Sonderabdruck aus No. 12 Jahrgang 6 der „Mathematisch-Naturwissenschaftliche Blätter".

Graphische Veranschaulichung des einfachsten Falles von ungleichförmiger Reihenkonvergenz.

P. Ehrenfest-Petersburg.

Man begegnet in der Reihen-Theorie häufig folgendem Vorkommnis: Eine Reihe $\sum\limits_{0}^{\infty} u_z(x)$ konvergiert in jedem Punkt des Intervalles $0 \leqq x \leqq 1$. Speziell auch in dem inneren Punkt $x = a$. Aber bei Annäherung an $x = a$ von links und rechts wird die Konvergenz unbegrenzt langsamer; d. h. in der Umgebung von $x = a$ konvergiert die Reihe nur ungleichmäßig.[1])

Es sei gestattet kurz anzudeuten, wie man sich den Unterschied zwischen gleichmäßiger Konvergenz und diesem einfachsten Fall ungleichmäßiger Konvergenz graphisch veranschaulichen kann.

Da die Reihe in allen Punkten des Intervalles konvergieren soll, so genügt der Rest der Reihe

$$R_n(x) = \sum_{n+1}^{\infty} u_z(x)$$

folgender Aussage: Gibt man vor 1. ein beliebig kleines ε; 2. einen beliebigen Punkt x des Intervalles, so läßt sich dazu eine ganze Zahl $N(x, \varepsilon)$ finden, sodaß

$$|R^n(x)| < \varepsilon$$

ausfällt, falls man nur irgendwie

$$n \geqq N(x, \varepsilon)$$

nimmt. [Die Funktion $N(x, \varepsilon)$ gibt also an, wie viel Glieder der Reihe man mindestens mitnehmen muß, um im Punkt x den Fehler unter ε herabzudrücken; sie liefert somit ein Maß für die Konvergenzgeschwindigkeit in den verschiedenen Punkten des Intervalles.]

Man denke $N(x, \varepsilon)$ für ein bestimmtes ε als Funktion von x gezeichnet. Man erhält eine Treppenkurve. Verlangt man zunächst, daß die Reihe im ganzen Intervall gleichmäßig konvergiert, so heißt das definitionsgemäß:

Zu jedem noch so kleinen ε läßt sich eine ganze Zahl $M(\varepsilon)$ finden, so daß die Treppenkurve $y = N(x, \varepsilon)$ im ganzen Intervall nirgendwo die Höhe $M(\varepsilon)$ übersteigt.

Ganz anders, falls man verlangt, daß die Reihe in der Umgebung des Punktes $x = a$ nur mehr ungleichmäßig konvergiert: Allerdings wird auch hier für ein beliebig kleines ε die Funktion $N(x, \varepsilon)$ in jedem Punkt des Intervalles einen bestimmten endlichen Wert besitzen. Speziell auch in $x = a$ den endlichen Wert $N(a, \varepsilon)$. Aber bei unbegrenzter Annäherung an $x = a$ von rechts oder links her wächst $N(x, \varepsilon)$ über jede angebbare Größe hinaus. $N(a, \varepsilon)$ ist endlich, aber

$$\lim_{x = a + 0} N(x, \varepsilon) = +\infty$$

---

[1]) Für eine erste Orientierung über den Begriff der ungleichmäßigen Konvergenz sind die Bemerkungen sehr instruktiv, mit denen Ph. L. Seidel seine Arbeit „Ueber eine Eigenschaft der Reihen, welche diskontinuierliche Funktionen darstellen", einleitet. (Ostw. Class 116). Vergl. ferner Osgood: Funktionentheorie pg. 69 u. f.

Die Figur erläutert schematisch[5]) wie sich $N(x, \varepsilon)$ in der Umgebuug von $x = a$ verhalten mag, falls ε genügend klein genommen wird.