet der beobachtbaren Strahlung einen Wert von der Größenordnung der mittleren kinetischen Energie eines Moleküles für $T = 1000$. Wohl aber scheint er für eine Vergleichung der Planckschen Theorie mit Rayleigh-Jeansschen und mit der von H. A. Lorentz gegebenen methodisch bedeutsam zu sein.

Weesen am Wallensee, 28. Juni 1906.

(Eingegangen 2. Juli 1906.)

1) Siehe z. B. Boltzmann: Über das Arbeitsquantum, das bei chemischen Verbindungen gewonnen werden kann. Wien. Ber. Bd. 88 [II], 1883.

2) Über den Weg, auf dem diese Spektralgleichung ursprünglich gefunden wurde, siehe Schluß des § 189.

3) Man kann nun mit Hilfe einer diskontinuierlichen Funktion Φ diese Bedingung auf die Form III bringen oder auch auf direkterem Wege zur Spektralgleichung gelangen. Daß eine physikalische Deutung dieser Festsetzung zurzeit nicht existiert, bespricht Herr Planck an folgenden Stellen: §§ 149, 150, 158, 166, Ende und im Schlußparagraphen des Buches. — Zur Ausführung des § 149 möchte ich bemerken: Das Auftreten der $f(\lambda T)$ im Wienschen Verschiebungsgesetz läßt bis zu einem gewissen Grade erwarten, daß in einer vollständigen Theorie eine universelle Konstante auftreten dürfte, die unter eventueller Assistenz der Boltzmannschen Konstante k und der Lichtgeschwindigkeit c das Argument λT durch Division dimensionslos zu machen hat. Wenn also die obenerwähnte Konstante h, wie § 149 zeigt, die Dimension einer Wirkung d. h. Energie mal Zeit besitzt, so rührt das nur daher, daß der spezielle Ansatz (9) für das Energieatom durch Verwendung des Wienschen Verschiebungsgesetzes gewonnen wurde (§ 148).

1) Vergl. die 1. Anmerkung in § 4.