Bemerkung zu einer neuen Ableitung des Wienschen Verschiebungsgesetzes.

(Antwort auf Herrn Jeans' Entgegnung.[1])

Von Paul Ehrenfest.

I. Das Verschiebungsgesetz besagt: in der Spektralgleichung für die schwarze Strahlung ist $\Phi\lambda^4 T^{-1}$ eine Funktion nur mehr des einzigen Argumentes λT. — In einem neuen Ableitungsversuch dieses Gesetzes möge nun einer der Hauptschritte in folgendem Verfahren bestehen: Aus einer Funktion, über deren Aufbau aus ihren zwei Argumenten nichts bekannt ist, wird die eine der beiden Variabeln weggelassen, weil sie eine Zahl ist, die unter allen in Betracht kommenden Umständen nahe von der Größenordnung 10^{-8} bleibt, „eine Größe, genügend klein, um vernachlässigt zu werden."

Wegen der hohen Bedeutsamkeit, die dem Jeansschen Ableitungsversuch als einer neuen Ausdehnung der dimensionellen Methode zukommt, brachte ich hier außer einer Rekapitulation eine wörtliche Übersetzung jenes Teiles der Abhandlung vor, in dem das oben angeführte Verfahren im einzelnen durchgeführt wird. Ich begnügte mich, durch eine kurze Andeutung zu illustrieren, in welchem Sinne diese Ableitung bei der vorliegenden Gestalt „in einigen Punkten nicht zwingend zu sein scheint". Dabei hatte ich besonders folgenden Passus der Abhandlung im Auge:

> Der Wert von c_1 ist folglich zirka $3{,}6 \times 10^{-8}$, eine Größe genügend klein, um vernachlässigt zu werden. Indem man zur Grenze übergeht, in der c_1 gleich Null gesetzt wird[2]), kann die Funktion $f(c_1, c_2)$ entweder einer bestimmten Grenze $f(0, c_2)$ zustreben oder auch nicht. Hier wollen wir annehmen, daß eine solche Grenze existiert, ohne uns auf eine Diskussion der exakten Bedeutung dieser Annahme einzulassen. Unter dieser Annahme finden wir[3]), daß Φ sehr angenähert in der Form $\Phi = \lambda^{-4} RTf(c_2)$ ausgedrückt werden kann, da der wirkliche Wert von c_1 sehr klein ist."

Herrn Jeans' Entgegnung begnügt sich, neuerlich auf die hier eingreifende Annahme hinzuweisen, ohne auf die angedeutete Diskussion zurückzukommen und fügt nur hinzu, diese Annahme könne richtig oder falsch sein, ergebe sich aber „a posteriori als wahrscheinlich richtig, da sie zum richtigen Ergebnis führt" (nämlich zum Verschiebungsgesetz, um dessen Ableitung es sich hier handelt).

Jene Annahme ist in rein mathematischer Formulierung hingestellt. Mit Rücksicht auf ihre zentrale Stellung in der Ableitung war zu erwarten, daß die Entgegnung für sie eine physikalische Begründung[4]) nachtragen werde. Durch die obige Erklärung wird auf eine solche physikalische Begründung verzichtet.

II. Damit wäre die Erörterung beendet, wenn die Entgegnung nicht noch ausführlich von einem Irrtum spräche, den ich bei der speziellen

1) Jeans, diese Zeitschr. **7**, 667, 1906. Vgl. ferner: Ehrenfest, diese Zeitschr. **7**, 527, 1906.

2) Vgl. Anm. 5 und 10

3) Vgl. Anm. 6.

4) Vgl. Anm. 8.

Formulierung meiner Bemerkung begangen haben soll. Im folgenden wird dieser Vorwurf zurückgewiesen.

Herrn Jeans' Verfahren besteht aus folgenden Stufen:

A. Feststellung, daß c_1 immer nahe von der Größenordnung 10^{-8} bleibt (c_2 hingegen verläuft nahe 10).

B. Einführung der Annahme: die unbekannte Funktion $f(x, y)$ hängt von ihrem ersten Argument derart ab, daß gilt[5]):

$$\lim_{x=0} f(x, y) = \varphi(y).$$

C. Aus dieser Annahme wird gefolgert[6]): Der Wert von $f(x, y)$ wird nicht merklich durch die Änderungen ihres ersten Argumentes beeinflußt, wofern nur x (ohne geradezu Null zu sein) nahe 10^{-8} verläuft (während y nahe z. B. 1 bleibt).

D. Nach A besitzen c_1, c_2 für alle in Betracht kommenden Fälle diejenige Größenordnung, die unter C von den Argumenten der unbekannten Funktion vorausgesetzt werden. Somit würde C ergeben: $f(c_1, c_2)$ merklich nur Funktion von c_2. Also Resultat:

$$\Phi = \lambda^{-4} Tg(\lambda T).$$

Zur Probe auf das Verfahren schlug ich eine andere Wahl der Größen c vor:

$$c_1' \equiv \alpha T \quad c_2' \equiv \beta \lambda T^{9/8},$$

wo $\alpha \equiv Rm^{-1} V^{-2}$ und $\beta \equiv R^{9/8} K e^{-2} m^{-1/8} V^{-1/4}$. Es sind dann αT und $\beta \lambda T^{9/8}$ (genau wie die Größen c_1, c_2) zwei voneinander unabhängige dimensionslose Verbindungen der Naturkonstanten R, m, V, K, e und der Variabeln λ, T. Es tritt da wieder eine unbekannte Funktion $f'(c_1', c_2')$ auf, über deren Aufbau genau so wenig bekannt ist, wie über die Jeanssche Funktion $f(c_1, c_2)$.

A'. Für alle in Betracht kommenden Fälle verläuft[7]) c_1' nahe 10^{-8} und c_2' nahe 10.

B'. Wir stellen die Annahme hin[8]): die unbekannte Funktion $f'(x, y)$ hängt von ihrem ersten Argument x derart ab, daß gilt

$$\lim_{x'=0} f'(x', y') = \varphi'(y')$$

usw. Resultat:

$$\Phi = \lambda^{-4} Tg'(\lambda T^{9/8}).$$

Die Entgegnung besagt, dieses Resultat komme nur durch einen Irrtum meinerseits zustande. „Was ich vernachlässigen will," sagt Herr Jeans, „ist das Verhältnis $\frac{C^2}{V^2}$. Ich will die vereinfachende Annahme einführen, daß die Elektronengeschwindigkeit klein gegen die Lichtgeschwindigkeit ist." Nun komme bei der Wahl c_1, c_2 dieser Quotient nur in c_1, nicht in c_2 vor. Bei der Wahl c_1', c_2' hingegen komme er auch in c_2' vor. Ich hätte also übersehen[9]), daß bei dem Grenzübergang: $\frac{C^2}{V} = 0$ die Größe c_2' im Gegensatz zu c_2 zu Null wird. So würde aus $f'(c_1', c_2')$ hervorgehen $f(o, o)$ und nicht $f'(o, c_2')$, während aus $f(c_1, c_2)$ hervorgehen konnte $f(o, c_2)$. (Vgl. die nähere Ausführung an einem Beispiel in der Entgegnung.)

Ich habe darauf zu erwidern:

Daß das Verhältnis $\frac{C^2}{V^2}$ immer klein wie 10^{-8} ist, wird bei meiner Wahl c_1', c_2' unter A' und D' genau ebenso benutzt, wie bei der Wahl c_1, c_2 unter A und D.

Ein Grenzübergang $\frac{C^2}{V^2} = 0$ aber, ist an keinem einzigen Punkt des Verfahrens zu vollziehen.[10]) Dementsprechend liegt keinerlei Irrtum meinerseits vor.

Man sieht: In dem Verfahren gibt es keinen Punkt, demgegenüber die Wahl c_1, c_2 vor der (zur Probe eingeführten) Wahl c_1', c_2' ausgezeichnet wäre. Somit bleibt meine Bemerkung aufrecht, daß das Jeanssche Verfahren in seiner

5) Wenn es im § 5 an dieser Stelle heißt: „indem man zur Grenze übergeht, in der c_1 gleich Null gesetzt wird....", so erweckt diese abgekürzte Ausdrucksweise leicht den Eindruck, als ob an dieser Stelle des Verfahrens ein Grenzübergang: Quotient aus Elektronengeschwindigkeit durch Lichtgeschwindigkeit $= 0$ eingreift. Die oben durchgeführte, etwas weitläufigere Schreibweise beugt dieser Verwirrung vor. In der Tat handelt es sich hier nur um den Bau der Funktion $f(x, y)$, nämlich um die Frage: Was geschieht, wenn man in der unbekannten Funktion an allen Stellen, an denen die Größe c_1 steht, sie durch die konstante Größe Null ersetzt. $c_1 \equiv m^{-1} V^{-2} RT$ selber bleibt natürlich für das ganze Verfahren nahe 10^{-8} und nirgends kommt in Frage, was wohl alles geschehen würde, wenn $m^{-1} V^{-2} RT$ statt 10^{-8}, Null wäre. (Vgl. dazu Anm. 10.)

6) Eigentlich darf dies noch nicht ohne weiteres gefolgert werden. — Beispiel: Seien $\Gamma(y)$ und $\gamma(y)$ zwei Funktionen von solchem Bau, daß für y nahe 1, $\Gamma(y)$ groß gegen $\gamma(y)$ ist. Sei ferner

$$f(x, y) = \gamma(y) - \frac{\Gamma(y)}{\log x}.$$

Es ist dann zwar $\lim_{x=0} f(x, y) = \gamma(y)$. Aber für x nahe 10^{-8}, y nahe 1 wird der Wert von f noch beliebig stark durch Änderungen von x beeinflußt werden können. — Diese Bemerkung ist hier lediglich der logischen Vollständigkeit halber angeführt. Denn dieser spezielle Punkt ließe sich durch eine etwas andere Formulierung der Annahme B wohl leicht erledigen.

7) Es ist nämlich $c_1' = c_1$ und $c_2' = c_1^{1/8} c_2$.

8) Solange für die analoge Annahme unter B eine physikalische Begründung fehlt, ist die Annahme B genau so willkürlich, wie die Annahme B'. Sollten B und B' einander widersprechen, so kann man a priori nicht wissen, welche von beiden Annahmen unrichtig ist.

9) Vgl. in meiner Bemerkung den Hinweis: „Zur Vorsicht wurde c_2' so gewählt, daß es dieselbe Größenordnung besitzt wie c_2."

10) Vgl. Anm. 5. Sollte ich hier doch Herrn Jeans' Meinung mißverstanden haben, so glaube ich folgende Fragen stellen zu dürfen: 1. Wo greift in seinem Verfahren die Annahme: Elektronengeschwindigkeit durch Lichtgeschwindigkeit $= 0$ (statt 10^{-8}) ein? 2. Wie ist dieser Grenzübergang zu verstehen? Soll dabei die Temperatur zu Null werden — dann würde aber c_2 gerade so zu Null wie c_2'. Oder soll die Lichtgeschwindigkeit ∞ werden? Oder soll die Elektronenmasse $= \infty$ angenommen werden?

vorläufigen Gestalt je nach der Wahl der Verbindungen c_1, c_2 noch zu ganz verschiedenen Resultaten führt und als Ableitung des Verschiebungsgesetzes „in einigen Punkten nicht zwingend zu sein scheint".

III. Ich erlaube mir, noch die Absicht anzugeben, die ich bei der Aufwerfung meiner Frage hatte. Die Gestalt des Verschiebungsgesetzes $\Phi = \lambda^{-4} Tg(\lambda T)$ macht wahrscheinlich, daß in einer vollständigen Theorie der schwarzen Strahlung eine universelle Konstante auftreten wird, die unter Mithilfe der Boltzmann-Maxwellschen Konstanten R und eventuell der Lichtgeschwindigkeit V das Argument λT dimensionslos zu machen hat.[11]) Das dimensionelle Verfahren, das Herr Jeans in der vorliegenden Arbeit einschlägt, führt offenbar zu Spekulationen über den Aufbau dieser universellen Konstanten und zwar würde sich hier die Verbindung Radius mal Energie des Elektrons als bedeutsam erweisen. Nun schien mir, daß die Zuverlässigkeit einer solchen Spekulation vermehrt würde, wenn die rein mathematischen Hypothesen, die unter B und C eingreifen, durch eine physikalische Argumentierung gestützt werden könnten. In der Erwartung einer solchen Ergänzung hatte ich meine Frage Herrn Jeans mitgeteilt und hier vorgebracht.

Göttingen, Oktober 1906.

11) Vgl. Planck, Vorlesg. über Wärmestrahlung, § 149.

(Eingegangen 23. Oktober 1906.)