

# ARCHIVES NÉERLANDAISES

DES

Sciences exactes et naturelles.

---

## LES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT DES GAZ,

ET LA PROPAGATION DU SON SUIVANT LA THÉORIE CINÉTIQUE  
DES GAZ,

PAR

H. A. LORENTZ.

---

Peu de temps après l'apparition du premier mémoire de M. Clausius sur la théorie moléculaire des gaz, M. Jochmann <sup>1)</sup> objecta que cette théorie serait incapable de rendre compte des phénomènes du mouvement des gaz, notamment de ceux du mouvement sonore. Il avait été conduit à cette objection par l'idée que la nouvelle manière de voir pourrait bien expliquer la pression d'un gaz sur un autre corps, mais non la pression mutuelle de couches gazeuses juxtaposées.

Dès que M. Clausius eut montré que les molécules des gaz ne viennent pas seulement se heurter à un corps étranger, mais entrent très souvent aussi en collision entre elles, cette difficulté s'évanouit et la possibilité d'une explication dut être concédée. Aussi divers physiciens traitèrent-ils, depuis ce temps,

---

<sup>1)</sup> Pogg. *Ann.*, t. 108.

les deux questions suivantes : Quelle est dans la nouvelle théorie le mécanisme du mouvement sonore, en d'autres termes, comment se comportent les molécules gazeuses lors de ce mouvement, et quelle relation existe-t-il entre la vitesse du son  $V$  et la vitesse moyenne  $V'$  des molécules ?

M. Stefan <sup>1)</sup> et M. Roiti <sup>2)</sup>, sans entrer dans beaucoup de détails sur la première de ces questions, essayèrent de résoudre la seconde.

Le premier de ces savants trouva  $\frac{V}{V'} = \sqrt{\frac{1}{3}}$ , le second successivement  $\frac{V}{V'} = \frac{1}{2}$  et  $= \frac{2}{3}$ , résultats dont aucun n'est, en général, d'accord avec l'expérience. Postérieurement, M. Roiti a tâché d'obtenir un résultat meilleur en admettant que dans le mouvement sonore les molécules ne se meuvent plus d'une manière égale dans toutes les directions; mais, dans l'analyse <sup>3)</sup> de son Mémoire, qui seule m'a été accessible, je n'ai pas trouvé l'exposition approfondie des raisons sur lesquelles il fonde cette opinion.

Une réponse à la première des deux questions susdites a été donnée par M. Tolver Preston <sup>4)</sup>. L'auteur, toutefois, se bornant à des considérations très élémentaires, n'est pas en état de calculer la valeur de  $V$ . Il mentionne seulement que M. Maxwell, pour un gaz monoatomique, dont les molécules sont regardées comme des sphères élastiques, a obtenu pour  $\frac{V}{V'}$  la valeur  $\frac{\sqrt{5}}{3}$ , qui, à en juger par les expériences de MM. Kundt et Warburg <sup>5)</sup> sur la vapeur du mercure, est exacte.

<sup>1)</sup> Pogg. Ann., t. 118.

<sup>2)</sup> Atti della R. Accad. dei Lincei (3) I.

<sup>3)</sup> Pogg. Ann., Beibl. t. 2.

<sup>4)</sup> Phil. Mag. (5) III.

<sup>5)</sup> Pogg. Ann., t. 157.

M. Hoorweg <sup>1)</sup> a abordé le problème par la voie mathématique, mais, à mon avis, on ne saurait regarder cette tentative comme ayant été couronnée de succès. Diverses objections y ont déjà été faites par M. Rink <sup>2)</sup>; ici, il suffira de faire remarquer qu'en réalité M. Hoorweg n'a déduit de la nouvelle théorie que l'équation de la continuité. Quant à ses autres équations, il les obtient en posant d'abord, sans démonstration suffisante, me semble-t-il, une équation intégrale de la même forme que celle qu'on rencontre dans l'ancienne théorie du son <sup>3)</sup>. M. Rink lui-même arrive à la conclusion que les conséquences déduites de la théorie cinétique des gaz ne cadrent pas avec ce qu'on observe dans la propagation du son. Plus loin je reviendrai sur les raisonnements qui l'ont conduit à cette conclusion.

Si les savants qui viennent d'être cités n'ont pas réussi à donner une explication satisfaisante du mouvement sonore, M. Maxwell, bien que ne s'étant pas occupé expressément de la question, a indiqué la voie dans laquelle cette explication doit être cherchée. Dans son second Mémoire <sup>4)</sup> sur la théorie des gaz, il a, en effet, établi les *équations du mouvement* de ces corps, ce qui suffit pleinement pour expliquer le mouvement du son. Tant que M. Maxwell n'introduit aucune hypothèse particulière sur l'action réciproque des molécules gazeuses, il n'obtient toutefois les équations du mouvement que sous une forme générale, qui ne suffit pas aux applications <sup>5)</sup>; elles contiennent, en effet, les composantes de la pression, sans que celles-ci soient présentées comme dépendantes de la densité, de la température et du mouvement du gaz. Pour arriver à exprimer cette dépendance, il est fait usage de l'hypothèse que les molécules se repoussent avec une force inversement proportionnelle à la cinquième puissance de la distance. Une pareille hypothèse

<sup>1)</sup> *Arch. néerl.*, t. XI.

<sup>2)</sup> *Arch. néerl.*, t. XII.

<sup>3)</sup> *loc. cit.*, p. 139, 140.

<sup>4)</sup> *Phil. Mag.* (4) XXXV.

<sup>5)</sup> *loc. cit.*, p. 198.

pouvant difficilement être acceptée, il faut chercher à en affranchir l'établissement des équations du mouvement. Cette modification faite, les considérations de M. Maxwell ne laissent plus à désirer, sous le rapport de la rigueur, qu'en ce qui concerne les gaz polyatomiques.

J'ai en conséquence essayé d'établir, pour ces gaz aussi, les équations du mouvement, sans recourir à des hypothèses particulières sur l'action réciproque des molécules. Lorsqu'on veut seulement donner en traits généraux une explication du mouvement sonore, on peut s'en tenir à la considération de dérangements infiniment petits de l'état d'équilibre, et négliger les forces extérieures, ainsi que le frottement interne et la conductibilité calorifique. Mais, en vue d'autres applications des équations du mouvement, j'ai admis dès le début l'existence de forces extérieures et de dérangements finis, et plus tard j'ai aussi fait entrer en ligne de compte le frottement et la conductibilité calorifique.

### § 1. Etablissement de l'équation fondamentale.

Dans l'étude des mouvements moléculaires des gaz polyatomiques, nous suivrons la marche indiquée par M. Boltzmann <sup>1)</sup>; l'objet propre de la recherche sera donc la manière dont les différents états de mouvement sont répartis sur les différentes molécules.

La détermination de cet état pour une molécule — que nous supposons pour le moment dégagée de toute influence de la part des autres — exige qu'on connaisse, pour chaque temps  $t$ , d'abord les composantes  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  de la vitesse de son centre de gravité suivant trois axes perpendiculaires entre eux, et en second lieu les coordonnées relatives, prises par rapport à ce même centre de gravité, de chacun des points matériels dont la molécule est composée. Or, si l'on connaissait la composition de la molécule

<sup>1)</sup> *Wiener Sitzungsber*, 2<sup>te</sup> Abth., t. 63, p. 399; t. 66, p. 336.

et les forces que ses éléments constitutants exercent les uns sur les autres, on pourrait établir les équations différentielles du mouvement relatif de ces éléments, équations qui sont tout à fait indépendantes des forces extérieures agissant sur le gaz, lorsque celles-ci, comme nous l'admettrons, donnent à tous les éléments de la molécule une même accélération.

Si, ensuite, il était possible d'intégrer les susdites équations du mouvement, toutes les coordonnées relatives seraient trouvées en fonction de  $t$ . Dans les expressions ainsi obtenues entreraient un certain nombre de constantes, qui pourraient être déterminées si l'on connaissait, pour un seul instant, la position mutuelle et les vitesses des éléments constitutants; nous nommerons ces constantes les paramètres du mouvement intramoléculaire.

Pour l'un de ces paramètres on pourra toujours prendre la somme  $E$  de l'énergie potentielle des éléments constitutants et de l'énergie actuelle de leur mouvement relatif par rapport au centre de gravité commun; quant aux autres paramètres, nous les désignerons par  $p_1, p_2, \dots p_k$ . Il est clair que si, à un moment quelconque  $t$ , les quantités  $\xi, \eta, \zeta, E, p_1, \dots p_k$  sont connues pour une molécule, l'état de mouvement de celle-ci est entièrement déterminé; dans ce qui va suivre, ce sont donc ces quantités que nous emploierons pour le but en question.

Tant que chaque molécule se meut en dehors de l'influence des autres, les seules quantités  $\xi, \eta, \zeta$  varient par l'effet des forces extérieures, tandis que  $E, p_1, \dots p_k$  restent constantes. Mais il n'en est plus ainsi quand une molécule  $A$  se rapproche assez d'une autre pour qu'une action réciproque s'exerce entre elles. Nous admettrons qu'au bout d'un temps très court les deux molécules ont échappé à cette influence mutuelle, sans avoir eu à subir une séparation ou un échange de leurs éléments constitutants. Après cette rencontre ou ce choc, l'état de mouvement de la molécule  $A$  peut de nouveau être représenté de la même manière qu'avant la rencontre; seulement,  $E, p_1 \dots p_k$  auront pris de nouvelles valeurs, tout aussi bien que  $\xi, \eta, \zeta$ .

Or, le résultat de ces rencontres doit être que les molécules



qui se trouvent dans une portion déterminée de l'espace auront des états de mouvement très différents, répartis entre elles suivant une certaine loi. Si l'état du gaz est variable d'un point à l'autre et d'un instant à l'autre, la forme de cette loi dépendra aussi du lieu et du temps. Mathématiquement, cela peut s'exprimer de la manière suivante. Soit  $d\lambda$  un élément de volume situé au point  $(x, y, z)$ , et admettons que cet élément contienne encore un grand nombre de molécules. Parmi toutes celles qui s'y trouvent au temps  $t$ , prenons un groupe déterminé, à savoir celles pour lesquelles les composantes de la vitesse du centre de gravité et les paramètres du mouvement interne sont respectivement compris entre

$$\xi \text{ et } \xi + d\xi, \eta \text{ et } \eta + d\eta, \zeta \text{ et } \zeta + d\zeta, E \text{ et } E + dE, \\ p_1 \text{ et } p_1 + dp_1, \dots p_k \text{ et } p_k + dp_k;$$

le nombre de ces molécules peut alors être représenté par

$$F(\xi, \eta, \zeta, E, p_1, \dots p_k, x, y, z, t) d\xi d\eta d\zeta dE dp_1 \dots dp_k \quad (1)$$

en posant

$$d\lambda = d\xi d\eta d\zeta dE dp_1 \dots dp_k.$$

Si la fonction  $F$ , que nous venons d'introduire, est déterminée, on connaît complètement l'état du gaz et on peut calculer toutes les quantités qui s'y rattachent. Veut-on trouver, par exemple, le nombre total des molécules contenues dans l'élément  $d\lambda$ , on devra intégrer l'expression (1) par rapport à  $\xi, \eta, \zeta, E, p_1 \dots p_k$ , pour toutes les valeurs que ces variables peuvent présenter. En indiquant cette opération par un seul signe d'intégration, on aura donc pour le nombre cherché:  $N d\lambda$ , si

$$N = \int F d\lambda.$$

Par une semblable intégration on peut trouver aussi, pour toutes les molécules comprises dans  $d\lambda$ , la valeur moyenne d'une

quantité quelconque  $\varphi$  dépendant de l'état de mouvement, c'est-à-dire, de  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ ,  $E$ ,  $p_1$ , . . .  $p_k$ . Cette valeur est :

$$\frac{1}{N} \int F \varphi d\lambda.$$

Si l'on calcule de cette manière les valeurs moyennes  $u$ ,  $v$ ,  $w$  de  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , on obtient les composantes de la vitesse que l'élément  $d\lambda$  paraît posséder dans son ensemble et que nous pouvons appeler la *vitesse hydrodynamique*.

Pour trouver maintenant un moyen de déterminer la fonction  $F$ , considérons à un moment donné le groupe de molécules dont (1) est le nombre, et suivons-les dans leur trajet pendant un temps infiniment court  $dt$ . Ne tenons d'abord aucun compte des chocs. La vitesse ( $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ ) pouvant être regardée comme la même pour toutes les molécules dont il s'agit, nous pouvons nous représenter que l'élément  $d\lambda$  se déplace simplement avec cette vitesse, en conservant sa forme et sa grandeur, et en emportant avec lui le groupe de molécules. A la fin du temps  $dt$ , ces molécules se trouveront donc dans l'élément  $d\lambda$  au point  $(x + \xi dt, y + \eta dt, z + \zeta dt)$ . Les paramètres du mouvement intramoléculaire n'ont pas changé et sont donc toujours compris entre les limites assignées ci-dessus.

Mais, en vertu des forces extérieures, les composantes de la vitesse des centres de gravité des molécules ont subi certains accroissements, que nous pouvons supposer égaux pour toutes les molécules considérées. En nous bornant au cas où les forces dépendent d'une fonction potentielle, nous pouvons représenter les accroissements en question par  $\frac{\partial \psi}{\partial x} dt$ ,  $\frac{\partial \psi}{\partial y} dt$ ,  $\frac{\partial \psi}{\partial z} dt$ , de sorte qu'à la fin du temps  $dt$  les vitesses se trouveront entre les limites :

$$\begin{aligned} \xi + \frac{\partial \psi}{\partial x} dt \text{ et } \xi + \frac{\partial \psi}{\partial x} dt + d\xi, \\ \eta + \frac{\partial \psi}{\partial y} dt \text{ „ } \eta + \frac{\partial \psi}{\partial y} dt + d\eta, \\ \zeta + \frac{\partial \psi}{\partial z} dt \text{ „ } \zeta + \frac{\partial \psi}{\partial z} dt + d\zeta. \end{aligned}$$

Voyons maintenant quel sera l'effet des chocs. Durant le temps  $dt$ , quelques molécules du groupe considéré rencontreront d'autres molécules, et par suite de cette rencontre elles prendront un nouvel état de mouvement, c'est-à-dire qu'elles sortiront du groupe. En revanche, d'autres molécules, qui primitivement n'appartenaient pas au groupe, acquerront, à la suite de chocs, des mouvements tels que dorénavant elles en feront partie. Or, comme le nombre  $A$  des molécules qui abandonnent le groupe ne sera pas, en général, égal au nombre  $B$  de celles qui y entrent, à la fin du temps  $dt$  nombre des molécules douées de l'état de mouvement considéré, dans l'élément  $dl$ , dépassera de  $B-A$  le nombre indiqué en (1).

Si la fonction  $F$  et l'action réciproque des molécules étaient connues, on pourrait calculer la quantité  $A$ . A la rigueur, il y aurait lieu de tenir compte, dans ce calcul, de ce que, durant le temps  $dt$ , l'élément  $dl$ , qui contient les molécules, change continuellement d'entourage, et aussi de ce que les vitesses des molécules du groupe subissent des modifications. Attendu toutefois que la quantité  $A$ , de même que  $dt$ , est infiniment petite, et que le changement d'entourage de  $dl$  et l'accroissement des vitesses sont l'un et l'autre des infiniment petits du même ordre, il est évident qu'on pourra négliger, comme infiniment petit du second ordre, l'influence de ces deux circonstances sur  $A$ . En d'autres termes, pour calculer  $A$ , on peut se figurer une masse gazeuse  $P$  sur laquelle n'agit aucune force extérieure, et dont l'état est partout le même que dans le gaz considéré, au point  $(x, y, z)$  et au temps  $t$ ;  $A$  est alors, dans un élément fixe  $dl$  de cette masse gazeuse le nombre des chocs où l'une des molécules avait, avant le choc, un état de mouvement compris entre  $\xi$  et  $\xi + d\xi$ , etc. Naturellement,  $A$  est proportionnel à  $dl$ , à  $d\xi$  et à  $dt$ ; en posant  $A = a dl d\xi dt$ ,  $a d\xi dt$  est le nombre des rencontres, de la susdite espèce, qui auraient lieu dans l'unité de volume de  $P$ . Si l'on représente de même par  $b d\xi dt$  le nombre des chocs dans lesquels une des molécules acquiert, après la rencontre, l'état de mouvement ci-dessus spécifié, on a  $B = b dl d\xi dt$ .



De ce qui précède, il suit que

$$F(\xi, \eta, \zeta, E, p_1, \dots, p_k, x, y, z, t) d\lambda dl + (b - a) d\lambda dl dt \dots (2)$$

sera le nombre des molécules qui, au temps  $t + dt$ , se trouvent dans l'élément  $dl$  au point  $(x + \xi dt, y + \eta dt, z + \zeta dt)$ , et pour lesquelles les quantités qui déterminent l'état de mouvement sont respectivement comprises entre :

$$\xi + \frac{\partial \psi}{\partial x} dt \text{ et } \xi + \frac{\partial \psi}{\partial x} dt + d\xi, \text{ etc.}$$

$$E \text{ et } E + dE, \text{ etc.}$$

D'un autre côté, on devra obtenir le nombre de ces molécules en faisant subir à  $\xi, \eta, \zeta, x, y, z, t$ , dans l'expression (1), les accroissements  $\frac{\partial \psi}{\partial x} dt, \frac{\partial \psi}{\partial y} dt, \frac{\partial \psi}{\partial z} dt, \xi dt, \eta dt, \zeta dt, dt$ .

L'expression ainsi modifiée étant égalée à (2), on trouve :

$$b - a = \frac{\partial F}{\partial \xi} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \eta} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \zeta} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial x} \xi + \frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{\partial F}{\partial z} \zeta + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (\text{I}).$$

Comme, aussitôt la fonction  $F$  connue, il serait possible, par la considération des chocs, de trouver  $a$  et  $b$  en fonction de  $\xi, \dots, p_k, x, y, z, t$ , on peut regarder (I) comme une équation propre à déterminer  $F$ . C'est l'équation fondamentale pour tous les problèmes qui ont rapport au mouvement des molécules gazeuses <sup>1)</sup>.

## § 2. Les équations du mouvement sous leur forme générale.

De l'équation fondamentale (I) on peut, sans faire d'hypothèses particulières sur l'action réciproque des molécules, déduire plu-

<sup>1)</sup> L'équation (I) équivaut à l'équation (44) de M. Boltzmann (*Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen*, dans: *Wiener Sitzungsber.*, 2<sup>te</sup> Abth., Bd. 66).

sieurs conséquences. Vu la signification sus-indiquée de  $a d\lambda dt$ , il est évident qu'en intégrant cette quantité par rapport à  $\xi, \dots p_k$  on doit obtenir le nombre total des molécules qui, dans l'unité de volume de la masse gazeuse  $P$ , subissent un choc durant le temps  $dt$ . Mais le même nombre s'obtient aussi par l'intégration de  $b d\lambda dt$ ; on a donc :

$$\int (b-a) d\lambda = 0.$$

Il suit en outre, du principe du mouvement du centre de gravité, que si, pour tous les chocs qui durant le temps  $dt$  ont lieu dans l'unité d'espace de  $P$ , on prend d'abord la somme des quantités de mouvement des molécules dans la direction de l'axe des  $x$  avant les chocs, puis cette même somme après que les molécules ont subi le choc, on doit trouver des résultats égaux. En nommant  $m$  la masse d'une molécule, la première somme est  $m dt \int a \xi d\lambda$ , la seconde  $m dt \int b \xi d\lambda$ , de sorte qu'on doit avoir :

$$\int (b-a) \xi d\lambda = 0,$$

et de même, naturellement :

$$\int (b-a) \eta d\lambda = \int (b-a) \zeta d\lambda = 0.$$

Enfin, une conséquence analogue se déduit encore du principe de la conservation de l'énergie. Si l'on pose  $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = r^2$ , l'énergie d'une molécule est  $\frac{1}{2} m r^2 + E$ , et on a l'équation :

$$\int (b-a) \left( \frac{1}{2} m r^2 + E \right) d\lambda = 0.$$

Ainsi, en multipliant le second membre de l'équation (I) par une des quantités  $d\lambda$ ,  $\xi d\lambda$ ,  $\eta d\lambda$ ,  $\zeta d\lambda$ ,  $(\frac{1}{2} m r^2 + E) d\lambda$ ,

puis intégrant par rapport à  $\xi, \eta, \zeta \dots p_k$ , on doit obtenir 0.

Pour donner aux cinq équations qui résultent de là une forme plus concise, nous introduirons, outre les vitesses hydrodynamiques  $u, v, w$ , les quantités suivantes :

$$\begin{aligned} \int F \xi^2 d\lambda &= P_x, & \int F \eta^2 d\lambda &= P_y, & \int F \zeta^2 d\lambda &= P_z; \\ \int F \xi \eta d\lambda &= Q_{x,y}, & \int F \eta \zeta d\lambda &= Q_{y,z}, & \int F \zeta \xi d\lambda &= Q_{z,x}; \\ \int F \left( \frac{1}{2} m r^2 + E \right) d\lambda &= R; \\ \int F \xi \left( \frac{1}{2} m r^2 + E \right) d\lambda &= S_x, & \int F \eta \left( \frac{1}{2} m r^2 + E \right) d\lambda &= S_y, \\ \int F \zeta \left( \frac{1}{2} m r^2 + E \right) d\lambda &= S_z. \end{aligned} \quad \dots (3)$$

Pour qu'à l'aide de ces quantités — qui naturellement sont encore des fonctions de  $x, y, z, t$ , — on puisse écrire les équations, il ne faut pas perdre de vue, quand il s'agit des termes qui contiennent une des expressions  $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}, \frac{\partial F}{\partial t}$ , que, dans l'intégration par rapport à  $\xi, \dots p_k$ , les quantités  $x, y, z, t$  doivent être regardées comme des paramètres constants, de sorte qu'on a, par exemple :

$$\int \frac{\partial F}{\partial x} \xi^2 d\lambda = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \int F \xi^2 d\lambda \right] = \frac{\partial P_x}{\partial x}.$$

La valeur, au contraire, des intégrales qui contiennent  $\frac{\partial F}{\partial \xi}, \frac{\partial F}{\partial \eta}$  ou  $\frac{\partial F}{\partial \zeta}$  peut être trouvée au moyen de l'intégration par parties, en observant d'ailleurs que  $F$  disparaît pour des valeurs infiniment grandes de  $\xi, \eta$  ou  $\zeta$ ; en effet, les molécules à très grande vitesse seront tout au moins très rares. On aura donc, par exemple :

$$\int \frac{\partial F}{\partial \xi} \left( \frac{1}{2} m r^2 + E \right) d\lambda = - \int F \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{2} m r^2 + E \right) d\lambda = - m N u.$$

Les cinq équations cherchées prennent, en définitive, la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial (N u)}{\partial x} + \frac{\partial (N v)}{\partial y} + \frac{\partial (N w)}{\partial z} + \frac{\partial N}{\partial t} = 0, \dots (a_1) \\ & \left. \begin{aligned} - N \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_{x,y}}{\partial y} + \frac{\partial Q_{z,x}}{\partial z} + \frac{\partial (N u)}{\partial t} &= 0, \\ - N \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial Q_{x,y}}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial Q_{y,z}}{\partial z} + \frac{\partial (N v)}{\partial t} &= 0, \\ - N \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial Q_{x,z}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{y,z}}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z} + \frac{\partial (N w)}{\partial t} &= 0, \end{aligned} \right\} \dots (b_1) \\ & - m N \left( u \frac{\partial \psi}{\partial x} + v \frac{\partial \psi}{\partial y} + w \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial S_y}{\partial y} + \frac{\partial S_z}{\partial z} + \frac{\partial R}{\partial t} = 0, \dots (c_1) \end{aligned}$$

Chacun des termes de ces équations a une signification très simple, de sorte que ces équations auraient pu être établies directement. C'est ainsi, par exemple, que  $(c_1)$  exprime comment l'énergie varie à l'intérieur d'un élément de volume stationnaire  $dx dy dz$ . Cette énergie est  $R dx dy dz$ , et elle peut changer seulement à raison de l'influence des forces extérieures, représentée par le terme  $- m N \left( u \frac{\partial \psi}{\partial x} + v \frac{\partial \psi}{\partial y} + w \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)$ , et à raison de l'entrée et de la sortie d'une certaine quantité d'énergie par les faces latérales de l'élément, quantité que fournissent les termes  $\frac{\partial S_x}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial S_y}{\partial y}$  et  $\frac{\partial S_z}{\partial z}$  de l'équation  $(c_1)$ .

De même,  $(a_1)$  et  $(b_1)$  donnent la variation du nombre des molécules et de la quantité de mouvement à l'intérieur d'un élément de volume stationnaire.

Quelques transformations fort simples suffisent pour montrer que l'équation  $(a_1)$  concorde avec l'équation bien connue de la

continuité, et que les relations  $(b_1)$  correspondent aux équations qui, dans la théorie générale des mouvements intérieurs d'un corps, expriment l'accélération d'un élément en fonction des forces extérieures et des pressions ou tensions normales ou tangentielles. En étudiant de plus près cette correspondance, on reconnaît, par exemple, que les composantes de la pression sur un plan perpendiculaire à l'axe des  $x$ , qui entrent dans la théorie susdite, sont analogues aux quantités  $m(P_x - Nu^2)$ ,  $m(Q_{x,y} - Nuv)$ ,  $m(Q_{z,x} - Nwu)$ .

§ 3. Première approximation, dans laquelle on néglige le frottement interne et la conductibilité calorifique.

Pour rendre les équations  $(a_1)$ ,  $(b_1)$  et  $(c_1)$  propres à la solution des problèmes sur le mouvement des gaz, nous devons chercher la valeur des quantités  $P_x$ , etc. A cet effet, il est nécessaire de considérer de plus près la fonction  $F$ .

Le cas le plus simple qui puisse se présenter est celui d'une masse gazeuse homogène, sur laquelle n'agit aucune force extérieure et qui se trouve dans un état stationnaire, où l'ensemble de la masse est en repos. La fonction  $F$  sera alors évidemment indépendante de  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Elle ne renfermera pas non plus  $t$ , si nous faisons une hypothèse déterminée. Nous admettrons, en effet, que, si à partir d'un moment quelconque les chocs cessaient, chaque molécule étant dorénavant abandonnée à elle-même, l'état resterait stationnaire <sup>1)</sup>; en d'autres termes, que

<sup>1)</sup> Ceci exige une explication. Chaque molécule se trouvant continuellement amenée, par son mouvement interne, dans un autre état, ou, si l'on veut, dans une autre phase de mouvement, il pourrait très bien se faire que l'état du gaz fût modifié par les mouvements internes. Pour qu'il n'en soit pas ainsi, il faut qu'à chaque instant il y ait un grand nombre de molécules possédant des mouvements internes tout à fait semblables, mais arrivées aux phases les plus diverses, avec cette condition que, lorsque quelques-unes de ces molécules passent de la phase  $A$  dans une autre, un même nombre de molécules entrent dans la phase  $A$ .



les chocs ne sont pas nécessaires à l'entretien de l'état stationnaire (une fois établi), que, au contraire, ils ne changent absolument rien à l'état. Or, s'il n'y avait pas de chocs,  $F$  ne varierait pas avec le temps, et il doit donc en être de même lorsque des chocs s'opèrent.

La détermination de cette fonction  $F$ , indépendante de  $x, y, z, t$ , a occupé M. Maxwell et M. Boltzmann. Nous ne ferons toutefois pas usage de la forme qu'ils ont trouvée pour cette fonction. Remarquons seulement que  $F$ , comme l'a montré M. Boltzmann, est déterminée sans la moindre équivoque lorsqu'on connaît la densité et la température, autrement dit, lorsque sont donnés le nombre  $N$  de molécules dans l'unité de volume et la moyenne  $h$  du carré de la vitesse. Ces deux quantités doivent donc entrer dans  $F$  en qualité de paramètres, la première naturellement à l'état de facteur; de sorte que nous pouvons poser:

$$F = N F_0 (\xi, \eta, \zeta, E, p_1, \dots, p_k, h).$$

On a de plus:

$$\int F_0 d\lambda = 1, \int F_0 \xi d\lambda = \int F_0 \eta d\lambda = \int F_0 \zeta d\lambda = 0, \int F_0 r^2 d\lambda = h \dots (4).$$

Dans la forme de la fonction  $F_0$  doit être exprimée, bien entendu, la propriété que, à l'état stationnaire ici considéré, les molécules se meuvent de la même manière suivant toutes les directions, et aussi que, pour une direction déterminée du mouvement de la molécule, les mouvements intramoléculaires s'opèrent de la même manière tout autour de cette direction. Il ne s'ensuit pas, toutefois, que  $F_0$  ne dépendra, outre de  $E, p_1 \dots p_k$ , que de  $r$ . Car, s'il en était ainsi, il y aurait, pour deux directions de mouvement différentes, un nombre égal de molécules animées d'un même mouvement interne par rapport aux axes des coordonnées (puisque les coordonnées relatives d'une molécule par rapport à son centre de gravité, déterminées par  $E, p_1 \dots p_k$ , ont été prises relativement aux axes des coordonnées fixés une fois pour toutes).

Or, il n'est nullement nécessaire qu'il en soit ainsi; tout ce que nous pouvons affirmer, c'est que, pour deux directions de mouvement différentes, il y a un nombre égal de molécules animées d'un même mouvement interne, *déterminé chaque fois par rapport à la direction du mouvement de la molécule.*

Si, pour déterminer le mouvement interne d'une molécule, nous avons pris un système de coordonnées ayant une position déterminée et toujours la même relativement à la direction du mouvement de la molécule,  $F_0$  n'aurait dépendu, outre de  $E$ ,  $p_1, \dots, p_k$ , que de  $r$ . Mais alors nous aurions eu l'inconvénient que, à chaque changement apporté dans la direction du mouvement par l'action des forces extérieures, le système de coordonnées de la molécule aurait aussi pris une autre position. De plus, en opérant ainsi, il nous aurait été difficile d'assigner la forme de  $F$  dans le cas où le gaz n'est pas en repos.

Au contraire, avec la méthode que nous avons choisie pour déterminer le mouvement interne, on peut immédiatement indiquer ce que devient la fonction  $F$  lorsque le gaz est entraîné dans un mouvement d'ensemble, avec une vitesse dont les composantes  $u, v, w$  ont *partout les mêmes valeurs*. En effet, les paramètres du mouvement interne étant indépendants de cette vitesse, on aura dans ce cas :

$$F = N F_0 (\xi - u, \eta - v, \zeta - w, E, p_1, \dots, p_k, h); \dots (5).$$

$h$  est ici la valeur moyenne du carré de la vitesse, abstraction faite de la vitesse ( $u, v, w$ ); le vrai carré moyen de la vitesse est  $u^2 + v^2 + w^2 + h$ . L'expression (5), aussi bien que celle qui représente  $F$  dans le cas du repos, annule les deux membres de l'équation fondamentale.

Ce cas le plus simple mis de côté, voici comment le problème peut être envisagé pour tout autre état de mouvement. En chaque point et à chaque instant, les quantités  $N, u, v, w$  auront des valeurs déterminées, et nous pouvons choisir  $h$  de telle sorte que  $u^2 + v^2 + w^2 + h$  soit le carré moyen de la vitesse des molécules au voisinage de ce point. Les quantités

$N, u, v, w, h$  sont alors, en général, des fonctions de  $x, y, z, t$ . Si elles étaient constantes, l'équation (5) pourrait être appliquée; maintenant, il n'en est plus ainsi. Nous posons donc :

$$F = NF_0(\xi - u, \eta - v, \zeta - w, E, p_1, \dots, p_k, h) + f(\xi, \eta, \zeta, E, p_1, \dots, p_k, x, y, z, t) \quad (6)$$

où il faut tâcher de déterminer  $f$ . Pour cela, nous avons en premier lieu l'équation fondamentale, et en second lieu les relations suivantes, qui résultent immédiatement de ce qui a été dit plus haut :

$$\int f d\lambda = \int f \xi d\lambda = \int f \eta d\lambda = \int f \zeta d\lambda = \int f r^2 d\lambda = 0 \dots (7)$$

Nous supposons maintenant, dans la suite de notre étude, que les conditions suivantes sont remplies :

$\alpha$ . La différence de l'état du gaz (c'est-à-dire de la fonction  $F$ ), en deux points distants l'un de l'autre d'une longueur égale au trajet moyen  $\varrho$  d'une molécule entre deux chocs successifs, est très petite, comparée à l'écart total entre cet état et l'état d'équilibre.

$\beta$ . Il en est de même du changement que l'état éprouve, en un même point, durant le temps qui s'écoule entre deux chocs successifs d'une molécule.

$\gamma$ . Le changement de vitesse qu'une molécule éprouve entre deux chocs successifs, par l'effet des forces extérieures, est très petit comparé à la vitesse même.

Pour que les conditions  $\alpha$  et  $\beta$  soient satisfaites dans le mouvement sonore libre, il faut que la longueur d'onde soit très grande par rapport au trajet libre moyen  $\varrho$  des molécules.

La condition  $\gamma$  est évidemment satisfaite si la seule force extérieure est la pesanteur.

De  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  on peut déduire que  $f$ , dans l'équation (6), est très petite comparée à  $NF_0$ . Pour le montrer, considérons la grandeur des termes qui entrent dans l'équation fondamentale.

Examinons d'abord le premier membre. Soient  $a_0$  et  $b_0$  les valeurs (égales) que prennent  $a$  et  $b$  quand on prend pour  $F$  la valeur

(5), et soient  $a_0 + a_1$ ,  $b_0 + b_1$  les valeurs qui correspondent à (6); le premier membre de l'équation fondamentale devient alors  $b_1 - a_1$ .

Si le gaz se trouve dans l'état (5), les molécules dont l'état est compris entre les limites sus-indiquées, et dont le nombre (dans l'unité de volume) est  $N F_0 d\lambda$ , parcourront, à partir d'un moment donné, un certain trajet moyen  $s$  avant de rencontrer une autre molécule. Par un calcul connu, on trouve que le nombre des molécules du groupe en question, qui subissent déjà un choc durant le temps  $dt$ , est représenté par  $\frac{r}{s} N F_0 d\lambda dt$ .

On a donc  $a_0 = \frac{r}{s} N F_0$ . Or,  $r$  étant du même ordre que la vitesse moyenne  $V'$  du mouvement moléculaire, et  $s$  du même ordre que la quantité  $\rho$  nommée dans la condition  $\alpha$ , il en résulte que  $a_0$  est de l'ordre  $\frac{V'}{\rho} N F_0$ .

Ensuite,  $a_1$  représente l'accroissement de  $a$  lorsque l'état du gaz subit le changement indiqué par  $f$  dans l'équation (6). Par conséquent,  $a_1$  est de l'ordre  $a_0 \frac{f}{N F_0}$ , ou de l'ordre  $\frac{V'}{\rho} f$ , et il en sera de même pour  $b_1$ .<sup>1)</sup>

Dans le second membre de l'équation fondamentale entrent d'abord quelques termes provenant de  $f$  dans l'éq. (6).

Mais, de ce qui vient d'être trouvé au sujet de  $a_1$  et  $b_1$ , il suit qu'en vertu de  $\alpha$  les termes  $\frac{\partial f}{\partial x} \xi$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} \eta$ ,  $\frac{\partial f}{\partial z} \zeta$ , en vertu

<sup>1)</sup> Comme M. Korteweg me l'a fait remarquer, cette conclusion n'est pas vraie dans tous les cas. On peut concevoir une telle constitution des molécules gazeuses que leur mouvement interne n'exerce qu'une très-faible influence sur l'effet des chocs et n'en soit, en revanche, que très légèrement changé. Si alors  $f$  représentait un dérangement de l'état  $N F_0$  consistant principalement en un changement des mouvements internes,  $a$  ne serait presque pas modifié par  $f$ . Dans ce cas, les lois de la propagation du son différeraient de celles qu'on trouve déduites dans ce Mémoire. Je ne crois pas cependant que quelque fait aujourd'hui connu prouve l'existence dans la nature de ce cas spécial.

de  $\beta$  le terme  $\frac{\partial f}{\partial t}$ , et en vertu de  $\gamma$  les termes  $\frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \psi}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \psi}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial \zeta} \frac{\partial \psi}{\partial z}$  peuvent être négligés par rapport à  $a_1$  et  $b_1$ . Pour le reconnaître en ce qui concerne les trois termes nommés en dernier lieu, il suffit de remarquer que les quantités  $\frac{\partial f}{\partial \xi}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial \eta}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial \zeta}$  seront en général de l'ordre  $\frac{f}{V}$ .

Nous n'avons donc à conserver au second membre de l'équation (I) que les termes provenant de  $N F_0$  dans (6). L'équation devient ainsi:

$$b_1 - a_1 = N \frac{\partial F_0}{\partial \xi} \frac{\partial \psi}{\partial x} + N \frac{\partial F_0}{\partial \eta} \frac{\partial \psi}{\partial y} + N \frac{\partial F_0}{\partial \zeta} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \\ + \frac{\partial (N F_0)}{\partial x} \xi + \frac{\partial (N F_0)}{\partial y} \eta + \frac{\partial (N F_0)}{\partial z} \zeta + \frac{\partial (N F_0)}{\partial t} . \quad (\text{II}).$$

où  $F_0$  désigne toujours la fonction  $F_0(\xi-u, \dots)$ .

C'est cette équation qui doit servir à la détermination de  $f$ . Or, en vertu de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , le second membre n'a qu'une petite valeur, et il en est de même de la différence de  $a_1$  et  $b_1$ . Si l'on pouvait conclure de là que les quantités  $a_1$  et  $b_1$  sont elles-mêmes très-petites, on pourrait en affirmer autant de  $f$ . Évidemment il n'est pas permis de tirer cette conclusion de la seule équation (II). Mais il faut remarquer que la fonction  $f$  doit satisfaire aussi aux conditions (7). De plus, lorsque le gaz est en équilibre et soustrait à toute action étrangère, l'état indiqué par (5) est le seul possible. Il s'ensuit que, lorsque le second membre de (II) est égal à 0,  $f=0$  est la seule solution de (II) et de (7), ce qui amène les équations  $a_1 = 0$ ,  $b_1 = 0$ . Les quantités  $a_1$  et  $b_1$  s'annulant ainsi *chacune séparément* en même temps que le second membre, une petite valeur de ce dernier donnera de pareilles valeurs pour  $a_1$  et  $b_1$ . Si l'on exprime ce fait en disant



que ces trois quantités sont du même ordre, et si l'on se souvient que  $a_1$  et  $b_1$  sont de l'ordre  $\frac{V'}{\rho} f$ , on trouve que la fonction  $f$  sera elle-même de l'ordre :

$$\frac{\rho}{V'} \left\{ N \frac{\partial F_0}{\partial \xi} \frac{\partial \psi}{\partial x} + N \frac{\partial F_0}{\partial \eta} \frac{\partial \psi}{\partial y} + N \frac{\partial F_0}{\partial \zeta} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial (NF_0)}{\partial x} \xi + \right. \\ \left. + \frac{\partial (NF_0)}{\partial y} \eta + \frac{\partial (NF_0)}{\partial z} \zeta + \frac{\partial (NF_0)}{\partial t} \right\}, \dots \dots \dots (8)$$

c'est-à-dire, en vertu de  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ , qu'elle sera très petite par rapport à  $NF_0$ , ainsi que nous voulions le démontrer.

Regardons donc dans la suite  $f$  comme *infinitement petite* par rapport à  $NF_0$ ; les quantités  $a_1$  et  $b_1$  deviennent alors aussi infinitement petites par rapport à  $a_0$  et  $b_0$ . D'après cela, si  $f$  est composée de différentes parties, la valeur que prend le premier membre de l'équation fondamentale sera la somme des valeurs qu'il acquerrait si l'on prenait pour  $f$  successivement chacune des parties en question. Il en résulte immédiatement que si le second membre de (II) est composé de différentes parties, et qu'on réussisse à trouver pour  $f$  des valeurs qui rendent la différence  $b_1 - a_1$  égale à chacune de ces parties et qui en même temps satisfont à (7), la somme de ces valeurs sera la vraie valeur de  $f$ . Plus loin, au § 5, nous ferons une application répétée de ce théorème.

Pour un cas particulier, nous allons dès à présent considérer la fonction  $f$  de plus près. Supposons le gaz soumis à l'action de la pesanteur et compris entre deux parois horizontales fixes, avec lesquelles il ne peut opérer aucun échange de chaleur. Evidemment il peut alors s'établir un état stationnaire, où  $u$ ,  $v$ ,  $w$  seront partout nuls, et où, l'axe des  $x$  étant dirigé verticalement vers le bas,  $N$  et peut-être aussi  $h$  dépendront de  $x$ .

Dans ce cas, le premier terme de (6) est  $NF_0(\xi, \eta, \zeta, E, \dots h)$ , et l'équation (II) devient :

$$b_1 - a_1 = g N \frac{\partial F_o}{\partial \xi} + \frac{dN}{dx} F_o \xi + N \frac{dh}{dx} \frac{\partial F_o}{\partial h} \xi, \dots (9)$$

où  $g$  a la signification ordinaire.

Or, il n'est pas difficile de montrer que la valeur de  $f$ , qui résulte de (9) et de (7), ne peut fournir un contingent que pour l'intégrale

$$S_x = \int F \xi \left( \frac{1}{2} m r^2 + E \right) d\lambda,$$

mais non pour les autres quantités  $P_x, P_y, P_z, Q_{x,y}, Q_{y,z}, Q_{x,z}, R, S_y, S_z$ .

Pour le prouver, nous ferons usage du moyen suivant, qui pourra nous servir aussi plus tard, dans des questions analogues.

Soit une masse gazeuse soumise à l'action de forces extérieures et dans laquelle s'opèrent des mouvements tout à fait arbitraires. Nous pouvons alors nous figurer une seconde masse gazeuse, qui soit à chaque instant l'image de la première par rapport à un plan fixe; les mouvements nécessaires à cet effet, dans cette seconde masse, pourront réellement avoir lieu, au moins si les éléments constituants n'exercent entre eux que des forces centrales et si les forces extérieures appliquées au second gaz sont exactement les images de celles qui agissent sur le premier. En supposant que le plan par rapport auquel a été prise l'image soit parallèle au plan  $y, z$ , et que pour cette image on ait conservé aux axes positifs la même direction que pour le gaz primitif, il résulte de la signification des quantités  $N, v, w, P_x, P_y, P_z, Q_{y,z}, R, S_y, S_z$  que, en deux points correspondants des deux masses gazeuses, ces quantités doivent avoir la même valeur et le même signe, tandis que  $u, Q_{x,y}, Q_{x,z}, S_x$ , au contraire, auront bien en ces points des valeurs égales, mais des signes opposés.

Considérons de cette manière l'image de la masse gazeuse dont nous avons commencé à nous occuper plus haut. En un point quelconque de l'image,  $N$  et évidemment aussi la fonction  $F_o$  seront les mêmes qu'au point correspondant de la

masse gazeuse primitive, mais  $\frac{dN}{dx}$  et  $\frac{dh}{dx}$  auront en ces deux points des signes opposés. La constante  $g$  devra aussi, pour le second gaz, être remplacée par  $-g$ , puisque la force extérieure y doit être dirigée vers le haut. Dans l'image, le second membre de (9) a donc justement le signe opposé à celui qu'il possède dans le gaz primitif, et il devra par conséquent en être de même de  $f'$  et des contingents que  $f$  fournit pour  $P_x$ , etc. Ces contingents doivent donc être nuls pour toutes les quantités qui, comme  $P_x$ , doivent avoir le même signe dans les deux gaz, de sorte qu'il ne reste que les quantités  $u$ ,  $Q_{x,y}$ ,  $Q_{x,z}$ ,  $S_x$ . Mais la première est exclue par (7), et quant à  $Q_{x,y}$  et  $Q_{x,z}$ , pour prouver que  $f$  ne peut rien leur fournir, il suffit de comparer le gaz avec son image par rapport à un plan perpendiculaire à l'axe des  $y$  ou à celui des  $z$ . En définitive, il ne reste donc que le contingent pour  $S_x$ .

Dans le calcul des autres quantités  $P_x$  etc., on peut maintenant se borner au premier terme de (6), qui est ici  $NF_o(\xi, \eta, \zeta, E, p_1 \dots p_k, h)$ . Comme on a évidemment  $\int F_o \xi^2 d\lambda = \int F_o \eta^2 d\lambda = \int F_o \zeta^2 d\lambda$ , chacune de ces quantités devient  $= \frac{1}{3} \int F_o r^2 d\lambda = \frac{1}{3} N h$ , et par conséquent  $P_x = P_y = P_z = \frac{1}{3} N h$ .  $Q_{x,y}$ ,  $Q_{y,z}$ ,  $Q_{z,x}$  deviennent 0, ainsi qu'il résulte de la considération des images, et les équations du mouvement donnent:

$$-Ng + \frac{1}{3} \frac{\partial (Nh)}{\partial x} = 0,$$

$$S_x = \text{const.}$$

Mais, pour que l'état soit réellement stationnaire, sans que le gaz enlève de la chaleur à l'une des parois et en cède à l'autre, il faut que la quantité  $S_x$  soit non seulement constante, mais nulle, car  $NS_x$  est l'excès de l'énergie qui, dans l'unité de temps, traverse l'unité de surface d'un plan horizontal quelconque de haut en bas, sur celle qui la traverse de bas en haut. M. Maxwell et M. Boltzmann ont montré que, dans cet état

stationnaire, la température doit être la même à toute hauteur. En faisant  $h$  constant, on a :

$$-Ng + \frac{1}{3}h \frac{\partial N}{\partial x} = 0,$$

$$b_1 - a_1 = Ng \left( \frac{\partial F_0}{\partial \xi} + \frac{3}{h} \xi F_0 \right),$$

et le second membre de cette équation devient réellement  $= 0$  (et de même  $f$  et  $S_x$ ) dès que la fonction  $F_0$  a la forme qu'ont trouvée pour elle les deux savants qui viennent d'être nommés.

D'ailleurs, indépendamment de la forme de  $F_0$ , nous pouvons établir, à la seule condition d'admettre l'exactitude de la seconde loi de la théorie mécanique de la chaleur, que, dans l'état stationnaire d'un gaz sur lequel agit la pesanteur, la température doit être la même à toute hauteur. Ceci reconnu, il s'ensuit immédiatement que la valeur de  $f$ , qui répond à la dernière équation, qu'elle soit  $= 0$  ou non, ne peut fournir un contingent pour  $S_x$ , — donc pour aucune des quantités  $P_x$ , etc.

Tout comme le cas qui vient d'être considéré, on peut traiter celui où une force constante agit sur le gaz dans la direction de l'axe des  $y$  ou des  $z$ . On arrive ainsi à ce résultat que, aussitôt qu'au second membre de (II) une des quantités  $\frac{\partial F_0}{\partial \xi} + \frac{3}{h} F_0 \xi$ ,  $\frac{\partial F_0}{\partial \eta} + \frac{3}{h} F_0 \eta$ ,  $\frac{\partial F_0}{\partial \zeta} + \frac{3}{h} F_0 \zeta$  apparaît multipliée par un facteur constant, on peut la négliger entièrement dans les considérations ultérieures. Cette remarque nous sera utile dans la suite.

De ce qui précède, on peut encore déduire que, même dans le cas où des forces extérieures quelconques agissent sur un gaz, à la seule condition que ces forces dépendent d'une fonction potentielle, un état stationnaire à température partout égale est possible, et qu'alors aussi  $f$  ne fournit aucun contingent pour une des quantités  $P_x$ , etc. La relation entre la densité et les coordonnées est alors déterminée par :

$$N = \text{const. } e^{\frac{3}{h} \psi}.$$

Revenons maintenant au cas le plus général du mouvement d'un gaz. En supposant que les conditions  $\alpha, \beta, \gamma$  sont remplies, nous avons déjà trouvé dans l'expression (8) de quel ordre est la fonction  $f$ . Nous pouvons maintenant ajouter encore qu'il n'y a pas à s'occuper de la partie de  $f$  qui correspond à l'état d'équilibre du gaz, mais seulement de la partie qui est due aux écarts de cet état; en effet, comme nous venons de le montrer, la première partie est sans influence sur les quantités  $P_x$ , etc. En désignant donc par  $(NF_o)_e$  la valeur de la fonction  $NF_o$  pour l'équilibre, et posant  $NF_o - (NF_o)_e = \chi$ , la fonction  $f$ , en tant qu'il y a lieu d'en tenir compte, sera de l'ordre

$$\frac{e^{-\chi}}{V} \left\{ \frac{\partial \chi}{\partial \xi} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial \eta} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \chi}{\partial \zeta} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial \chi}{\partial x} \xi + \frac{\partial \chi}{\partial y} \eta + \frac{\partial \chi}{\partial z} \zeta + \frac{\partial \chi}{\partial t} \right\},$$

par conséquent, en vertu de  $\alpha, \beta, \gamma$ , très petite par rapport à  $\chi$ , c'est-à-dire par rapport au dérangement survenu à l'état d'équilibre. Pour une première approximation, nous pourrions donc négliger  $f$  dans l'équation (6), et par conséquent admettre, dans le calcul des quantités  $P_x$  etc., que l'état en un point est le même que si, dans toute la masse gazeuse et d'une manière persistante,  $u, v, w, N, h$  avaient les mêmes valeurs qu'en ce point. Je ferai remarquer que, pour légitimer cette manière d'agir, il fallait démontrer que  $f$  est très petite par rapport à  $NF_o - (NF_o)_e$ , attendu que les valeurs des coefficients différentiels tels que  $\frac{\partial P_x}{\partial x}$ , etc. dépendent de cette der-

nière quantité. Si l'on s'était borné à faire voir que  $f$  est très petite par rapport à  $NF_o$ , il ne se serait pas ensuivi nécessairement qu'elle le fût aussi par rapport à  $NF_o - (NF_o)_e$ .

Le calcul de  $P_x$ , etc., à l'aide de l'équation

$$F = NF_o (\xi - u, \eta - v, \zeta - w, E, p_1, \dots, p_k, h),$$



ne présente pas de difficultés. En introduisant, au lieu de  $\xi, \eta, \zeta$ , les quantités  $\xi-u, \eta-v, \zeta-w$  comme nouvelles variables, et en tenant compte des relations (4), on trouve d'abord

$$P_x = \frac{1}{3} N h + N u^2, P_y = \frac{1}{3} N h + N v^2, P_z = \frac{1}{3} N h + N w^2,$$

$$Q_{x,y} = N u v, Q_{y,z} = N v w, Q_{z,x} = N w u.$$

Ensuite, on a :

$$R = \frac{1}{2} m N (u^2 + v^2 + w^2) + N \int F_o (\xi, \eta, \zeta, E \dots) \left( \frac{1}{2} m r^2 + E \right) d\lambda.$$

Dans cette dernière intégrale, la partie  $\int F_o \cdot \frac{1}{2} m r^2 d\lambda = \frac{1}{2} m h$  représente l'énergie moyenne du mouvement de translation d'une molécule ; la partie restante  $\int F_o E d\lambda$  est sa moyenne énergie interne. Cette dernière sera une fonction de la température, par conséquent de  $h$  ; si l'on pose  $\int F_o E d\lambda = m \vartheta (h)$ ,  $\vartheta (h)$  est l'énergie intramoléculaire pour l'unité de masse. La nature de la fonction introduite se laissera déduire d'expériences sur le changement qu'éprouve la chaleur spécifique du gaz à mesure que varie la température <sup>1)</sup>. Si ce changement est nul,  $\vartheta (h)$  est une fonction linéaire.

La valeur de  $R$  devient maintenant :

$$R = \frac{1}{2} m N (u^2 + v^2 + w^2) + \frac{1}{2} m N h + m N \vartheta (h) \dots (10)$$

Enfin, on a :

$$S_x = N \int F_o (\xi, \eta, \zeta, E, p_1, \dots, p_k, h) (\xi + u) \left\{ \frac{1}{2} m (r^2 + 2\xi u + 2\eta v + 2\zeta w + u^2 + v^2 + w^2) + E \right\} d\lambda = \frac{1}{2} m N u \left[ \frac{5}{3} h + 2\vartheta (h) + (u^2 + v^2 + w^2) \right],$$

<sup>1)</sup> E. Wiedemann, Pogg. Ann., t. 157.

$$S_y = \frac{1}{2} m N v \left[ \frac{5}{3} h + 2 \vartheta (h) + (u^2 + v^2 + w^2) \right],$$

$$S_z = \frac{1}{2} m N w \left[ \frac{5}{3} h + 2 \vartheta (h) + (u^2 + v^2 + w^2) \right].$$

Transportant ces résultats dans  $(a_1)$ ,  $(b_1)$ ,  $(c_1)$ , et faisant en outre usage de  $(a_1)$  pour réduire  $(b_1)$ , et de  $(a_1)$  et  $(b_1)$  pour simplifier  $(c_1)$ , on obtient les équations de mouvement suivantes :

$$\frac{\partial (Nu)}{\partial x} + \frac{\partial (Nv)}{\partial y} + \frac{\partial (Nw)}{\partial z} + \frac{\partial N}{\partial t} = 0 \dots \dots (a_2)$$

$$-N \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{3} \frac{\partial (Nh)}{\partial x} + N \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} \right) = 0, \text{ etc.} \dots (b_2)$$

$$\frac{1}{3} h \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{1}{2} [1 + 2\vartheta'(h)] \left( u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} + w \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\partial h}{\partial t} \right) = 0 \dots (c_2)$$

Si l'on multiplie  $(a_2)$  et  $(b_2)$  par  $m$ , on peut, au lieu de  $N$ , introduire la densité du gaz  $mN = \delta$ .

Pour des dérangements infiniment petits de l'état d'équilibre, les équations se simplifient. Si dans cet état on a  $\delta = \delta_0$ ,  $h = h_0$ , et dans l'état dérangé  $\delta = \delta_0 (1 + s)$ , on obtient, en négligeant de plus l'action des forces extérieures,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial s}{\partial t} = 0 \dots \dots \dots (a_3)$$

$$\frac{1}{3} \frac{\partial (h + h_0 s)}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad \frac{1}{3} \frac{\partial (h + h_0 s)}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{1}{3} \frac{\partial (h + h_0 s)}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \dots \dots \dots (b_3)$$

$$\frac{1}{3} h_0 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{1}{2} [1 + 2\vartheta'(h_0)] \frac{\partial h}{\partial t} = \dot{0} \dots (c_3)$$

§ 4. La propagation du son.

Il ne sera pas nécessaire de montrer en détail que les équations qui viennent d'être trouvées diffèrent seulement par la

notation de celles qu'on obtient dans la théorie ordinaire du son. Nous nous bornerons donc à faire voir comment on peut en tirer la vitesse de propagation du son. A cet effet, de  $(a_3)$  et  $(c_3)$  nous déduirons d'abord :

$$\frac{3}{2 h_0} [1 + 2 \vartheta' (h_0)] \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial s}{\partial t},$$

ou, puisque dans l'état primitif d'équilibre on avait  $s = 0$  et  $h = h_0$ ,

$$\frac{3}{2 h_0} [1 + 2 \vartheta' (h_0)] (h - h_0) = s.$$

Ensuite, nous pouvons éliminer  $u, v, w$  de  $(a_3)$  et  $(b_3)$ , ce qui donne :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{5 + 6 \vartheta' (h_0)}{9 [1 + 2 \vartheta' (h_0)]} h_0 \Delta s.$$

Cette équation a une forme bien connue, et il en résulte immédiatement pour la vitesse de propagation :

$$V = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{5 + 6 \vartheta' (h_0)}{1 + 2 \vartheta' (h_0)}} h_0.$$

Or, la pression  $p_0$  dans l'état d'équilibre étant déterminée par  $p_0 = \frac{1}{3} \delta_0 h_0$ , et un raisonnement très simple donnant la valeur

$k = \frac{5 + 6 \vartheta' (h_0)}{3 [1 + 2 \vartheta' (h_0)]}$  pour le rapport des chaleurs spécifiques du

gaz à pression constante et à volume constant, le résultat obtenu concorde entièrement avec la formule

$$V = \sqrt{\frac{k p_0}{\delta_0}},$$

à laquelle conduit la théorie ordinaire du son et que l'observation confirme.

Si nous n'avions eu d'autre but que d'obtenir ce résultat, nous aurions pu dès l'origine supposer infiniment petit le dérangement de l'équilibre et faire abstraction de l'action de forces extérieures; notre recherche au § précédent en serait devenue beaucoup plus simple. Toutefois, pour arriver aux équations du mouvement  $(a_3)$ ,  $(b_3)$ ,  $(c_3)$ , il n'en aurait pas moins fallu admettre que les conditions  $\alpha$  et  $\beta$  (p. 16) sont remplies. Par conséquent, une solution des équations ne pourra représenter un mouvement possible que si elle satisfait à ces conditions. Ce cas se rencontre dans la propagation régulière des vibrations sonores. Mais il y a d'autres solutions des équations du mouvement qui ne satisfont pas à la condition indiquée.

Ces équations nous apprennent, par exemple, que la propagation d'une onde unique, isolée, est possible. L'équilibre n'est alors troublé que dans une couche comprise entre deux surfaces, couche qui s'étend de plus en plus, tout en conservant son épaisseur. Cette solution satisfait encore aux équations du mouvement lorsque l'onde a des limites nettement définies, c'est-à-dire lorsque, du dedans au dehors, le dérangement d'équilibre passe très rapidement, d'une valeur finie, à zéro. Il est clair, toutefois, qu'un pareil mouvement ne pourra subsister en réalité. S'il se produisait pour un instant, l'onde ne tarderait pas à perdre ses limites tranchées, par un phénomène de diffusion dont il n'a pas été tenu compte dans l'établissement des équations du mouvement. Ce phénomène, qui dans le mouvement sonore ordinaire ne se manifeste que comme influence légèrement perturbatrice, serait alors, durant un certain temps, l'action principale.

C'est d'un cas de ce genre que M. Rink s'occupe à la fin de son Mémoire <sup>1)</sup>. On ne saurait donc s'étonner qu'il obtienne ici des résultats en contradiction avec les vues qui ont généralement cours au sujet de la propagation du son. Mais cela ne plaide nullement contre la théorie cinétique des gaz, car, dans le mouvement sonore ordinaire, la diffusion dont il s'agit n'aura qu'une faible influence.

<sup>1)</sup> *loc. cit.*, p. 279.

Quant à la vérité de cette assertion, nous l'avons déduite, au § précédent, de nos équations, en montrant qu'il est permis d'y négliger  $f$ . Peut-être, toutefois, ne sera-t-il pas sans utilité de la mettre encore mieux en évidence par les considérations élémentaires suivantes.

Figurons-nous que dans un espace clos, rempli de gaz, on admette du dehors un certain nombre de molécules et qu'ensuite le gaz soit abandonné à lui-même. Avant l'introduction des nouvelles molécules, le gaz se trouvait dans un état stationnaire, déterminé par la fonction  $F_0$ . La première conséquence de l'entrée des nouvelles molécules sera un dérangement de cet état. Mais, grâce aux chocs mutuels, il s'établira bientôt un nouvel état stationnaire, qui différera du premier en ce que le nombre des molécules, le carré moyen de leur vitesse et la vitesse moyenne suivant les axes des coordonnées seront modifiés. Les choses se passeraient, naturellement, d'une manière analogue, si un certain nombre de molécules sortaient de l'espace en question.

Le temps qui s'écoule avant que l'état stationnaire ne soit rétabli sera du même ordre de grandeur que le temps qui sépare deux chocs successifs d'une molécule.

Considérons maintenant une masse gazeuse dans laquelle l'équilibre est troublé. Prenons un certain volume de ce gaz, qui soit assez petit pour qu'on puisse y regarder l'état comme partout le même, et pour qu'on puisse par conséquent, dans l'établissement des équations du mouvement, le traiter comme un élément de volume. Si la condition  $\alpha$  est remplie, nous pourrons, d'un autre côté, donner à cet élément de volume des dimensions grandes par rapport au trajet libre des molécules. Il en résultera qu'une molécule, pénétrant par un côté de l'élément, le traversera très rarement en entier sans avoir subi de choc. On doit se figurer, au contraire, que les molécules nouvellement introduites, après avoir parcouru un trajet très court, s'engagent dans une série de rencontres avec les molécules contenues déjà dans l'élément; et, de même, que les molécules



sortant de l'élément ont fait partie de celles qui s'y trouvaient soumises entre elles à des collisions répétées.

Si l'entrée des molécules et la sortie d'autres molécules se faisaient à un moment déterminé, il se passerait un certain temps, de l'ordre déjà indiqué, avant que les chocs mutuels n'eussent rétabli dans l'élément un état stationnaire. Mais, en réalité, l'entrée et la sortie ont lieu d'une manière continue, et par conséquent, à proprement parler, l'état stationnaire qui correspond à la densité, à la température et à la vitesse hydrodynamique du gaz n'existera jamais. L'état de mouvement des molécules conservera toujours les traces de ce qu'il a été antérieurement. Néanmoins, pourvu que le temps nécessaire au rétablissement de l'état stationnaire soit suffisamment court (condition  $\beta$ ), il est clair qu'on pourra admettre, avec un haut degré d'approximation, qu'un pareil état est réalisé à chaque instant. Seulement, la densité, la vitesse et la température changent alors continuellement par le fait des molécules qui entrent et qui sortent, et la manière dont ce changement s'effectue est indiqué par nos équations du mouvement.

Pour une théorie complète de différents phénomènes du son, il ne suffit pas de connaître les équations du mouvement des gaz, mais il faut considérer encore ce qui a lieu à la surface des corps (solides ou liquides) avec lesquels le gaz est en contact.

Si cette surface est parfaitement lisse, un état de mouvement du gaz, partout identique, est évidemment possible, pourvu que la surface possède, dans la direction de la normale, la même vitesse que la couche gazeuse juxtaposée. Si l'état du gaz varie d'un point à l'autre et d'un instant à l'autre, on pourra encore, à la condition qu'il soit satisfait à  $\alpha$  et  $\beta$ , regarder l'état de la couche contiguë à la paroi comme égal à celui qui existerait si dans toute la masse gazeuse régnait le même état que dans la couche en question. Il suit de là que, même alors, le mouvement sera encore possible, pourvu qu'à chaque instant la paroi et la couche gazeuse limitrophe concor-

dent en vitesse normale. Telle est la condition limite qu'on introduit ordinairement dans la théorie mathématique du son. Toutefois, la question ne présente ce degré de simplicité que lorsqu'il est satisfait à  $\alpha$  et  $\beta$ ; elle deviendrait plus compliquée si, par exemple, un corps solide acquerrait tout d'un coup une certaine vitesse dans un gaz en repos.

En réalité, une paroi n'est jamais parfaitement lisse à l'égard des molécules du gaz; nous devons la regarder, au contraire, comme composée elle-même de molécules et recouverte d'une couche de gaz condensé, comme très rugueuse par conséquent. Nous devons admettre aussi un échange de chaleur entre la surface et le gaz. Cela posé, il est clair qu'un mouvement du gaz, satisfaisant aux conditions  $\alpha$  et  $\beta$ , pourra exister lorsque, entre la surface et la couche gazeuse contiguë, il y a concordance de vitesse, normale et tangentielle, et de température. Si les conditions  $\alpha$  et  $\beta$  ne sont pas remplies, le problème devient de nouveau plus compliqué; il pourra alors y avoir glissement le long de la paroi et différence de température entre celle-ci et le gaz.

Finalement, nous examinerons encore l'énergie existant dans un gaz qui est le siège d'un mouvement sonore. La grandeur de cette énergie est donnée immédiatement par l'équation (10), ou

$$R = \frac{1}{2} \delta (u^2 + v^2 + w^2) + \frac{1}{2} \delta h + \delta \vartheta (h),$$

puisque  $R d\tau$  est l'énergie contenue dans un élément de volume.

De cette équation nous pouvons toutefois en déduire une autre, ne renfermant plus que  $u$ ,  $v$ ,  $w$  et  $s$ , si, à l'aide des équations du mouvement, nous exprimons d'abord  $h$  en  $s$ . Pour le cas où l'on ne conserve que la première puissance de  $s$ , cela a déjà été fait au commencement de ce §; mais, comme il est désirable d'obtenir l'énergie  $R$  plus exactement, à des quantités du second ordre près (si  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $s$  sont du premier ordre), il faut maintenant déduire de  $(a_2)$ ,  $(b_2)$ ,  $(c_2)$  la relation qui lie  $h$  à  $s$ .

A cet effet, représentons-nous un point  $Q$ , se mouvant de

telle sorte que sa vitesse soit toujours égale à la vitesse hydrodynamique qui existe à l'endroit où il se trouve. En prenant alors, à un moment quelconque  $t$ , pour les quantités  $\delta$  et  $h$  les valeurs qu'elles ont en  $Q$ , on a :

$$\frac{d\delta}{dt} = u \frac{\partial \delta}{\partial x} + v \frac{\partial \delta}{\partial y} + w \frac{\partial \delta}{\partial z} + \frac{\partial \delta}{\partial t};$$

une relation analogue existe aussi pour  $h$ , et de  $(a_2)$  et  $(c_2)$  on déduit :

$$\frac{d\delta}{\delta} = \frac{3}{2} [1 + 2 \vartheta'(h)] \frac{dh}{h},$$

par conséquent, puisque dans l'état originaire d'équilibre on avait  $\delta = \delta_0$ ,  $h = h_0$ ,

$$l \left( \frac{\delta}{\delta_0} \right) = l(1 + s) = \frac{3}{2} \int_{h_0}^h [1 + 2 \vartheta'(h)] \frac{dh}{h}.$$

Il suit de là, avec une exactitude allant jusqu'au second ordre,

$$h = h_0 + \frac{2 h_0}{3 [1 + 2 \vartheta'(h_0)]} s - \frac{2 h_0}{3 [1 + 2 \vartheta'(h_0)]} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2 h_0 \vartheta''(h_0) - [1 + 2 \vartheta'(h_0)]}{[1 + 2 \vartheta'(h_0)]^2} \right\} s^2.$$

On trouve ensuite, avec le même degré d'exactitude :

$$R = \frac{1}{2} \delta_0 [h_0 + 2 \vartheta(h_0)] + \frac{1}{6} \delta_0 [5 h_0 + 6 \vartheta(h_0)] s + \delta_0 h_0 \cdot \frac{5 + 6 \vartheta'(h_0)}{18 [1 + 2 \vartheta'(h_0)]} s^2 + \frac{1}{2} \delta_0 (u^2 + v^2 + w^2).$$

Dans l'état d'équilibre, cette valeur devient :

$$R_0 = \frac{1}{2} \delta_0 [h_0 + 2 \vartheta(h_0)],$$

et la quantité

$$R - R_0 = \frac{1}{6} \delta_0 [5 h_0 + 6 \vartheta(h_0)] s + \delta_0 h_0 \cdot \frac{5 + 6 \vartheta'(h_0)}{18 [1 + 2 \vartheta'(h_0)]} s^2 + \frac{1}{2} \delta_0 (u^2 + v^2 + w^2). \dots \dots \dots (11)$$

indique, par conséquent, de combien l'énergie excède celle qui existe à l'état d'équilibre.

Les deux derniers termes de ce résultat s'accordent entièrement, comme il est facile de le montrer, avec la valeur que M. Grinwis <sup>1)</sup> a obtenue, par une autre voie, pour l'énergie du mouvement sonore. Notre premier terme ne figure pas dans cette valeur, mais cela tient uniquement à ce que l'énergie calculée par M. Grinwis a une signification un peu différente de celle de la quantité  $R - R_0$  calculée par nous. Pour que les résultats soient entièrement comparables, il faut apporter une petite modification au calcul de M. Grinwis, et résoudre le problème suivant <sup>2)</sup>. Un espace  $S$  est rempli de gaz ayant une densité plus grande qu'à l'état normal, et cette condensation a été produite par voie adiabatique; on demande de combien l'énergie contenue dans ce gaz est supérieure à celle qui existerait, *dans le même espace*, s'il était rempli de gaz de la densité normale. En calculant alors, non pas l'intégrale

$$\int_{V+S}^S (p - p_0) dv,$$

mais l'intégrale

$$- \int_{V+S}^S p dv,$$

on trouve de combien l'énergie contenue dans l'espace  $S$  surpasse celle qui, à l'état normal, existerait dans l'espace  $S + V$ . Pour résoudre le problème posé, ce n'est toutefois pas avec cette dernière énergie que la comparaison doit se faire, mais avec celle qui, à l'état d'équilibre, se trouve dans l'espace  $S$ . Au résultat de l'intégration indiquée, il faudra donc encore ajouter l'énergie qui à l'état normal existe dans l'espace  $V$ . En exécutant le calcul de cette façon, on obtient un résultat tout à fait conforme à la formule (11).

<sup>1)</sup> Grinwis, *Sur la théorie mécanique du son*, dans: *Arch. néerl.*, t. X.

<sup>2)</sup> *Ibid.*, p. 137, 138.

Nous devons faire observer, toutefois, que le premier terme de cette formule s'évanouit lorsque, dans le cas des vibrations sonores, on cherche l'énergie moyenne d'un élément de volume pendant la durée d'une vibration; en effet, la valeur moyenne de  $s$  est alors zéro. Il en est de même lorsqu'on calcule l'énergie dans une portion de l'espace contenant la même quantité de gaz qu'à l'état d'équilibre. Pour la masse gazeuse *totale*, l'énergie du mouvement sonore est, en tout cas, une quantité du second ordre.

M. Rink, dans le Mémoire déjà cité, a aussi considéré l'énergie du mouvement sonore. Pour cela, il a calculé la quantité d'énergie communiquée par une plaque vibrante aux molécules qui viennent la heurter. Dans le résultat il entre de nouveau un terme du premier ordre, et l'auteur signale la grande différence que ce résultat présente avec celui de M. Grinwis. Mais il ne remarque pas que l'absence d'un terme du premier ordre, chez M. Grinwis, est simplement une conséquence de la manière dont celui-ci a calculé l'énergie.

Comme M. Rink n'a pas cherché combien il existe d'énergie dans un volume déterminé du gaz, mais seulement combien d'énergie est communiquée au gaz par un corps vibrant, son résultat n'est pas directement comparable au nôtre.

### § 5. Déduction plus exacte des équations du mouvement. Frottement interne et conductibilité calorifique.

Au § 3, nous avons obtenu les équations  $(a_2)$ ,  $(b_2)$ ,  $(c_2)$  en négligeant tout à fait la fonction  $f$  dans l'expression (6). Maintenant nous allons essayer de pousser l'approximation plus loin, c'est-à-dire, de faire entrer en ligne de compte la circonstance que l'état de mouvement en un point de la masse gazeuse n'est pas entièrement identique à celui qui existerait si, dans toute l'étendue de cette masse et d'une manière persistante,  $N$ ,  $h$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , avaient les mêmes valeurs qu'au point considéré.



Nous continuerons à admettre, toutefois, que les conditions  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  sont remplies, de sorte que  $f$  devient encore très petite comparativement à  $NF_0 - (NF_0)_e$ .

Nous pouvons alors prendre pour point de départ de nos raisonnements l'équation (II); à la vérité, quelques termes  $\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \text{ etc.}\right)$  y sont négligés, mais comme ils sont très petits en comparaison de ceux que nous avons conservés, l'erreur ainsi commise sur  $f$  sera aussi très petite par rapport à cette quantité, déjà petite elle-même. En d'autres termes, si nous appelons  $f$  une quantité du premier ordre, nous négligerons les quantités du second ordre.

Dans l'équation (II), il faut entendre par  $F_0$  l'expression

$$F_0(\xi-u, \eta-v, \zeta-w, E, p_1, \dots, p_k, h).$$

Si l'on observe qu'en général  $N, u, v, w, h$  dépendent de  $x, y, z, t$ , on voit que cette équation devient:

$$\begin{aligned} b_1 - a_1 = & N \frac{\partial F_0(\xi-u, \dots)}{\partial \xi} \frac{\partial \psi}{\partial x} + N \frac{\partial F_0(\xi-u, \dots)}{\partial \eta} \frac{\partial \psi}{\partial y} + N \frac{\partial F_0(\xi-u, \dots)}{\partial \zeta} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \\ & + F_0(\xi-u, \dots) \left[ \frac{\partial N}{\partial x} \xi + \frac{\partial N}{\partial y} \eta + \frac{\partial N}{\partial z} \zeta + \frac{\partial N}{\partial t} \right] - \\ & - N \frac{\partial F_0(\xi-u, \dots)}{\partial \xi} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \xi + \frac{\partial u}{\partial y} \eta + \frac{\partial u}{\partial z} \zeta + \frac{\partial u}{\partial t} \right] - \\ & - N \frac{\partial F_0(\xi-u, \dots)}{\partial \eta} \left[ \frac{\partial v}{\partial x} \xi + \frac{\partial v}{\partial y} \eta + \frac{\partial v}{\partial z} \zeta + \frac{\partial v}{\partial t} \right] - \\ & - N \frac{\partial F_0(\xi-u, \dots)}{\partial \zeta} \left[ \frac{\partial w}{\partial x} \xi + \frac{\partial w}{\partial y} \eta + \frac{\partial w}{\partial z} \zeta + \frac{\partial w}{\partial t} \right] + \\ & + N \frac{\partial F_0(\xi-u, \dots)}{\partial h} \left[ \frac{\partial h}{\partial x} \xi + \frac{\partial h}{\partial y} \eta + \frac{\partial h}{\partial z} \zeta + \frac{\partial h}{\partial t} \right]. \end{aligned}$$

En un point donné du gaz et à un moment donné, le second membre est une fonction entièrement connue de  $\xi, \eta, \zeta, E, p_1, \dots, p_k$ . Dans cette fonction, que nous désignerons par  $\chi$ , les quantités  $N, u, \dots, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots$  figurent à titre de constantes. Au premier membre,  $b_1 - a_1$  a cette signification qu'on en peut

déduire, en multipliant par  $d\lambda dt$ , de combien augmenterait à raison des chocs, durant le temps  $dt$ , dans l'unité de volume de la masse gazeuse  $P$  introduite ci-dessus (p. 8), le nombre des molécules du groupe défini au § 1. Dans cette masse  $P$  on a partout

$$F = NF_0 (\xi - u, \dots) + f(\xi, \eta, \zeta, \dots),$$

avec des valeurs constantes pour  $N, u, v, w, h$ . Exprimée aussi brièvement que possible, notre équation devient :

$$b - a [\text{pour } F = NF_0 (\xi - u, \dots) + f(\xi, \eta, \zeta, \dots)] = \chi(\xi, \eta, \zeta, \dots),$$

et il s'agit maintenant d'en déduire  $f$ , autrement dit, de déterminer l'écart qui doit exister entre l'état de  $P$  et l'état stationnaire  $NF_0 (\xi - u, \dots)$  pour que, dans l'unité de volume et durant le temps  $dt$ , le nombre des molécules du groupe du § 1 éprouve, par suite des chocs, l'accroissement prescrit  $\chi(\xi, \eta, \zeta, \dots) d\lambda dt$ .

Nous pouvons maintenant faire usage de la circonstance que, sans rien changer aux mouvements relatifs des molécules, on peut donner à l'ensemble du gaz  $P$  une vitesse hydrodynamique  $(-u, -v, -w)$ . La fonction qui détermine la distribution des différents états de mouvement prend alors une valeur nouvelle, qu'on obtient en remplaçant, dans la valeur primitive,  $\xi, \eta, \zeta$  par  $\xi + u, \eta + v, \zeta + w$ . En outre, dans le nouvel état, le nombre des molécules du groupe ayant pour limites  $\xi$  et  $\xi + d\xi, \eta$  et  $\eta + d\eta, \zeta$  et  $\zeta + d\zeta, E$  et  $E + dE$ , etc. subira, par suite des chocs, un changement égal à celui qu'éprouvait, dans le premier état, le nombre des molécules du groupe ayant pour limites  $\xi + u$  et  $\xi + u + d\xi, \eta + v$  et  $\eta + v + d\eta, \zeta + w$  et  $\zeta + w + d\zeta, E$  et  $E + dE$ , etc. Analytiquement, cela s'exprime par l'équation

$$b - a [\text{pour } F = NF_0 (\xi, \eta, \zeta, \dots) + f(\xi + u, \dots)] = \chi(\xi + u, \eta + v, \zeta + w, \dots).$$

Donc, si on peut déterminer la fonction  $f'(\xi, \eta, \zeta, \dots)$  de telle sorte qu'il soit satisfait à l'équation

$$b - a [\text{pour } F = NF_0 (\xi, \eta, \zeta, \dots) + f'(\xi, \eta, \zeta, \dots)] = \chi(\xi + u, \eta + v, \zeta + w, \dots), \dots \dots \dots (12)$$

— c'est-à-dire, si l'on peut trouver de combien l'état de  $P$  doit différer de l'état de repos stationnaire  $N F_0 (\xi, \eta, \zeta, \dots)$ , pour que le nombre des molécules du groupe sus-indiqué varie d'une manière prescrite, — on aura

$$f' (\xi, \eta, \zeta, \dots) = f (\xi + u, \eta + v, \zeta + w, \dots),$$

et par conséquent

$$f (\xi, \eta, \zeta, \dots) = f' (\xi - u, \eta - v, \zeta - w, \dots) \dots (13)$$

Des conditions (7), relatives à  $f$ , on déduit encore facilement pour  $f'$  les conditions:

$$\begin{aligned} \int f' (\xi, \eta, \zeta, \dots) d\lambda &= \int f' (\xi, \eta, \zeta, \dots) \xi d\lambda = \int f' (\xi, \eta, \zeta, \dots) \eta d\lambda = \\ &= \int f' (\xi, \eta, \zeta, \dots) \zeta d\lambda = \int f' (\xi, \eta, \zeta, \dots) r^2 d\lambda = 0 \dots (14) \end{aligned}$$

Une fois  $f'$  trouvée au moyen de (12) et (14), puis  $f$  au moyen de (13), on peut passer au calcul des contingents qui en résultent pour  $P_x$ , etc. et que nous désignerons par  $P'_x$  etc. De (13) et (14) on déduit aisément

$$\begin{aligned} P'_x &= \int f' \xi^2 d\lambda, \quad P'_y = \int f' \eta^2 d\lambda, \quad P'_z = \int f' \zeta^2 d\lambda, \\ Q'_{x,y} &= \int f' \xi \eta d\lambda, \quad Q'_{y,z} = \int f' \eta \zeta d\lambda, \quad Q'_{z,x} = \int f' \zeta \xi d\lambda, \\ R' &= \int f' \left( \frac{1}{2} m r^2 + E \right) d\lambda, \\ S'_x &= \int f' \xi \left( \frac{1}{2} m r^2 + E \right) d\lambda + m(u P'_x + v Q'_{x,y} + w Q'_{x,z}) + \\ &\quad + u \int f' E d\lambda, \\ S'_y &= \int f' \eta \left( \frac{1}{2} m r^2 + E \right) d\lambda + m(u Q'_{x,y} + v P'_y + w Q'_{y,z}) + \\ &\quad + v \int f' E d\lambda, \\ S'_z &= \int f' \zeta \left( \frac{1}{2} m r^2 + E \right) d\lambda + m(u Q'_{x,z} + v Q'_{y,z} + w P'_z) + \\ &\quad + w \int f' E d\lambda, \end{aligned} \quad (15)$$

où, comme dans tout ce qui suivra, on doit entendre par  $f'$  la fonction  $f'$  ( $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , ...).

Si dans l'équation (12) on remet pour  $\chi$  sa valeur primitive, et que désormais on entende toujours par  $F_0$  la fonction  $F_0$  ( $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ ,  $E$ ,  $p_1 \dots p_k$ ,  $h$ ), on a, pour déterminer  $f'$ ,

$$\begin{aligned}
 b-a \left[ \text{pour } F = NF_0 + f' \right] = & N \frac{\partial F_0}{\partial \xi} \frac{\partial \psi}{\partial x} + N \frac{\partial F_0}{\partial \eta} \frac{\partial \psi}{\partial y} + N \frac{\partial F_0}{\partial \zeta} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \\
 & + F_0 \left[ \frac{\partial N}{\partial x} (\xi + u) + \frac{\partial N}{\partial y} (\eta + v) + \frac{\partial N}{\partial z} (\zeta + w) + \frac{\partial N}{\partial t} \right] - \\
 & - N \frac{\partial F_0}{\partial \xi} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} (\xi + u) + \frac{\partial u}{\partial y} (\eta + v) + \frac{\partial u}{\partial z} (\zeta + w) + \frac{\partial u}{\partial t} \right] - \\
 & - N \frac{\partial F_0}{\partial \eta} \left[ \frac{\partial v}{\partial x} (\xi + u) + \frac{\partial v}{\partial y} (\eta + v) + \frac{\partial v}{\partial z} (\zeta + w) + \frac{\partial v}{\partial t} \right] - \\
 & - N \frac{\partial F_0}{\partial \zeta} \left[ \frac{\partial w}{\partial x} (\xi + u) + \frac{\partial w}{\partial y} (\eta + v) + \frac{\partial w}{\partial z} (\zeta + w) + \frac{\partial w}{\partial t} \right] + \\
 & + N \frac{\partial F_0}{\partial h} \left[ \frac{\partial h}{\partial x} (\xi + u) + \frac{\partial h}{\partial y} (\eta + v) + \frac{\partial h}{\partial z} (\zeta + w) + \frac{\partial h}{\partial t} \right]. \quad (16)
 \end{aligned}$$

Le second membre de cette équation se laisse encore notablement simplifier. A cet effet, nous pouvons d'abord faire usage des équations de mouvement ( $a_2$ ), ( $b_2$ ), ( $c_2$ ); il est vrai que maintenant elles ne sont plus tout à fait exactes, mais elles n'en pourront pas moins servir à calculer le second membre de (16), qui n'a qu'une faible valeur. Ensuite on peut se dispenser, comme nous l'avons vu précédemment, de tenir compte des quantités

$$\frac{\partial F_0}{\partial \xi} + \frac{3}{h} F_0 \xi, \quad \frac{\partial F_0}{\partial \eta} + \frac{3}{h} F_0 \eta, \quad \frac{\partial F_0}{\partial \zeta} + \frac{3}{h} F_0 \zeta,$$

lorsqu'elles sont multipliées par un facteur indépendant de  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ ,  $E$ ,  $p_1, \dots, p_k$ . L'équation (16) devient alors :

$$\begin{aligned} b - a [\text{pour } F = NF_0 + f'] &= \\ &= N \left( \xi \frac{\partial F_0}{\partial h} + \frac{1}{3} \frac{\partial F_0}{\partial \xi} \right) \frac{\partial h}{\partial x} + N \left( \eta \frac{\partial F_0}{\partial h} + \frac{1}{3} \frac{\partial F_0}{\partial \eta} \right) \frac{\partial h}{\partial y} + \\ &+ N \left( \zeta \frac{\partial F_0}{\partial h} + \frac{1}{3} \frac{\partial F_0}{\partial \zeta} \right) \frac{\partial h}{\partial z} - \\ &- N \left( \eta \frac{\partial F_0}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial y} + \xi \frac{\partial F_0}{\partial \eta} \frac{\partial v}{\partial x} \right) - N \left( \zeta \frac{\partial F_0}{\partial \eta} \frac{\partial v}{\partial z} + \eta \frac{\partial F_0}{\partial \zeta} \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \\ &- N \left( \xi \frac{\partial F_0}{\partial \zeta} \frac{\partial w}{\partial x} + \zeta \frac{\partial F_0}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \\ &- N \left( \xi \frac{\partial F_0}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial x} + \eta \frac{\partial F_0}{\partial \eta} \frac{\partial v}{\partial y} + \zeta \frac{\partial F_0}{\partial \zeta} \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \\ &- N \left\{ F_0 + \frac{2h}{3[1+2\theta'(h)]} \frac{\partial F_0}{\partial h} \right\} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \dots (17) \end{aligned}$$

Pour en déduire  $f'$ , ou plutôt la valeur des intégrales qui entrent dans les équations (15), nous pouvons (voir p. 19) chercher les valeurs qui correspondent à différentes parties du second membre de (17) et en prendre la somme. Dans le choix de ces parties, nous nous laisserons guider par la considération de quelques cas simples.

$\alpha$ . Supposons le gaz en repos, et admettons que la température, et par conséquent  $h$ , soit une fonction de  $x$ . Le second membre de (17) devient alors :

$$N \left( \xi \frac{\partial F_0}{\partial h} + \frac{1}{3} \frac{\partial F_0}{\partial \xi} \right) \frac{\partial h}{\partial x} \dots \dots \dots (18)$$

Par un raisonnement semblable à celui que nous avons déjà



employé plus haut, c'est-à-dire, en considérant les images du gaz par rapport à des plans perpendiculaires aux axes des coordonnées, on peut montrer que la valeur de  $f'$ , qui répond à cette expression (18), ne peut fournir un contingent  $l$  que pour l'intégrale  $\int f' \xi \left( \frac{1}{2} m r^2 + E \right) d\lambda$ , lequel contingent

est évidemment proportionnel à  $\frac{\partial h}{\partial x}$ . Mais, si  $T$  est la température, on a  $\frac{\partial h}{\partial x} = e \frac{\partial T}{\partial x}$ , où  $e$  est pour chaque gaz une constante connue. Par conséquent,  $l$  est aussi proportionnel à  $\frac{\partial T}{\partial x}$

et peut être représenté par  $-\kappa \frac{\partial T}{\partial x}$ . Le coefficient  $\kappa$  ainsi intro-

duit n'est autre chose que le *coefficient de conductibilité calorifique*, ce qui ressort de ce que l'intégrale  $\int f' \xi \left( \frac{1}{2} m r^2 + E \right) d\lambda$

représente (exprimé en unités de travail) l'excès de la quantité de chaleur qui, dans l'unité de temps et à travers l'unité de surface d'un plan perpendiculaire à l'axe des  $x$ , passe dans le sens des  $x$  positifs, sur celle qui passe dans le sens opposé.

Si l'on connaissait la structure des molécules et leur action mutuelle, il y aurait quelque espoir de pouvoir calculer  $\kappa$ . A défaut de cette connaissance, tout ce que nous pouvons déduire de nos équations, c'est que  $\kappa$ , ainsi qu'il a déjà été montré par divers physiciens, est indépendant de la densité.

Comparons, en effet, deux masses gazeuses qui aux points correspondants ont la même température, mais dont la seconde est  $p$  fois aussi dense que la première. En vertu de (18), la différence  $b-a$  doit alors être, pour le second gaz,  $p$  fois aussi grande que pour le premier. Or, l'expression  $N F_0$  étant déjà pour ce gaz  $p$  fois aussi grande que pour l'autre, une valeur de  $f'$ , égale pour les deux gaz, donnera le rapport en question pour les valeurs de  $b-a$ ; de là découle immédiatement l'égalité de  $\kappa$  dans les deux cas.

Tout comme le premier terme de (17), on peut aussi traiter les deux suivants. On trouve ainsi que ces trois termes fournissent pour  $S'_x$ ,  $S'_y$ ,  $S'_z$  les contingents :

$$-\frac{\kappa}{e} \frac{\partial h}{\partial x}, \quad -\frac{\kappa}{e} \frac{\partial h}{\partial y}, \quad -\frac{\kappa}{e} \frac{\partial h}{\partial z} \quad \dots \dots \dots (19)$$

b. Admettons, en second lieu, que le gaz, avec une densité et une température partout les mêmes, possède dans le sens de l'axe des  $x$  une vitesse hydrodynamique dépendant seulement de  $y$ . Le second membre de (17) devient alors :

$$- N \eta \frac{\partial F_0}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial y}.$$

La considération des images nous apprend que de cette expression il ne peut résulter un contingent  $l'$  que pour  $\int f' \xi \eta d\lambda$ .

Ce contingent est évidemment proportionnel à  $\frac{\partial u}{\partial y}$ ; si l'on pose

$$l' = -\frac{\mu}{m} \frac{\partial u}{\partial y},$$

$\mu$  est le *coefficient de frottement*, dont on peut de nouveau montrer, tout comme pour  $\kappa$ , l'indépendance de la densité. En traitant exactement de la même manière les autres termes de (17), analogues à  $- N \eta \frac{\partial F_0}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial y}$ , on obtient pour  $Q'_{x,y}$ ,  $Q'_{y,z}$ ,  $Q'_{z,z}$  les contingents

$$-\frac{\mu}{m} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad -\frac{\mu}{m} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \quad -\frac{\mu}{m} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \dots (20)$$

et pour  $S'_x$ ,  $S'_y$ ,  $S'_z$

$$\begin{aligned}
& - \mu \left[ v \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + w \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right], \\
& - \mu \left[ w \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + u \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right], \\
& - \mu \left[ u \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + v \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] \dots (21)
\end{aligned}$$

c. Pour trouver ce que les termes

$$- N \left( \xi \frac{\partial F_0}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial x} + \eta \frac{\partial F_0}{\partial \eta} \frac{\partial v}{\partial y} + \zeta \frac{\partial F_0}{\partial \zeta} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \dots (22)$$

de l'équation (17) fournissent pour  $P'_x$  etc., nous pouvons faire usage de l'artifice suivant. En sus des axes des  $x$  et des  $y$ , introduisons deux nouveaux axes des  $x'$  et des  $y'$ , dont le premier divise en deux parties égales l'angle compris entre l'axe des  $x$  positifs et l'axe des  $y$  positifs, tandis que le second divise de même l'angle entre l'axe des  $x$  négatifs et l'axe des  $y$  positifs. Représentons-nous, en outre, qu'il existe dans le gaz un mouvement hydrodynamique dans la direction de l'axe des  $x'$ , avec une vitesse  $u' = c y'$  ( $c$  constant). On a alors :

$$u = v = c y' \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{2} c, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2} c,$$

et le second membre de (17) devient :

$$-\frac{1}{2} N c \left( \eta \frac{\partial F_0}{\partial \xi} - \xi \frac{\partial F_0}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{2} N c \left( \xi \frac{\partial F_0}{\partial \xi} - \eta \frac{\partial F_0}{\partial \eta} \right) \dots (23)$$

Comme, d'après ce qui a été dit en *b*, les deux termes

$$-\frac{1}{2} N c \eta \frac{\partial F_0}{\partial \xi} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} N c \xi \frac{\partial F_0}{\partial \eta}$$

donnent pour  $\int f' \xi \eta d\lambda$  des parts égales mais de signes opposés, il n'y a que le dernier terme de (23) qui puisse fournir des contingents à  $P'_x$ , etc. Or, ceux-ci sont faciles à trouver. Car, le

mouvement supposé étant exactement de même nature que celui considéré en  $b$ , on peut indiquer immédiatement la quantité de mouvement qui passe par l'unité de surface d'un plan perpendiculaire à l'axe des  $x'$ , ou à l'axe des  $y'$ . De cette quantité on peut ensuite déduire, par un raisonnement simple (en considérant les quantités de mouvement qui entrent et qui sortent par les différentes faces d'un élément de volume convenablement choisi), la quantité analogue pour un plan perpendiculaire à l'axe des  $x$  ou à l'axe des  $y$ . On trouve ainsi que l'expression (23) donne pour  $P'_x$  la part  $\frac{\mu}{m} c$ , pour  $P'_y$

la part  $-\frac{\mu}{m} c$ , tandis qu'on n'obtient aucun contingent pour  $Q'_{x,y}$ ,  $Q'_{y,z}$ ,  $Q'_{z,x}$ ,  $R'$ ,  $\int f' \xi \left( \frac{1}{2} m r^2 + E \right) d\lambda$ , etc.

Ecrivons maintenant, dans le cas général, l'expression (22) sous la forme

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} N \left( \xi \frac{\partial F_0}{\partial \xi} - \eta \frac{\partial F_0}{\partial \eta} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{1}{3} N \left( \eta \frac{\partial F_0}{\partial \eta} - \zeta \frac{\partial F_0}{\partial \zeta} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \\ & + \frac{1}{3} N \left( \zeta \frac{\partial F_0}{\partial \zeta} - \xi \frac{\partial F_0}{\partial \xi} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \\ & - \frac{1}{3} N \left( \xi \frac{\partial F_0}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial F_0}{\partial \eta} + \zeta \frac{\partial F_0}{\partial \zeta} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \dots \quad (24) \end{aligned}$$

Le premier terme se déduit du dernier de (23), si l'on pose

$$c = \frac{2}{3} \left( \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right),$$

de sorte qu'on peut assigner immédiatement la part que ce terme fournit pour  $P'_x$ , etc.

Il en est de même des deux termes suivants. En posant, pour abrégé,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = K,$$

on trouve

$$\text{pour } P'_x \quad - 2 \frac{\mu}{m} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2}{3} \frac{\mu}{m} K,$$

$$, \quad P'_y \quad - 2 \frac{\mu}{m} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{2}{3} \frac{\mu}{m} K,$$

$$, \quad P'_z \quad - 2 \frac{\mu}{m} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{2}{3} \frac{\mu}{m} K,$$

$$, \quad S'_x \quad - 2 \mu u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2}{3} \mu u K,$$

$$, \quad S'_y \quad - 2 \mu v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{2}{3} \mu v K,$$

$$, \quad S'_z \quad - 2 \mu w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{2}{3} \mu w K.$$

d. Finalement, il nous reste encore à parler de la quantité

$$-N \left[ F_0 + \frac{2h}{3[1+2\vartheta'(h)]} \frac{\partial F_0}{\partial h} + \frac{1}{3} \left( \xi \frac{\partial F_0}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial F_0}{\partial \eta} + \zeta \frac{\partial F_0}{\partial \zeta} \right) \right] \cdot K, \dots (25)$$

qu'on obtient par la réunion des derniers termes de (24) et de (17).

En considérant de nouveau les images de la masse gazeuse, on reconnaît que la valeur de  $f'$ , qui répond à (25), donne:

$$\begin{aligned} \int f' \xi \eta d\lambda &= \int f' \eta \zeta d\lambda = \int f' \zeta \xi d\lambda = \int f' \xi \left( \frac{1}{2} m r^2 + E \right) d\lambda = \\ &= \int f' \eta \left( \frac{1}{2} m r^2 + E \right) d\lambda = \int f' \zeta \left( \frac{1}{2} m r^2 + E \right) d\lambda = 0. \end{aligned}$$

Comme, d'un autre côté, on aura évidemment

$$\int f' \xi^2 d\lambda = \int f' \eta^2 d\lambda = \int f' \zeta^2 d\lambda,$$



chacune de ces quantités est  $= \frac{1}{3} \int f' r^2 d\lambda$ , et par conséquent, en vertu de (14),  $= 0$ . Il n'y a donc que l'intégrale  $\int f' E d\lambda$  qui puisse différer de 0. Elle pourra être représentée par  $\nu K$ ,  $\nu$  étant un coefficient constant, qui, de même que  $\mu$  et  $\kappa$ , est indépendant de la densité du gaz. En définitive, nous trouvons alors pour  $R'$  le contingent  $\nu K$ , et pour  $S'_x, S'_y, S'_z$ , respectivement  $\nu u K, \nu v K, \nu w K$ .

Ce coefficient  $\nu$ , qui ne se présente que pour les gaz polyatomiques (car, pour les gaz monoatomiques,  $E$  et par conséquent  $\nu$  sont nuls), est ici introduit pour la première fois, du moins à ma connaissance. On pourra le mieux se rendre compte de sa signification par les considérations suivantes.

Lorsqu'un gaz se trouve dans un état stationnaire de repos, il existe une certaine relation entre l'énergie  $A_1$  du mouvement de translation des molécules et l'énergie intramoléculaire  $A_2$ ; pour l'unité de masse, ces énergies sont  $\frac{1}{2} h$  et  $\vartheta(h)$ . Mais il n'en est plus ainsi quand l'état est variable. Si, par exemple, un gaz est comprimé, la vitesse du mouvement des molécules, et par conséquent  $h$ , augmentent. Par suite des chocs,  $A_2$  croîtra aussi; toutefois, un certain temps sera nécessaire pour faire acquérir à  $A_2$  la valeur  $\vartheta(h)$  qui, dans l'état stationnaire, répondrait à la nouvelle valeur de  $A_1$ . Pendant la durée de la compression, c'est-à-dire tant que  $h$  croît, on aura  $A_2 < \vartheta(h)$ .

Or, c'est là ce qui est indiqué par  $\nu$ . Lors d'une compression, en effet,  $K$  a une certaine valeur, et  $\nu K$  détermine exactement de combien  $A_2$  diffère de  $\vartheta(h)$ . Comme  $K$  est négatif durant la compression, et qu'on doit avoir  $A_2 < \vartheta(h)$ , il en résulte que la valeur de  $\nu$  doit être positive.

Malheureusement, une détermination expérimentale de  $\nu$  paraît avoir peu de chances de réussite. Pour que l'influence de  $\nu$  pût devenir sensible, il faudrait des variations de densité s'effectuant

avec beaucoup plus de rapidité que cela n'est le cas dans les expériences ordinaires sur les vibrations sonores.

Si maintenant nous résumons ce qui a été trouvé dans ce §, et que nous réunissions les valeurs de  $P'_x$ , etc. à celles que le § 3 a fournies pour  $P_x$ , etc., nous obtenons :

$$P_x = \frac{1}{m} \left[ \frac{1}{3} \delta h + \delta u^2 - 2 \mu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2}{3} \mu K \right], \text{ etc.}$$

$$Q_{x,y} = \frac{1}{m} \left[ \delta u v - \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right], \text{ etc.}$$

$$R = \frac{1}{2} \delta (u^2 + v^2 + w^2) + \frac{1}{2} \delta [h + 2 \vartheta(h)] + \nu K,$$

$$S_x = \frac{1}{2} \delta u \left[ \frac{5}{3} h + 2 \vartheta(h) + (u^2 + v^2 + w^2) \right] - \frac{x}{e} \frac{\partial h}{\partial x} -$$

$$- \mu \left[ v \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + w \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] -$$

$$- 2 \mu u \frac{\partial u}{\partial x} + \left( \frac{2}{3} \mu + \nu \right) u K, \text{ etc.}$$

En transportant ces valeurs dans les équations générales ( $a_1$ ), ( $b_1$ ), ( $c_1$ ), on obtient finalement les équations du mouvement. Je n'exécuterai pas ici cette substitution, le résultat en étant très compliqué, et l'étant d'autant plus que, à la rigueur,  $\mu$ ,  $x$  et  $\nu$  doivent être considérés comme des fonctions de  $h$ . Je ferai seulement remarquer que, si l'on ne tient pas compte de la variabilité de  $\mu$ , les équations ( $b_T$ ) prennent une forme équivalente à celle sous laquelle elles ont été obtenues par M. Maxwell <sup>1)</sup>.

Quand on se borne à un dérangement infiniment petit de l'équilibre, il est permis de regarder  $\mu$ ,  $x$  et  $\nu$  comme des constantes. Si, en outre, on supprime l'action des forces exté-

<sup>1)</sup> *Phil. Mag.* (4) XXXV, p. 209.

rieures, et qu'on introduise, comme au § 3, le signe  $s$  pour la condensation, les équations du mouvement deviennent:

$$K + \frac{\partial s}{\partial t} = 0, \dots \dots \dots (a_4)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{3} \frac{\partial (h + h_0 s)}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\mu}{\delta_0} \Delta u - \frac{1}{3} \frac{\mu}{\delta_0} \frac{\partial K}{\partial x} &= 0, \\ \frac{1}{3} \frac{\partial (h + h_0 s)}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\mu}{\delta_0} \Delta v - \frac{1}{3} \frac{\mu}{\delta_0} \frac{\partial K}{\partial y} &= 0, \\ \frac{1}{3} \frac{\partial (h + h_0 s)}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\mu}{\delta_0} \Delta w - \frac{1}{3} \frac{\mu}{\delta_0} \frac{\partial K}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \right\} \dots (b_4)$$

$$\frac{1}{3} h_0 K + \frac{1}{2} [1 + 2 \vartheta' (h_0)] \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\kappa}{\delta_0 e} \Delta h + \frac{\nu}{\delta_0} \frac{\partial K}{\partial t} = 0 \dots (c_4)$$