LE PHÉNOMÈNE DÉCOUVERT PAR HALL

ET LA

ROTATION ÉLECTROMAGNÉTIQUE DU PLAN DE POLARISATION DE LA LUMIÈRE,

PAR

H. A. LORENTZ.

---

§ 1. Partant de l'idée que peut-être un aimant n'agirait pas seulement sur le conducteur d'un courant électrique, mais aussi directement sur le courant lui-même transmis par ce conducteur, M. Hall, de Baltimore, a fait, en 1879, une découverte importante [1]). Après quelques expériences qui n'avaient conduit à aucun résultat, il plaça une mince feuille d'or, fixée sur une plaque de verre, entre les deux pôles d'un fort électro-aimant, de façon qu'elle fût perpendiculaire aux lignes de force du champ magnétique. Par la feuille d'or, qui avait la forme d'un rectangle, passait, d'un des côtés courts à l'autre, le courant de quelques éléments de Bunsen (le *courant principal*), et deux points, situés vis-à-vis l'un de l'autre sur les côtés longs, étaient reliés à un galvanomètre sensible.

Avant la mise en action de l'électro-aimant, ces deux points avaient été déterminés de telle sorte qu'ils fussent équipotentiels et que par conséquent, à l'établissement ou à la rupture du courant principal, aucun changement ne fût observé dans la position de

---

1) Un premier Mémoire dans *American Journal of Science a. Arts*, XIX, p. 200, et *Phil Mag.*, 5th Series, IX, p. 225; un second dans *American Journal*, XX, p. 161, et *Phil. Mag.*, X, p. 301.

l'aiguille du galvanomètre. Un courant étant alors admis dans le fil de l'électro-aimant, l'aiguille éprouvait une déviation, qui persistait tant que durait la force magnétique, et qui ne pouvait donc être attribuée à un phénomène d'induction. En d'autres termes, dès que la feuille d'or, traversée par le courant principal, est placée dans un champ magnétique, perpendiculaire aux lignes de force, il apparaît une force électromotrice dans une direction transversale, perpendiculaire aussi bien à la direction du courant principal qu'à celle de la force magnétique.

§ 2. Le phénomène n'avait d'ailleurs qu'une faible intensité; dans les différentes expériences, la force électromotrice transversale varia de $^1/_{3000}$ à $^1/_{6500}$ de la force électromotrice longitudinale qui est la cause du courant principal. Il fut reconnu, en outre, que le phénomène ne pouvait être observé que dans des feuilles métalliques très minces, et le matériel ne se prêtait donc pas à des mesures exactes. Néanmoins, M. Hall réussit à faire quelques déterminations quantitatives, indiquant que dans une même feuille métallique la force électromotrice transversale est proportionnelle tant à l'intensité du courant principal (ou à la force électromotrice qui entretient celui-ci) qu'à la puissance du champ magnétique. Ce résultat a été confirmé par des expériences postérieures de M. v. Ettingshausen [1]), lesquelles s'accordent aussi d'une manière satisfaisante avec celles de M. Hall en ce qui concerne l'intensité de l'effet. M. v. Ettingshausen a trouvé, dans différents cas, les valeurs $^1/_{7700}$ et $^1/_{2500}$ pour le rapport des forces électromotrices transversale et longitudinale.

M. Hall a aussi essayé l'argent, le fer, le nickel, le platine et l'étain, et il y a observé le même phénomène, dont toutefois la direction n'était pas toujours la même.

§ 3. Dans l'or la direction peut être indiquée de la manière suivante. Si, selon l'usage ordinaire, on entend par la direction d'un courant celle que suit l'électricité positive, la direction de la force électromotrice transversale s'obtient en faisant tourner

---

1) *Wiener Sitzungsberichte*, 2te Abth. LXXXI, p. 441.

la direction du courant principal d'un angle de 90° dans le sens du courant qui circule dans la bobine de l'électro-aimant. Lorsque, comme dans les expériences de M. Hall, les deux points situés en face l'un de l'autre sur les côtés longs de la feuille métallique sont reliés au galvanomètre, la règle énoncée détermine la direction du courant observée dans cet instrument. La communication avec le galvanomètre n'existe-t-elle pas, la force électromotrice transversale produira naturellement une accumulation d'électricité positive à l'un des bords de la feuille métallique et d'électricité négative à l'autre bord, jusqu'à ce que la force électromotrice qui en résulte fasse équilibre à celle qui provient de l'aimant. Dans ce cas, la règle donnée détermine la direction allant du côté négatif au côté positif de la feuille métallique.

La règle trouvée pour l'or s'applique aussi aux autres métaux étudiés par M. Hall, à l'exception du fer; dans ce métal le phénomène se produit en sens inverse.

§ 4. Sans vouloir donner une *explication* de l'action décrite, nous pouvons envisager celle-ci au point de vue de quelques propositions générales concernant la nature des forces physiques.

Une première proposition de ce genre est relative au mouvement de deux systèmes matériels A et A' pouvant être regardés, par rapport à un plan fixe, comme l'image par réflexion l'un de l'autre. Nous entendons par là que les points matériels de A et A', qui sont l'image l'un de l'autre, sont aussi de même nature physique, et que les points de A agissent réciproquement suivant les mêmes lois que ceux de A'. Le théorème en question dit alors que, s'il existe en A (sous l'influence des forces intérieures) un certain état de mouvement, il peut exister en A' un état de mouvement tel que A' *reste* l'image de A. Tous les phénomènes que nous connaissons plaident en faveur de ce théorème; il cesserait seulement d'être vrai si l'on voulait supposer concurremment des matières électriques et des matières magnétiques. Mais dès qu'on adopte la théorie d'Ampère sur la nature du magnétisme, l'image d'un pôle magnétique devient un pôle contraire et la proposition peut être admise aussi dans le domaine de l'électromagnétisme.

En prenant maintenant, dans l'expérience de Hall, les images, par rapport à un plan quelconque, de la plaque métallique (c'est-à-dire de tous ses points matériels), du courant magnétisant, du courant principal et du courant du circuit galvanométrique (ou, si ce dernier manque, de l'électricité libre aux bords de la feuille métallique), on obtient une seconde expérience, dans laquelle, comme il est facile de le voir, la direction du phénomène est de nouveau déterminée par la règle du § précédent. Il en résulte que l'image d'un morceau de métal a exactement les mêmes propriétés (au moins en tant qu'il y a lieu d'en tenir compte ici) que ce métal lui-même.

On sait que cela ne peut être dit de tous les corps; il existe des matières dont l'image possède d'autres propriétés que la matière elle-même, et dont les parties constituantes doivent avoir un arrangement tel que, même si l'on prend l'image de chaque point matériel, l'image totale ne peut pas être superposée à la matière originale. Ces matières sont celles qui présentent la rotation *naturelle* du plan de polarisation, car, de la proposition mentionnée au commencement de ce §, il suit aisément que l'image d'une matière dextrogyre doit être lévogyre. Dans les matières telles que le quartz dextrogyre et lévogyre la nature nous présente des corps qui, en ce qui concerne leur structure moléculaire, montrent la même différence qu'un objet et son image, différence qui se manifeste d'ailleurs dans la forme cristalline extérieure. Le raisonnement ci-dessus prouve que le phénomène observé par Hall est, en tout cas, entièrement indépendant des causes qui donnent lieu à la rotation naturelle du plan de polarisation.

§ 5. Une seconde proposition est celle-ci: lorsque, dans un système matériel, la vitesse de chaque point est subitement invertie, ces points parcourent exactement les mêmes trajectoires qu'avant le renversement, avec les mêmes vitesses, seulement en direction opposée. Cette proposition ne peut être vraie que pour certaines catégories de forces. Sans rechercher si toutes les forces physiqnes connues appartiennent à ces catégories, nous remarquerons ici que le théorème en question est applicable dans la théorie de l'électricité, si un état électrostatique est regardé comme un état réel de repos, un courant électrique, au contraire, comme un phénomène de mouvement, dont l'inversion produit le renversement de la direction du courant, et si l'on suppose seulement des forces telles que des attractions et des répulsions, qui sont des fonctions de la distance ou qui sont déterminées par la loi de Weber ou par celle de Clausius, ou enfin des pressions et des tensions, indépendantes des vitesses.

Figurons-nous maintenant l'expérience de Hall disposée de façon qu'il n'existe pas de communication des bords de la lame métallique avec le galvanomètre et qu'il y ait par conséquent, à ces bords, une accumulation d'électricité libre. Si l'on renverse alors toutes les directions de mouvement, le courant principal acquiert une direction contraire, l'aimant une polarité contraire, tandis que rien n'est changé à la charge électrostatique des bords de la feuille métallique. On obtient donc un état qui, tout comme l'état primitif, satisfait à la règle du § 3; celle-ci implique, en effet, qu'en cas de renversement simultané des pôles magnétiques et du courant principal, l'effet conserve le même signe. Nous pouvons donc conclure que le phénomène observé par M. Hall est en complet accord avec le théorème énoncé dans le présent §.

Ce théorème étant admis, un raisonnement simple montre qu'une autre expérience de M. Hall [1]), faite avec un isolateur, ne pouvait conduire à aucun résultat. A partir des quatre côtés d'une plaque de verre à glace et jusqu'à une petite distance du centre avaient été forés des canaux parallèles aux faces latérales. Dans ces canaux étaient introduites des électrodes bien isolées, dont deux, situées vis-à-vis l'une de l'autre, communiquaient avec les armatures d'un condensateur chargé, tandis que les deux autres étaient reliées à un électromètre à quadrant. La plaque de verre étant placée, comme précédemment la feuille métallique, entre les pôles d'un électro-aimant, on reconnut que

---

1) *American Journal*, XX; *Phil. Mag.*, X, p.304.

le renversement de ces pôles n'avait pas d'influence sur l'indication de l'électromètre. M. Hall avait présumé que peut-être une pareille influence se produirait, en conséquence de ce que, comme dans le métal les lignes de courant, ici les lignes de force pouvaient subir une rotation, ce qui aurait effectivement pour résultat un changement de la différence de potentiel entre les deux électrodes reliées à l'électromètre.

Mais, si une pareille action existait, le renversement de toutes les directions de mouvement du système entier donnerait seulement lieu à l'interversion des pôles, tandis que dans la plaque de verre, où tout est en repos, rien ne changerait. Or, comme il est impossible qu'en cas d'interversion des pôles l'action reste la même, il faut ou bien que le théorème mentionné dans ce § soit inexact, ou bien que le résultat cherché par M. Hall soit impossible.

§ 6. Dans beaucoup de phénomènes électriques on peut admettre, — et telle est la troisième des propositions que nous avions en vue, — que l'électricité positive et négative (regardées ici comme des matières) se comportent de la même façon, qu'elles éprouvent donc les mêmes forces non seulement de la part de l'électricité de même signe ou de signe contraire mais aussi de la part de la matière ordinaire. La plupart des phénomènes électrostatiques sont en accord avec cette proposition, et il en est de même de beaucoup d'actions où intervient le courant galvanique; celui-ci peut souvent être conçu, indifféremment, soit comme un mouvement d'électricité positive vers un côté, soit comme un mouvement d'électricité négative vers le côté opposé. La preuve, toutefois, que la proposition énoncée n'est pas d'une vérité générale, est fournie, entre autres, par les phénomènes de décharge, par l'électrolyse et par la différence de potentiel entre des corps mis en contact. Or, il convient de remarquer que l'expérience de Hall est également en désaccord avec la proposition. En effet, si celle-ci était exacte, de tout état de mouvement de particules électriques dans un système de corps on pourrait déduire un second état, pareillement possible, en remplaçant simplement chaque particule électrique positive par une égale particule négative, et réciproquement; d'un courant électrique il naîtrait ainsi un courant dirigé en sens contraire. Ceci étant appliqué à l'expérience de Hall, dans la forme, par exemple, où une accumulation d'électricité libre se produit aux bords de la feuille métallique, on devrait, en renversant les pôles magnétiques et le courant principal, obtenir aussi un effet opposé, tandis qu'en réalité l'effet conserve alors le même signe.

Pour toutes les théories qui cherchent à expliquer les phénomènes par les mouvements de particules électriques, il suit donc, de l'expérience de Hall, ou bien que dans un courant électrique les deux électricités ne se meuvent pas de la même manière (de sorte que leur substitution réciproque fait naître quelque chose qui n'est pas un courant électrique ordinaire), ou bien qu'il doit exister quelque autre différence dans la façon dont les électricités positive et négative se comportent.

Aussi, lorsque M. Boltzmann [1]), peu de temps après que M. Hall eut fait connaître ses expériences, fonda sur elles une méthode pour déterminer la vitesse de l'électricité dans un courant galvanique, il admit que dans la feuille métallique une seule des deux électricités se déplace. Une grave objection à cette hypothèse est fournie, comme l'a remarqué M. Hall [2]), par la direction du phénomène dans le fer, laquelle est opposée à celle dans les autres métaux. Mais, qu'on accepte ou non l'hypothèse de M. Boltzmann, l'une ou l'autre différence entre les deux électricités sera toujours nécessaire pour expliquer l'expérience de Hall.

§ 7. Sans essayer une pareille *explication*, on peut donner une *description mathématique* du phénomène. M. Hopkinson [3]) a fait remarquer que cette description est déjà contenue dans

---

1) *Phil. Mag.*, IX, p.308.

2) *American Journ*, XX, p.52, et *Phil. Mag.*, X, p.136.

3) *Phil. Mag.*, X, p.430.

un système d'équations établi antérieurement par Maxwell [1]).

En effet, tout ce qu'a observé M. Hall peut être déduit si l'on fait subir aux équations

$$X = \varkappa u, \; Y = \varkappa v, \; Z = \varkappa w,$$

qui dans les cas ordinaires expriment la relation entre la force électromotrice (X, Y, Z) et le courant (u, v, w), une légère modification, savoir si, pour un conducteur placé dans un champ magnétique homogène, dont les lignes de force sont dans la direction de l'axe des z, on pose

$$X = \varkappa u + h v, \; Y = \varkappa v - h u, \; Z = \varkappa w \quad . \; . \; . \; . \; (1)$$

(X, Y, Z) doit alors être la force électromotrice qui existe indépendamment du phénomène de Hall, tandis que h est un coefficient proportionnel à la force magnétique.

Les équations (1) s'obtiennent facilement, si l'on remarque que la force électromotrice totale dans la direction de l'axe des x est composée de X et de la force électromotrice qui, d'après la règle du § 3, doit son origine au „courant principal" v et à la force magnétique. Cette force électromotrice *accessoire* peut être représentée par $h v$, et la force totale, à laquelle le courant u doit être proportionnel, devient alors $X \pm h v$; de la même manière on a, parallèlement à l'axe des y, la force électromotrice $Y \mp h u$. Le choix des signes est subordonné à la nature du système de coordonnées qu'on emploie. Nous admettrons que lorsque l'axe positif des x tourne de 90° vers l'axe positif des y, cette rotation concorde, pour un spectateur placé du côté des z positifs, avec le mouvement des aiguilles d'une montre. Il suit alors, de ce qui a été dit au § 3, que dans (1) h est positif pour le fer, négatif pour les autres métaux étudiés.

De la faiblesse des actions observées dans l'expérience de

---

1) *Electricity a. Magnetism*, I, p.349.

Hall on peut d'ailleurs conclure que, même dans un champ magnétique très puissant, la quantité h est très petite comparativement à $\varkappa$. Aussi, dans tous les calculs suivants, négligerons-nous les puissances deuxième et supérieures de h.

§ 8. Les équations (1) peuvent d'abord servir à étudier en détail le phénomène observé par M. Hall. Remarquons, à cet effet, que dans la mince feuille métallique, placée perpendiculairement à l'axe des z, il est permis de poser Z et $w = 0$, de sorte que nous n'avons affaire qu'aux deux premières équations. Si maintenant l'axe des x coïncide avec la longueur de la feuille métallique, u est le courant principal, et si les bords ne sont *pas* reliés au galvanomètre, l'équilibre se produit quand on a $v = 0$ et par conséquent, à la fois,

$$X = \varkappa u \text{ et } Y = -hu.$$

La quantité

$$Y = -\frac{h}{\varkappa} X$$

détermine la force électromotrice qui, dans l'état d'équilibre, existe par suite de la charge électrostatique des bords, et, si b est la largeur de la lame, la différence de potentiel entre les bords devient

$$\frac{h}{\varkappa} b X.$$

Quant à l'intensité i du courant qui peut être observé dans le galvanomètre, elle est donnée par

$$i = \frac{h}{\varkappa} \cdot \frac{bX}{r},$$

lorsque r est la résistance du circuit galvanométrique.

En désignant par I l'intensité du courant principal, et par δ l'épaisseur de la feuille métallique, on a

$$X = \frac{\varkappa I}{b \delta},$$

donc

$$i = \frac{h I}{\delta r}.$$

Au lieu de I, nous pouvons encore introduire la force électromotrice E de la pile qui nous fournit le courant principal. Si l'on désigne par α une quantité dépendant de la longueur et de la largeur de la feuille métallique et de la place des électrodes, la résistance que la feuille métallique oppose au courant principal peut être représentée par $\frac{\alpha}{\delta}$, de sorte que, R étant la résistance dans le courant principal en dehors de la feuille métallique, on a

$$I = \frac{E}{R + \frac{\alpha}{\delta}}.$$

De même, on aura

$$r = r_g + \frac{\alpha'}{\delta},$$

si r_g est la résistance dans le circuit galvanométrique en dehors de la feuille métallique et α' une quantité analogue à α. La formule

$$i = \frac{h E}{\delta \left(R + \frac{\alpha}{\delta}\right)\left(r_g + \frac{\alpha'}{\delta}\right)}$$

montre comment le courant dans le galvanomètre varie avec δ. Ce courant devient maximum lorsque

$$\frac{\alpha \alpha'}{\delta^2} = R r_g,$$

c'est-à-dire, lorsque le produit des deux résistances de la feuille métallique, dont il y a à tenir compte, est égal à celui des résistances extérieures. Bien entendu, cela exige une épaisseur très faible.

§ 9. Nous examinerons encore de plus près jusqu'à quel point une modification peut être introduite dans la marche des courants électriques par les termes $+hv$ et $-hu$ qui entrent dans les équations (1). Bornons-nous au cas d'une mince feuille métallique de forme quelconque, placée dans le plan xy, et limitée en partie par des bords où il ne peut entrer ni sortir d'électricité (bords *libres*), en partie par des bords (ou portions de bords) donnant accès ou issue à l'électricité et que nous supposerons maintenus ainsi chacun à un potentiel constant. Supposons qu'il y ait deux pareilles électrodes, s_1 et s_2, aux potentiels φ_1 et φ_2, et tâchons de déterminer la distribution du courant dans la lame.

Lorsque aucune force magnétique n'agit, nous avons, φ désignant la fonction potentielle en un point quelconque,

$$u=-\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial \varphi}{\partial x}, v=-\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

et dans l'état stationnaire

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}=0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

tandis qu'aux électrodes on doit avoir

$$\varphi=\varphi_1 \text{ et } \varphi=\varphi_2$$

et au bord libre

$$u \cos\alpha + v \sin\alpha = 0,$$

ou

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n}=0.$$

n représente ici la normale au contour de la lame, et α l'angle (nx). Nous nous figurons la normale dirigée vers l'extérieur.

Quand φ est déterminée par ces conditions, la quantité d'électricité qui dans l'unité de temps passe de s_1 à la lame et de celle-ci à s_2 (nous supposons $\varphi_1 > \varphi_2$), est donnée par

$$e = -\delta \int (u \cos \alpha + v \sin \alpha)\, d s_1,$$

où l'intégration doit s'étendre à toute l'électrode.

Supposons maintenant qu'une force magnétique agisse et qu'il y ait par conséquent lieu d'appliquer les équations (1). En continuant d'attribuer à φ, u, v la signification antérieure, nous pouvons, dans ce nouveau problème, écrire pour la fonction potentielle et pour les composantes du courant: $\varphi + \varphi'$, $u + u'$, $v + v'$; φ', u', v' sont ici, comme h, de très petites quantités.

La première des équations (1) donne alors

$$-\frac{\partial (\varphi + \varphi')}{\partial x} = \varkappa (u + u') + h (v + v'),$$

ou, en négligeant des quantités du second ordre et en ayant égard à (2),

$$u' = -\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial \varphi'}{\partial x} + \frac{h}{\varkappa^2}\frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

de même, on a

$$v' = -\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial \varphi'}{\partial y} - \frac{h}{\varkappa^2}\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

De ces équations, combinées avec

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0,$$

on déduit pour l'état stationnaire

$$\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial y^2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Comme d'ailleurs, aux électrodes, φ prend déjà les valeurs prescrites, il faut qu'on y ait

$$\varphi' = 0,$$

tandis qu'au bord libre nous obtenons la condition

$$u' \cos \alpha + v' \sin \alpha = 0,$$

ou, en vertu de (4) et (5),

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial n} = \frac{h}{\varkappa} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos \alpha - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \sin \alpha \right).$$

La dernière équation peut être remplacée par

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial n} = \frac{h}{\varkappa} \frac{\partial \varphi}{\partial s}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

lorsque s est compté le long du bord et pris positif dans une direction telle, qu'une rotation de la normale n vers la direction s corresponde à une rotation de l'axe des x vers l'axe des y.

φ' différant maintenant de 0, comme le confirment les expériences de M. Hall, il s'agit de savoir si la quantité d'électricité, qui par unité de temps s'écoule de s_1 sur la lame, est changée. En écrivant pour cette quantité $e + e'$, on a

$$e' = - \delta \int (u' \cos \alpha + v' \sin \alpha) \, d s_1 ,$$

donc, en vertu de (4) et (5),

$$e' = \frac{\delta}{\varkappa} \int \frac{\partial \varphi'}{\partial n} d s_1 ,$$

puisque, le long de s_1, il vient

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0.$$

L'état étant supposé stationnaire, la quantité e' doit, en tout cas, quitter la lame à la seconde électrode, de sorte qu'on a aussi

$$e' = - \frac{\delta}{\varkappa} \int \frac{\partial \varphi'}{\partial n} d s_2 .$$

Nous démontrerons maintenant que $e' = 0$. A cet effet, nous faisons usage de la formule connue

$$\int \varphi \left(\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial y^2}\right) d\omega - \int \varphi' \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right) d\omega =$$
$$= \int \varphi \frac{\partial \varphi'}{\partial n} ds - \int \varphi' \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds,$$

où $d\omega$ représente un élément de surface de la feuille métallique et où les deux premières intégrales doivent être prises sur toute l'étendue de cette feuille, les deux dernières le long du bord libre et des électrodes. Or, en vertu de (3) et de (6), les deux premières intégrales s'évanouissent, et la quatrième est également 0, parce qu'aux électrodes on a $\varphi' = 0$ et au bord libre $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$. On obtient donc

$$\int \varphi \frac{\partial \varphi'}{\partial n} ds = 0 \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad (8)$$

Etendue à la première électrode, cette intégrale donne:

$$\varphi_1 \int \frac{\partial \varphi'}{\partial n} ds_1 = \frac{\varkappa}{\delta} \varphi_1 e', \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad (9)$$

et pareillement, étendue à la seconde électrode:

$$\varphi_2 \int \frac{\partial \varphi'}{\partial n} ds_2 = -\frac{\varkappa}{\delta} \varphi_2 e' \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad (10)$$

Pour la troisième partie de l'intégrale (8), partie qui doit être prise le long du bord libre, il est permis d'écrire, en vertu de (7):

$$\frac{h}{\varkappa} \int \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial s} ds = \frac{h}{2\varkappa} \int \frac{\partial (\varphi^2)}{\partial s} ds$$

et nous pouvons étendre cette intégration au contour entier, puisque le long des électrodes on a $\frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0$. Or, si l'on considère que le contour consiste en une ou plusieurs lignes fermées, dont chacune doit être parcourue en entier quand on veut évaluer l'intégrale (voir ce qui a été dit ci-dessus concernant la direction positive le long de s), on reconnaît que la dernière intégrale disparaît. L'équation (8) se réduit donc à ceci, que la somme de (9) et (10) s'annule, et de là suit $e' = 0$.

Si les équations (1) sont exactes, il passera donc par la lame, sous la différence de potentiel $\varphi_1 - \varphi_2$, la même quantité d'électricité, que la lame se trouve ou non dans le champ magnétique; en d'autres termes, la force magnétique ne déterminera aucun changement dans la *résistance* de la lame. Les expériences entreprises par M. Hall et par d'autres [1]), en vue de la découverte d'un pareil changement, ne pouvaient donc fournir aucun résultat ou du moins ne faire trouver qu'un changement de résistance d'un ordre supérieur à h.

§ 10. Immédiatement après que M. Hall eut exécuté ses premières expériences, M. Rowland [2]) fit remarquer que l'action dont elles accusaient l'existence pouvait conduire à une explication de la rotation électromagnétique du plan de polarisation de la lumière. En effet, si sous l'influence d'un aimant un courant est dévié de sa direction, par suite de l'apparition d'une composante transversale, on comprend que les vibrations lumineuses, qui selon la théorie de Maxwell sont des mouvements de même nature que les courants électriques, éprouvent également une rotation dans un champ magnétique. Plus tard, M. Rowland a publié un Mémoire étendu [3]), dans lequel il étudie la question de plus près, en se bornant aux corps isolants. Il est vrai que dans son expérience sur un isolateur M. Hall n'a pu constater une rotation des lignes de force, et que des raisons théoriques nous ont aussi fait regarder une semblable action comme peu probable; mais rien n'empêche de supposer que dans les isolateurs il se produit d'une autre manière une action analogue à celle que M. Hall a observée dans les métaux. On peut en effet admettre que, dans un champ magnétique, tout *mouvement* d'électricité dans l'isolateur (le *displacement-current* de Maxwell)

---

1) *Phil. Mag.*, IX, p.226 et X, p.301 et 326.

2) *Phil. Mag.*, IX, p.432.

3) *Amer. Journ. of Math.*, III, p.89. De ce Mémoire, je ne connais que l'extrait donné dans les *Beiblätter zu Wied. Ann.*, V.p.313.

provoque une force électromotrice transversale. Telle est l'hypothèse qui a servi de point de départ à M. Rowland dans le Mémoire cité en dernier lieu.

Les expériences de Hall n'ayant montré le nouveau phénomène que dans les métaux, j'ai cru que précisément chez ces corps il était opportun d'étudier l'influence du magnétisme sur le mouvement lumineux. Cette étude m'a paru offrir d'autant plus d'intérêt que les expériences de M. Kerr, sur la lumière réfléchie par un pôle magnétique, ont fait connaître des phénomènes qui sont indubitablement dans une relation intime avec la rotation du plan de polarisation dans les corps transparents.

§ 11. Imaginons qu'un milieu quelconque, — conducteur ou non, — dans lequel se manifeste l'effet observé par M. Hall, soit placé dans un champ magnétique homogène, à lignes de force parallèles à l'axe des z. Lorsque des mouvements électriques ont lieu dans ce corps, la force électromotrice $(\mathsf{X}, \mathsf{Y}, \mathsf{Z})$, qui au temps t agit en un point (x, y, z), sera composée de deux parties, à savoir, de la force (X, Y, Z) imputable à l'action électrostatique et à l'induction, et de la force électromotrice accessoire, découverte par M. Hall. Comme nous devons admettre, pour pouvoir expliquer aussi dans les isolateurs la rotation du plan de polarisation, que le *displacement-current* produit une action analogue à celle du courant ordinaire de conduction nous supposerons que la force électromotrice transversale dépend de la manière indiquée au § 7 des composantes totales du courant. Celles-ci étant représentées par u, v, w, nous posons donc

$$\mathsf{X} = X - hv, \quad \mathsf{Y} = Y + hu, \quad \mathsf{Z} = Z \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

§ 12. Rien n'est changé, par l'intervention de l'action nouvelle, ni à la manière dont la force électromotrice (X, Y, Z) dépend des composantes du courant, de la distribution de l'électricité libre et des moments magnétiques qui peuvent être suscités par le courant électrique, ni à la relation de ces dernières quantités entre elles.

En désignant donc par φ et χ les fonctions potentielles électrique et magnétique, par L, M, N les composantes de la force magnétique, — les quatre dernières quantités en tant qu'elles sont dues au mouvement électrique, donc avec exclusion de la force magnétique permanente à laquelle le corps est soumis, — enfin par ϑ la constante magnétique, on peut appliquer les équations ordinaires [1])

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}&=(1+4\pi\vartheta)A\frac{\partial L}{\partial t},\\ \frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}&=(1+4\pi\vartheta)A\frac{\partial M}{\partial t},\\ \frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}&=(1+4\pi\vartheta)A\frac{\partial N}{\partial t},\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad \text{(I)}$$

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=-\Delta\varphi+A^2 k\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \quad \ldots\ldots \quad \text{(II)}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial z}&=A\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial t}-4\pi u\right),\\ \frac{\partial L}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial x}&=A\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial t}-4\pi v\right),\\ \frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial y}&=A\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial t}-4\pi w\right),\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad \text{(III)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}+\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial z}=-\Delta\chi \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(IV)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}(\Delta\varphi) \ldots\ldots\ldots \quad \text{(V)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}+\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial z}=\frac{1}{4\pi\vartheta}\Delta\chi, \ldots\ldots\ldots \quad \text{(VI)}$$

qui avec (11) déterminent le mouvement lumineux, si nous y joignons encore les équations qui expriment la relation entre u, v, w et $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$.

[1]) Helmholtz, *Ueber die Bewegungsgleichungen der Electricität in ruhenden Leitern*, dans Crelle's *Journal* LXXII. Voir aussi ma *Theorie der terugkaatsing en breking van het licht*, Chap. II. A et k sont les constantes qui entrent dans la formule de l'induction.

§ 13. Bien que cette relation ne soit pas complètement connue, nous pouvons pourtant traiter la question très simplement, en nous bornant à considérer des faisceaux lumineux d'une durée de vibration déterminée et en laissant de côté tous les problèmes qui appartiennent à la théorie de la dispersion.

D'abord nous pouvons admettre que dans un milieu isotrope u n'est lié qu'à X, v à Y, w à Z, et que la forme de ces trois relations est la même. Ensuite, il sera permis de supposer que la relation entre X et u est exprimée par une équation dans laquelle ces quantités elles-mêmes et un ou plusieurs de leurs coefficients différentiels par rapport à t entrent linéairement, avec des coefficients constants, c'est-à-dire qu'on a

$$A\,\mathsf{X} + B\frac{\partial\,\mathsf{X}}{\partial\,t} + \text{etc.} \ldots = A'\,u + B'\frac{\partial\,u}{\partial\,t} + \text{etc.}, \quad (12)$$

où A, B, ..., A', B', ... dépendent de la nature du corps [1]).

On peut facilement déduire de là que, lorsque X est donné par une fonction goniométrique du temps, u est également représenté par une fonction de ce genre, laquelle toutefois, en général, offrira une certaine différence de phase par rapport à X. La chose devient encore plus simple si l'on cherche d'abord, ainsi qu'il est permis de le faire pour un système d'équations linéaires, une solution où entrent des fonctions exponentielles, de laquelle on déduira ensuite la solution véritable, en sup-

---

[1]) Cette équation comprend, par exemple, le cas où dans un isolateur les composantes de la polarisation diélectrique sont $= \varepsilon\,\mathsf{X}$, $\varepsilon\,\mathsf{Y}$, $\varepsilon\,\mathsf{Z}$ et où, par conséquent, $u = \varepsilon\frac{\partial\,\mathsf{X}}{\partial\,t}$. De même, elle comprend le cas d'un courant ordinaire de conduction, où l'on a $\mathsf{X} = \varkappa\,u$. Mais, même en admettant (voir ma *Theorie der terugkaatsing en breking van het licht*, Chap. V, ainsi que Schlömilch's *Zeitschrift*, t. XXII, p. 1 et 205, t. XXIII, p. 197) que dans un métal il existe une polarisation électrique des molécules et que dans un courant une certaine masse est en mouvement, on arrive à des formules qui sont comprises dans l'équation (12). La forme générale de celle-ci a l'avantage d'être indépendante d'hypothèses particulières sur le mécanisme par lequel u est excité par X.

posant les exposants imaginaires et en prenant seulement les parties réelles.

Si maintenant u et X ne contiennent le temps que dans le facteur

$$e^{\gamma t},$$

(où γ sera supposé imaginaire $= -i\frac{2\pi}{T}$), l'équation (12) et les deux équations correspondantes se réduisent à

$$u = p\,\mathsf{X},\quad v = p\,\mathsf{Y},\quad w = p\,\mathsf{Z}\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(13)$$

La quantité p est en général complexe et comprend les *deux* quantités (par exemple, la vitesse de propagation et le coefficient d'absorption, ou l'angle d'incidence principal et l'azimut principal) par lesquelles peuvent être caractérisées les propriétés optiques du milieu. Il est évident que p dépendra de γ, par conséquent de la durée de vibration T, mais, tant que nous nous bornons à une valeur unique de T, il n'est pas nécessaire d'examiner de plus près cette dépendance.

§ 14. Considérons maintenant le cas d'un faisceau lumineux qui traverse le milieu dans la direction de l'axe des z, donc suivant les lignes de force du champ magnétique. Nous ferons voir que des vibrations transversales sont possibles, mais qu'un mouvement d'électricité doit avoir lieu tant suivant l'axe des x que suivant l'axe des y. En d'autres termes, nous démontrerons que les expressions

$$u = e^{\gamma(t - Rz)},\quad v = a\,e^{\gamma(t - Rz)},\quad w = 0$$

satisfont aux équations du mouvement, lorsque a et R sont convenablement choisis.

Posons, pour abréger:

$$e^{\gamma(t - Rz)} = P,$$

donc

$$u = P,\quad v = a\,P,\quad w = 0;$$

il suit alors de (13):

$$\mathbf{X} = \frac{1}{p} P, \quad \mathbf{Y} = \frac{a}{p} P, \mathbf{Z} = 0,$$

de (11)

$$X = \left(\frac{1}{p} + a\,h\right) P, \quad Y = \left(\frac{a}{p} - h\right) P, \quad Z = 0,$$

et de (I)

$$L = \frac{R}{(1 + 4\,\pi\,\vartheta)\,A}\,Y, \quad M = -\frac{R}{(1 + 4\,\pi\,\vartheta)\,A}\,X, \quad N = 0.$$

A (II), (IV), (V) en (VI) il sera satisfait par

$$\varphi = 0 \text{ et } \chi = 0,$$

tandis que la troisième des équations (III) donne alors $0 = 0$ et que les deux premières fournissent deux conditions. Si l'on pose

$$4\,\pi\,A^2\,(1 + 4\,\pi\,\vartheta) = B, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

ces deux conditions sont

$$\gamma \left(\frac{1}{p} + a\,h\right) R^2 = B$$

et

$$\gamma \left(\frac{a}{p} - h\right) R^2 = a\,B.$$

De là résulte finalement:

$$a = \pm\, i$$

et

$$R^2 = \frac{B\,p}{\gamma\,(1 \pm i\,h\,p)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

§ 15. L'apparition des doubles signes montre que *deux* états de vibration, tels que nous les avons supposés, sont possibles et que ces deux états suivent, dans leur propagation, des lois différentes.

Dans le premier, on a

$$u = P, \quad v = i\,P,$$

d'où, en posant

$$\gamma = -i\,\frac{2\pi}{T}$$

et

$$R = S_1 + i S_2$$

(car R est en général une quantité complexe), et en prenant finalement les seules parties réelles, on déduit:

$$u = e^{-\frac{2\pi S_2}{T} z} \cos \frac{2\pi}{T}(t - S_1 z),$$

$$v = e^{-\frac{2\pi S_2}{T} z} \sin \frac{2\pi}{T}(t - S_1 z).$$

Ces équations représentent un faisceau de lumière polarisée circulairement, qui se propage avec la vitesse $\frac{1}{S_1}$ et subit une absorption dont la valeur est déterminée par S_2.

En prenant les signes inférieurs, on obtient un faisceau analogue, mais à polarisation circulaire opposée, et auquel correspondent d'autres valeurs de S_1 et de S_2.

L'équation (15), qui détermine la quantité R pour les deux états de mouvement, peut être mise sous une forme encore plus convenable par l'introduction de la valeur R_0, relative au cas où aucune force magnétique n'agit sur le corps. On a évidemment

$$R_0^2 = \frac{Bp}{\gamma}, \quad p = \gamma \frac{R_0^2}{B},$$

de sorte que (15) devient

$$R^2 = \frac{R_0^2}{1 \pm i\gamma \frac{R_0^2 h}{B}},$$

où, vu la faible valeur de h,

$$R = R_0\left(1 \mp \tfrac{1}{2} i\gamma \frac{R_0^2 h}{B}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Dans un isolateur, p est une quantité purement imaginaire et, puisque γ l'est également, R_0 est réel; d'après (16), R prendra de même une valeur réelle. Aucun des deux rayons polarisés circulairement ne subit donc, dans ce cas, une absorption; il n'y a à considérer que leurs vitesses de propagation, et de la différence de celles-ci on conclut, de la manière connue, à la rotation du plan de polarisation. Après le travail de M. Rowland, nous n'avons toutefois pas à nous occuper de cette question.

§ 16. Chez les métaux, rien jusqu'ici n'a été constaté directement quant aux différences d'absorption et de vitesse de propagation que doivent présenter les deux faisceaux lumineux dont il vient d'être question. Mais, comme en général chaque particularité dans la manière dont la lumière se propage dans un corps se dévoile dans les propriétés de la lumière réfléchie, il a été prouvé par les expériences de M. Kerr que le fer, placé dans un champ magnétique, réfléchit la lumière suivant d'autres lois que le fer non magnétisé.

La théorie exposée plus haut permet de traiter la réflexion dans un champ magnétique [1]). Nous admettrons, à cet effet, que le phénomène observé par M. Hall existe seulement dans le second milieu, que par conséquent dans le premier, — qui en outre sera transparent, — le plan de polarisation n'est pas dévié. Nous nous bornons d'ailleurs au cas le plus simple, celui où le plan de séparation est perpendiculaire aux lignes de force et où la lumière a une incidence normale. Dans le second milieu il n'y aura alors qu'une propagation suivant les lignes de force, propagation à laquelle, si l'axe positif des z est dirigé du côté de ce milieu, s'appliquent immédiatement les formules établies dans les derniers §§.

Pour trouver comment est réfléchi un mouvement incident donné, nous commençons par un problème plus simple, à savoir celui-ci: comment la lumière incidente doit-elle être constituée pour que dans le second milieu il ne se forme qu'un seul des deux faisceaux polarisés circulairement que nous avons appris

[1]) Avant que M. Hall eût publié ses expériences, M. Fitzgerald (*Phil. Trans.*, CLXXI, p. 691) avait déjà donné une théorie des expériences de M. Kerr, dans laquelle, toutefois, il n'était pas tenu compte de l'absorption.

à connaître, et quelles sont alors les propriétés de la lumière réfléchie? Ce problème offre deux cas, suivant qu'on veut ne se laisser former dans le second milieu que le faisceau polarisé à droite ou le faisceau polarisé à gauche, mais, les formules relatives à ces deux cas ne différant entre elles que par quelques signes, nous pouvons traiter les deux cas simultanément. En combinant les résultats obtenus, nous pourrons ensuite trouver la solution pour le cas où le mouvement incident est donné.

§ 17. Lorsque dans aucun des deux milieux n'existe l'effet de Hall, les forces électromotrices X, Y et les forces magnétiques L, M parallèles au plan de séparation varient d'une manière continue quand on passe du premier milieu au second [1]). Cette continuité étant une conséquence de la manière dont les susdites quantités dépendent des mouvements électriques et des moments magnétiques, les mêmes conditions limites s'appliqueront encore au cas actuel, pourvu qu'on attribue à X et Y la signification indiquée au § 11. Ces conditions limites sont d'ailleurs les seules dont il y ait à tenir compte, car il est clair que, dans le cas simple auquel nous nous bornons, il se produira un état de mouvement purement transversal, et que ni mouvement électrique, ni moments magnétiques, ni force électrique ou magnétique n'apparaîtront dans la direction de l'axe des z.

§ 18. En distinguant par les indices 1 et 2 les quantités qui ont rapport au premier et au second milieu, on peut écrire pour le mouvement dans ce dernier (§ 14)

$$u_2 = P_2, v_2 = \pm i P_2,$$

$$X_2 = \left(\frac{1}{p_2} \pm i h\right) P_2, Y_2 = \left(\pm \frac{i}{p_2} - h\right) P_2,$$

$$L_2 = \frac{R_2}{(1 + 4\pi\vartheta_2) A} P_2, M_2 = -\frac{R_2}{(1 + 4\pi\vartheta_2) A} X_2,$$

$$P_2 = e^{\gamma(t - R_2 z)}$$

Nous n'avons pas ajouté un facteur indéterminé (amplitude) à v_2,

1) Helmholtz, *l.c.* Voir aussi ma *Theorie der terugkaatsing en breking*, p.66 et 158.

parce que l'intensité du faisceau qu'on veut faire apparaître peut naturellement être choisie arbitrairement. Alors toutefois l'intensité, non seulement de la lumière réfléchie, mais encore de la lumière incidente, devient une quantité inconnue.

De même que dans le second milieu, un mouvement, tant dans la direction de l'axe des x que dans celle de l'axe des y, devra avoir lieu dans le premier milieu. Le mouvement incident consistera donc en deux composantes u_1 et v_1, que nous pouvons représenter par

$$u = s P_1, \quad v = \sigma P_1,$$

$$P_1 = e^{\gamma(t - R_1 z)}.$$

On aura ensuite, d'après les équations du mouvement pour le premier milieu,

$$X_1 = \frac{s}{p_1} P_1, \quad Y_1 = \frac{\sigma}{p_1} P_1,$$

$$L_1 = \frac{R_1}{(1 + 4\pi\vartheta_1) A} Y_1, \quad M_1 = -\frac{R_1}{(1 + 4\pi\vartheta_1) A} X_1.$$

Les quantités s et σ sont des constantes inconnues.

La lumière réfléchie aura une constitution semblable à celle de la lumière incidente. Affectant donc d'un accent les quantités qui appartiennent à ce faisceau, pour les distinguer de celles qui ont rapport à la lumière incidente, nous représentons le mouvement réfléchi — s' et σ' étant deux nouvelles constantes — par

$$u_1' = s' P_1', \quad v_1' = \sigma' P_1',$$

$$X_1' = \frac{s'}{p_1} P_1', \quad Y_1' = \frac{\sigma'}{p_1} P_1',$$

$$L_1' = -\frac{R_1}{(1 + 4\pi\vartheta_1) A} Y_1', \quad M_1' = +\frac{R_1}{(1 + 4\pi\vartheta_1) A} X_1$$

$$P_1' = e^{\gamma(t + R_1 z)}.$$

§ 19. A la surface de séparation, où nous supposons $z = 0$, on aura

$$P_1 = P_1' = P_2$$

et la continuité de X, Y, L et M donne successivement

$$\frac{s+s'}{p_1}=\frac{1}{p_2}\pm i\,h, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

$$\frac{\sigma+\sigma'}{p_1}=\pm\frac{i}{p_2}-h,$$

$$\frac{R_1}{1+4\pi\vartheta_1}\cdot\frac{\sigma-\sigma'}{p_1}=\frac{R_2}{1+4\pi\vartheta_2}\left(\pm\frac{i}{p_2}-h\right),$$

$$\frac{R_1}{1+4\pi\vartheta_1}\cdot\frac{s-s'}{p_1}=\frac{R_2}{1+4\pi\vartheta_2}\left(\frac{1}{p_2}\pm i\,h\right). \quad \ldots \quad (18)$$

De ces équations il résulte d'abord

$$\sigma=\pm i\,s,\quad \sigma'=\pm i\,s',$$

de sorte que, pour qu'un seul faisceau de lumière apparaisse dans le second milieu, la lumière incidente doit être polarisée circulairement, et que dans ce cas la lumière réfléchie possédera la même propriété.

Ensuite, on tire de (17) et (18)

$$s'=\frac{\dfrac{R_1}{1+4\pi\vartheta_1}-\dfrac{R_2}{1+4\pi\vartheta_2}}{\dfrac{R_1}{1+4\pi\vartheta_1}+\dfrac{R_2}{1+4\pi\vartheta_2}}\,s,$$

et il n'y a aucune difficulté à trouver séparément chacune des deux valeurs s et s'.

§ 20. Si nous attribuons maintenant à l'amplitude s de la lumière incidente la valeur 1, celle de la lumière réfléchie devient

$$a=\frac{s'}{s}=\frac{\dfrac{R_1}{1+4\pi\vartheta_1}-\dfrac{R_2}{1+4\pi\vartheta_2}}{\dfrac{R_1}{1+4\pi\vartheta_1}+\dfrac{R_2}{1+4\pi\vartheta_2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

et le mouvement total dans le premier milieu est représenté par

$$u_1=P_1,\quad v_1=\pm i\,P_1,$$
$$u_1'=a\,P_1',\quad v_1'=\pm i\,a\,P_1'.$$

Les valeurs de R_2 et de a, pour le cas où aucune force magnétique n'agit, étant désignées par $R_{2(0)}$ et a_0, on a d'après (16)

$$R_2 = R_{2(0)} \mp \tfrac{1}{2} i \gamma \frac{R^3{}_{2(0)}\, h}{B_2}$$

et d'après (19)

$$a = a_0 \pm \delta,$$

où

$$\delta = i \frac{h \gamma}{B_2} \frac{\dfrac{R_1 R^3{}_{2(0)}}{(1 + 4\pi\vartheta_1)(1 + 4\vartheta\vartheta_2)}}{\left[\dfrac{R_1}{1 + 4\pi\vartheta_1} + \dfrac{R_{2(0)}}{1 + 4\pi\vartheta_2}\right]^2} \quad \ldots\ldots\ldots (20)$$

Séparant enfin les deux problèmes traités jusqu'ici concurremment, nous obtenons deux solutions représentées par

$$u_1 = P_1,\ v_1 = + i P_1,$$
$$u_1' = (a_0 + \delta) P_1',\ v_1' = + i (a_0 + \delta) P_1'$$

et

$$u_1 = P_1,\ v_1 = - i P_1,$$
$$u_1' = (a_0 - \delta) P_1',\ v_1' = - i (a_0 - \delta) P_1'.$$

De la combinaison de ces deux solutions on peut maintenant en déduire une troisième dans laquelle la lumière incidente est polarisée rectilignement. Si l'on veut que les vibrations s'y exécutent dans le plan xz, la lumière incidente conservant d'ailleurs l'amplitude 1, on n'a qu'à prendre la demi-somme des deux solutions. On a alors

$$u_1 = P_1,\ v_1 = 0,$$
$$u_1' = a_0 P_1',\ v_1' = i \delta P_1'.$$

§ 21. Tandis que, en dehors du champ magnétique, un faisceau lumineux à incidence normale et polarisation rectiligne ne donne lieu qu'à un faisceau réfléchi ayant la même direction de vibration, ici il apparaît en outre une composante (v_1') polarisée perpendiculairement à la lumière incidente. C'est cette composante qui a été observée dans les expériences de M. Kerr. Pour caractériser complètement ce faisceau, on devra déduire de (20) son amplitude et sa phase comparativement à la lumière incidente, ou comparativement à la composante u_1'. Bornons-nous en ce moment à l'amplitude; celle-ci calculée, on peut, dans une certaine mesure, porter un jugement sur le phénomène observé par M. Kerr. Cette amplitude s'obtient, comme on sait, en prenant le module de l'expression complexe que nous venons de trouver pour v_1', opération dans laquelle on peut appliquer la proposition que le module du produit de plusieurs quantités complexes est le produit des modules de chacun des facteurs.

§ 22. On arrive ainsi à un résultat assez simple, lorsqu'on admet que dans le métal la valeur de ϑ peut être supposée égale à la valeur dans le premier milieu. On a alors

$$\delta = i \frac{h \gamma}{B} \frac{R_1 \, R^3{}_{2(0)}}{[R_1 + R_{2(0)}]^2},$$

et en posant

$$\frac{R_{2(0)}}{R_1} = \sigma e^{i \tau}$$

(σ et τ réels [1]), on trouve successivement

$$\text{Mod. } [R_{2(0)}] = \sigma R_1 ,$$

$$\text{Mod. } [R^3{}_{2(0)}] = \sigma^3 R_1{}^3,$$

$$\text{Mod. } [R_1 + R_{2(0)}]^2 = R_1{}^2 (1 + 2 \sigma \cos \tau + \sigma^2),$$

par conséquent, à cause de

$$\text{Mod.} (\gamma) = \frac{2 \pi}{T},$$

$$\text{Mod.} (\delta) = \frac{2 \pi h R_1{}^2}{B T} \cdot \frac{\sigma^3}{1 + 2 \sigma \cos \tau + \sigma^2} \quad . \; . \; . \; (21)$$

Telle est l'amplitude de la composante en question, dans la lumière réfléchie.

§ 23. Il s'agit maintenant de savoir si ce résultat peut encore être admis pour le fer et l'acier. Chez ces matières, la constante magnétique ϑ, dans le cas de forces magnétiques qui agissent

---

[1]) σ a ici une autre signification qu'au § 18.

pendant un temps assez long, diffère beaucoup de la constante ϑ_1 pour l'air $\left(\frac{1+4\pi\vartheta}{1+4\pi\vartheta_1}\right.$ acquiert même la valeur $\left.400\right)$, et il n'y a pas à douter que la formule (21) serait complètement inexacte si le métal avait la même constante magnétique vis-à-vis de forces magnétiques rapidement variables, telles qu'elles se présentent dans les vibrations lumineuses.

Si l'on considère, toutefois, que sous l'influence du magnétisme les molécules du fer subissent une rotation et qu'une certaine masse est donc mise en mouvement, il paraîtra très possible que, pendant les vibrations lumineuses, les molécules n'ont pas le temps de suivre d'une manière appréciable les forces magnétiques et que par conséquent, pour ces mouvements, ϑ n'est pas sensiblement plus grand dans le métal que dans l'air. Effectivement, dans la réflexion ordinaire par l'acier, rien n'a décelé, que je sache, l'influence que devrait avoir, dans ce cas, une forte valeur de ϑ [1]): la réflexion sur l'acier suit les mêmes lois que celle sur tout autre métal.

Dans le problème dont nous nous sommes occupés ici, il y a encore une circonstance de nature à réduire notablement la valeur de ϑ. Le métal, en effet, était placé dans un champ magnétique puissant, et il est facile de voir que lorsque le fer, dans une certaine direction, a déjà acquis complètement ou presque complètement le maximum de moment magnétique, de petites forces accessoires susciteront des moments plus faibles que si la première magnétisation n'existait pas.

J'espère plus tard pouvoir revenir sur ces questions; provisoirement, toutefois, il ne me semble pas improbable que la formule (21) puisse s'appliquer même au fer et à l'acier.

§ 24. On doit remarquer encore que, dans le calcul des §§ 16—22, il n'a pas été introduit, comme supposition néces-

---

1) Cette influence consisterait en ce que chez le fer et l'acier les propriétés de la lumière réfléchie, pour des angles d'incidence différents, ne pourraient être calculées, à l'aide de l'angle d'incidence principal et de l'azimut principal, de la même manière que chez les autres métaux.

saire, que le second milieu soit un métal. Un corps transparent doit également présenter un phénomène semblable à celui que M. Kerr a observé dans le fer, et de la formule générale (21) on peut facilement déduire Mod. (δ) pour un pareil corps. Dans ce cas, en effet, $\frac{R_{2)0)}}{R_1}$ est réel et égal à l'indice de réfraction n, de sorte qu'on a $\tau = 0$ et $\sigma = n$ et que le dernier facteur dans (21) devient

$$\frac{n^3}{(1+n)^2}.$$

§ 25. La formule (21) montre que Mod. (δ), pour des matières différentes, est proportionnel, d'abord à la valeur que h a pour ces matières, et, en second lieu, à la fraction

$$F = \frac{\sigma^3}{1 + 2\,\sigma \cos\tau + \sigma^2}.$$

Celle-ci peut être calculée pour chaque corps au moyen de ses propriétés optiques (pour un métal, au moyen de l'angle d'incidence principal A et de l'azimut principal H) [1]). C'est ainsi que je trouve pour l'acier ($A = 76°40'$, $H = 16°48'$) $F = 2{,}83$, pour l'argent ($A = 72°30'$, $H = 40°9'$) $F = 2{,}09$, tandis que pour le sulfure de carbone ($n = 1{,}6$) on a $F = 1{,}15$.

J'ai calculé la valeur de F pour l'argent, parce que dans les expériences de M. Hall ce métal a montré, après le fer, l'action la plus forte, de sorte qu'il est permis de croire que si, après le fer, quelque autre métal peut présenter un effet sensible dans l'expérience de Kerr, ce sera l'argent. M. Hall dit [2]) que la valeur de h pour le fer est à celle pour l'argent comme 78 à 8,6, et en combinant ce rapport avec les résultats que nous avons obtenus pour F, on trouve que pour l'argent Mod. (δ) sera environ 12 fois plus petit que pour le fer.

§ 26. Il importera maintenant de savoir si, quant à la grandeur absolue, les phénomènes observés par M. Kerr dans ses expériences

---

1) Voir ma *Theorie der terugkaatsing en breking*, p.168.

2) *Phil. Mag.*, X, p.323.

sur la réflexion sont en accord avec la valeur que M. Hall a trouvée pour h. Pour résoudre cette question, il faut d'abord faire subir une légère modification à la formule (21). Les valeurs réelles des quantités h et A — cette dernière entre dans B, en vertu de (14) — ne sont en effet pas égales aux valeurs observées h' et A', et cela à cause de la polarisation diélectrique et magnétique de l'air dans lequel les observations qui servent à déterminer ces quantités ont été faites. D'abord, on a [1])

$$A^2 = \frac{A'^2}{(1 + 4\pi\varepsilon_1)(1 + 4\pi\vartheta_1)},$$

ε_1 étant la constante de la polarisation diélectrique dans l'air. En second lieu, d'après (1), h est une quantité analogue à $\varkappa$ (savoir, le rapport d'une force électromotrice et d'un courant électrique), et l'on a donc [2])

$$h = \frac{h'}{1 + 4\pi\varepsilon_1}.$$

Si l'on remarque enfin que R_1 est la valeur inverse de la vitesse de propagation dans l'air, et qu'on peut donc poser $R_1 = A'$, la formule (21) devient

$$\text{Mod.}\,(\delta) = \frac{h'}{2\,T} \cdot \frac{\sigma^3}{1 + 2\,\sigma \cos \pi + \sigma^2}$$

et se prêtera alors à la comparaison avec des mesures absolues.

En terminant cette étude il convient de remarquer que dans ses expériences M. Kerr n'a qu'une seule fois opéré avec des rayons réfléchis perpendiculairement à la surface. Il est donc nécessaire d'étendre la théorie que nous venons de développer au cas des incidences obliques. C'est ce qu'a fait M. W. van Loghem, dans sa *Theorie der terugkaatsing van het licht door magneten.*

---

1) *Theorie der terugkaatsing en breking*, p.69.

2) *Ibidem*, p.44.