

SUR LA MÉTHODE DU MIROIR TOURNANT POUR LA DÉTERMINATION
DE LA VITESSE DE LA LUMIÈRE

PAR

H. A. LORENTZ.

Dans un mémoire de l'année passée M. CORNU ¹⁾ a émis quelques doutes sur l'exactitude de la méthode du miroir tournant, qui a été employée par FIZEAU et FOUCAULT et dont MM. MICHELSON et NEWCOMB se sont servis dans leurs travaux bien connus sur la vitesse de la lumière. Le physicien français se demande d'abord si on a bien le droit d'appliquer les lois ordinaires de la réflexion à un miroir qui est animé d'une rotation rapide; il craint qu'un tel miroir n'entraîne un peu le faisceau lumineux et que, pour cette raison, le résultat des mesures ne soit un peu trop bas. Une erreur pourrait également résulter de ce que le rayon qui est reçu par le miroir fixe se déplace sur la surface de ce dernier avec une vitesse qui devient comparable à celle de la lumière. Enfin, M. CORNU parle de l'entraînement des ondes par le tourbillon d'air qui entoure le miroir mobile, et d'une certaine difficulté qu'on trouve à décrire exactement le cours des rayons et le mode de formation des images.

Ces remarques m'ont conduit à quelques considérations que je ne permets de communiquer dans les pages suivantes. Quoiqu'elles laissent encore beaucoup à désirer au point de vue de la rigueur, elles me semblent bien propres à dissiper les doutes que je viens de rappeler.

§ 1. *Expériences de MM. MICHELSON et NEWCOMB.* Je commencerai

¹⁾ A. CORNU. Sur la vitesse de la lumière. Rapports présentés au Congrès international de Physique de 1900. T. II, p. 225.

par une description sommaire des appareils dont se sont servis les savants américains et j'en indiquerai approximativement les dimensions. Dans les observations de M. MICHELSON ¹⁾ (Fig. 1), le miroir tournant *R*, dont le diamètre était de 3 cm., se trouvait à une distance de

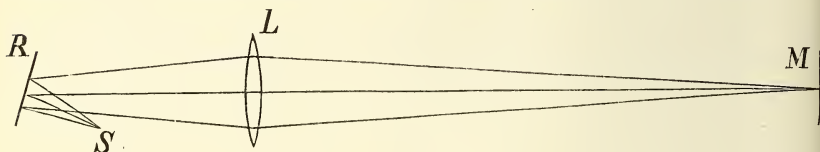


Fig. 1.

1020 cm. de la fente éclairée *S*, et à une distance de 3960 cm. de la lentille convergente *L*. Celle-ci avait une distance focale de 4600 cm. et un diamètre de 20 cm.

Le miroir fixe *M* était plan; il était éloigné de 60500 cm., et avait à peu près la même grandeur que la lentille. Pour 257 révolutions par seconde, la déviation de l'image de la fente s'est élevée à 13,3 cm. Ajoutons encore que, dans une répétition ²⁾ de ses mesures, M. MICHELSON a remplacé le miroir plan *M* par un miroir légèrement concave, de 36 cm. de diamètre.

Le dispositif de M. NEWCOMB ³⁾ (Fig. 2) a été un peu différent. Il a placé

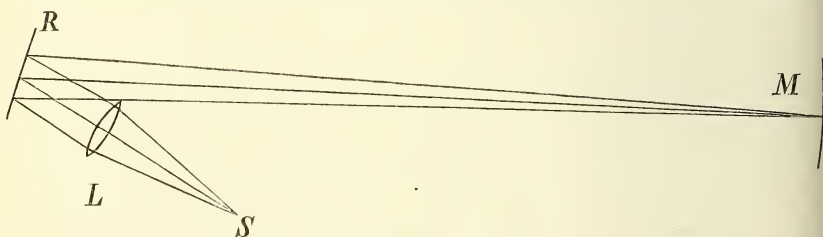


Fig. 2.

la lentille *L* entre la fente *S* et le miroir tournant, tout près de ce dernier. Avec la fente, cette lentille constituait un collimateur, et le faisceau de

¹⁾ A. A. MICHELSON. Experimental determination of the velocity of light. *Astronomical papers prepared for the use of the American Ephemeris and Nautical Almanac*, Vol. I, Part III, p. 115, 1880.

²⁾ A. A. MICHELSON. Supplementary measures of the velocity of light in air and water. *Astronomical papers, etc.*, Vol. II, p. 237, 1883.

³⁾ S. NEWCOMB. Measures of the velocity of light. *Astronomical papers, etc.*, Vol. II, p. 113, 1882.

retour était reçu dans une lunette à laquelle on pouvait donner une rotation autour d'un axe vertical coïncidant avec celui du miroir mobile. La lunette se trouvait dans un plan horizontal situé au dessus ou au dessous du collimateur, ce qui exigeait une certaine hauteur (8,5 cm.) du miroir. Ce dernier était un prisme carré, poli sur les quatre faces, ce qui contribuait à augmenter l'éclat de l'image. Dans le même but, on employait deux miroirs fixes, un peu concaves et placés l'un à côté de l'autre.

Les dimensions de ces appareils ont été les suivantes :

Longueur du collimateur et de la lunette 230 cm.

Diamètre des objectifs 3,5 cm.

Largeur des faces du miroir tournant 3,75 cm.

Diamètre de chaque miroir fixe 40 cm.

Rayon de courbure de ces miroirs 300000 cm.

Distance des miroirs (dans les expériences que M. NEWCOMB considère comme les meilleures) 370000 cm.

Le nombre des révolutions par seconde a été d'environ 210, ce qui a produit une déviation angulaire du rayon de retour de 13000". C'est le double de cet angle qu'on a directement mesuré; en effet, on a toujours combiné deux expériences dans lesquelles le miroir a tourné en directions opposées.

Le résultat final de M. NEWCOMB,

$$299860 \pm 30 \text{ kilomètres par seconde,}$$

s'accorde très bien avec les nombres

$$299910 \pm 50$$

et

$$299850 \pm 60$$

que M. MICHELSON ¹⁾ a déduits de ses deux séries d'expériences.

§ 2. *Remarques sur la formation de l'image.* Le cours des rayons soulève quelques questions d'optique géométrique sur lesquelles je n'insisterai pas longuement. Je rappellerai seulement une condition essentielle, sans laquelle la méthode serait impraticable, c'est que, s'il n'y a

¹⁾ Astronomical papers, etc., Vol. II, p. 244.

pas de rotation, la position de l'image observée de la fente — que je nommerai la *deuxième* image — doit être indépendante de la position particulière qu'on a donnée au miroir mobile. Il en sera rigoureusement ainsi, pour chaque forme du miroir M , tant que la *première* image de la fente, formée par la lentille L , se trouve exactement dans la surface de M ; et même, dans le cas d'un miroir concave, ayant son centre de courbure dans l'axe de rotation de R , la condition sera remplie encore si la deuxième image est située en avant ou en arrière de M .

En effet, en désignant par l la distance LM , par l' la distance de la première image au miroir fixe, et par Δi la variation, qu'une légère rotation de R fait subir à l'angle d'incidence sur M pour le rayon central, c'est à dire pour celui qui a été réfléchi par le centre de R , on trouve facilement

$$\frac{2 l' \Delta i}{l \pm l'} \quad (1)$$

pour le déplacement correspondant du point central de la deuxième image. Dans cette formule, où il faut prendre le signe supérieur si la première image se trouve derrière M , le déplacement est mesuré par l'angle sous lequel il serait vu par un observateur placé au lieu de la lentille L . Or, ce déplacement s'annule dans l'un des cas que je viens d'indiquer parce que $l' = 0$, et dans l'autre parce que $\Delta i = 0$.

Dès que l'expression (1) est différente de 0, la rotation du miroir imprimera au point central de la deuxième image un mouvement horizontal qui est entièrement indépendant de la déviation qu'il s'agit d'observer. Le manque de netteté de la deuxième image qui en est la conséquence, s'ajoutera à celui qui, pour chaque position particulière du miroir tournant, est produit par le pointage imparfait. J'ai calculé que dans les expériences de M. MICHELSON ces deux conséquences d'un défaut de pointage ont à peu près la même importance.

Même dans le cas où $l' = 0$, il y a encore la *diffraction* qui nuira à la netteté de l'image; il en faudra tenir compte dans la considération de la première image aussi bien que de la seconde. On voit facilement que chez M. MICHELSON c'est le miroir tournant qui joue le rôle du diaphragme relativement le plus étroit et que la largeur b de ce miroir, multipliée par le cosinus de l'angle d'incidence α , doit être regardée comme la largeur de l'ouverture qui produit la diffraction dans la première image.

On en déduit que la largeur de cette image sera d'un ordre de grandeur donné par

$$\frac{\lambda l}{b \cos \alpha},$$

où λ est la longueur d'onde. La valeur de cette expression est environ 1,2 cm., l'angle d'incidence ayant été de 9° .

Dans l'appareil de M. NEWCOMB c'est plutôt l'objectif du collimateur qui détermine le phénomène; ici je trouve pour la première image une largeur d'environ 6 centimètres. On peut maintenant regarder cette image comme un objet qui envoie ses rayons vers la lunette; c'est ainsi que les effets de diffraction de la première image se font sentir dans la seconde, où ils se trouvent encore compliqués par la diffraction qui se produit sur le chemin de retour. Il n'est pas nécessaire d'entrer dans les détails; en effet, comme l'image dans la lunette de l'objet en question a une largeur comparable à celle qui serait causée par la deuxième diffraction seule, on pourra se borner à considérer cette dernière, s'il s'agit seulement d'évaluer le degré de netteté de la deuxième image. En tenant compte de ce que le miroir *R* n'est pas toujours entièrement éclairé par le faisceau de retour, je trouve que chez M. NEWCOMB la largeur angulaire de l'image observée doit avoir été d'environ $8''$, et que chez M. MICHELSON la diffraction a causé un élargissement de 0,04 cm. Ce dernier chiffre s'accorde assez bien avec le degré d'exactitude qui a été atteint, mais il semble que les mesures de M. NEWCOMB auraient été encore plus précises, si la diffraction avait été la principale cause d'erreur. Sous ce rapport il est intéressant de noter que dans une observation où le miroir *R* était tenu immobile ¹⁾ la largeur de la première image a même surpassé le diamètre du miroir fixe. Pour une raison que je ne saurais indiquer, la rotation rapide a amélioré les images.

Il est encore intéressant de comparer entre eux les effets de la diffraction et d'un pointage défectueux; en effet, on calcule facilement la valeur qu'on peut attribuer à la distance l' dans l'expression (1), sans que le manque de netteté dû à l'erreur de pointage surpasse celui qui est la suite de la diffraction. De cette manière je suis arrivé à $l' = 800$ cm. pour les expériences de M. MICHELSON; dans celles de M.

¹⁾ NEWCOMB, l. c. p. 192.

NEWCOMB la première image peut même avoir été éloignée du miroir fixe de 10000 cm. sans que la deuxième image en souffrirait beaucoup.

§ 3. *Réflexion par un miroir tournant.* Abordons maintenant les questions posées par M. CORNU, en négligeant d'abord toute influence de l'air et en supposant que l'éther n'ait pas participé à la rotation. On sait quel a été le succès de cette hypothèse d'un éther immobile dans la théorie de l'aberration astronomique et des phénomènes qui s'y rattachent. En l'adoptant également dans le problème qui nous occupe actuellement, on aura l'avantage que l'influence de la rotation ne s'exerce qu'au moment où les ondes se réfléchissent, leur propagation dans l'éther n'en étant aucunement modifiée. Malheureusement, malgré cette simplification, il y a des difficultés mathématiques considérables; aussi n'ai je pas réussi à établir pour des corps tournants une théorie aussi simple et aussi rigoureuse que celle qui s'applique à un système animé d'un mouvement de translation. J'ai dû me contenter d'une application du principe de HUYGENS sous la forme qu'on lui donne dans la théorie élémentaire de la diffraction.

Il est naturel de penser d'abord à un entraînement des rayons par le miroir tournant. Si un tel entraînement avait pour effet de faire tourner le rayon réfléchi dans le sens de la rotation, d'un certain angle ε , à partir de la direction qu'il aurait suivant la loi ordinaire, on démontre facilement que le changement final dans la direction du rayon de retour serait la différence des valeurs de ε pour les deux réflexions successives par le miroir mobile. Il n'en résulterait une erreur que dans le cas où

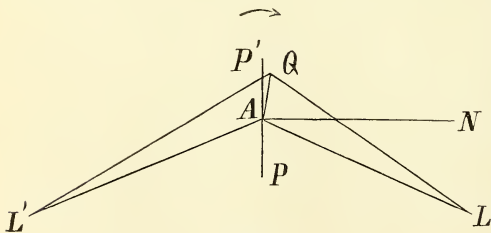


Fig. 3.

les deux angles d'incidence différents suffisamment entre eux pour conduire à des entraînements sensiblement inégaux ¹⁾.

Je crois cependant pouvoir démontrer qu'un tel changement de la direction de la lumière réfléchie n'existe pas du tout et que le seul effet de la rotation est de modifier un peu la courbure des ondes.

¹⁾ Voyez: MICHELSON, *Astronomical papers*, Vol. I, p. 142 et CORNU, l. c., p. 243.

Soient, (Fig. 3) L un point lumineux, A le centre du miroir tournant, PP' sa position au moment t où une vibration partie de L au moment t_0 atteint le point A , AN la normale de PP' , α l'angle LAN , Q un point quelconque de la surface, $AQ = x$, $LA = r$, et ω la vitesse de rotation. Cette dernière sera nommée positive si le mouvement a lieu dans le sens de la flèche, c'est-à-dire s'il tend à diminuer l'angle d'incidence, et la distance x sera positive si la direction AQ fait avec AL un angle obtus. Cela posé, on peut calculer le moment où une vibration partie de L à l'instant t_0 rencontrera le point Q de la surface mobile. Évidemment, ce moment sera un peu postérieur au temps t ; si on l'indique par $t + \tau$, il s'agira de calculer la valeur de τ . Elle s'annule pour $x = 0$, et, pour des valeurs suffisamment petites de x , elle pourra se développer en série suivant les puissances croissantes de x . Je négligerai les puissances supérieures à la deuxième, et, pour simplifier les formules, je prendrai pour unité de longueur la distance à laquelle la lumière se propage dans l'unité de temps.

A l'instant $t + \tau$, l'angle LAQ est devenu $90^\circ + \alpha - \omega\tau$; de plus, on aura

$$LA = r, \quad LQ = r + \tau.$$

Par conséquent, le triangle LAQ nous donne la formule

$$(r + \tau)^2 = r^2 + 2rx \sin(\alpha - \omega\tau) + x^2,$$

d'où

$$\tau = x \sin \alpha + \frac{x^2}{2r} \cos^2 \alpha - \omega x^2 \sin \alpha \cos \alpha \quad (2)$$

ce qui est encore vrai pour des valeurs négatives de x et de ω .

Soit maintenant AL' une direction fixe derrière le miroir qui fait avec la direction PP' du miroir, correspondant au temps t , un angle $L'AP = LAP$. Sur cette ligne il y a un point L' , jouissant de la propriété que, si une vibration partie de ce point arrive en A à l'instant t , une vibration partie au même moment atteindra précisément à l'instant $t + \tau$ le point Q déplacé. Pour qu'il en soit ainsi, il faut que

$$(r' + \tau)^2 = r'^2 + 2r'x \sin(\alpha + \omega\tau) + x^2.$$

Cette équation, dans laquelle $r' = AL'$, a été déduite du triangle $L'AQ$, dont l'angle $L'AQ$ est devenu $90^\circ + \alpha + \omega\tau$.

En employant la valeur (2), on trouve

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{r} - 4 \omega t g \alpha. \quad (3)$$

On voit donc que les vibrations réfléchies dans l'espace devant le miroir ont entre elles les mêmes différences de phases que si elles avaient été émises par le point L' . Cela suffit pour démontrer que des ondes sphériques au centre L sont changées en des ondes dont le centre est en L' . Mais en même temps, il résulte de notre construction que l'angle de réflexion n'a pas été modifié.

La formule (3) pourra aussi être appliquée à des rayons incidents qui convergent vers un point situé derrière le miroir; on fera alors r négatif. En général, l'effet de la rotation est équivalent à celui d'une légère courbure du miroir; elle provoque dans la courbure des ondes un petit changement $4 \omega t g \alpha$. Si, pour le miroir en repos, la première image se trouvait exactement dans la surface du miroir éloigné, la rotation la déplacerait en avant ou en arrière de cette surface sur une certaine distance qui serait de 8 cm. dans les expériences de M. MICHELSON et de 6000 cm. dans celles de M. NEWCOMB. Or, nous avons déjà vu qu'une telle valeur de l' ne changerait pas d'une manière appréciable la qualité de la deuxième image. De plus, il ne faut pas perdre de vue que la modification de la courbure des ondes, qui est produite par la première réflexion sur le miroir tournant, sera compensée pour la plus grande partie par celle qui a lieu dans la deuxième réflexion; elle le serait même totalement si l'angle d'incidence était le même dans les deux cas.

A la rigueur il faudrait encore tenir compte du changement de la longueur d'onde dans la réflexion sur le miroir tournant, changement qui n'est pas le même pour les deux moitiés de ce miroir, et de ce que l'intensité réfléchie varie également d'un point du miroir à l'autre. Il me semble pourtant qu'on pourra négliger ces deux effets dont l'influence doit être extrêmement faible.

§ 4. *Propagation entre les deux miroirs et réflexion par le miroir fixe.* Des nombres qui ont été donnés au § 1 on déduit que la première image de la fente se déplace horizontalement sur la surface du miroir éloigné avec une vitesse qui s'élève à 0,0013 de la vitesse de la lumière dans le dispositif de M. MICHELSON et à 0,032 de cette vitesse

dans celui de M. NEWCOMB. Dans ces circonstances, il est difficile de se former une idée exacte de la propagation des ondes qui forment cette image.

Cela tient surtout à ce que la diffraction joue un rôle si important et à ce qu'il y a rotation et non pas translation du faisceau lumineux. Quant à la réflexion sur le miroir fixe, elle ne me semble guère pouvoir amener de nouvelles complications. Si ce miroir était plan et pouvait être considéré comme un réflecteur parfait, le mouvement réfléchi serait toujours l'image exacte par rapport à la surface polie du mouvement qu'on trouverait de l'autre côté de ce plan si le miroir n'existait pas. On peut dire aussi que le mouvement réfléchi peut être considéré comme produit par une fente, une lentille et un miroir tournant qui seraient disposés de l'autre côté du plan réfléchissant, symétriquement par rapport à la fente, la lentille et le miroir tournant réels.

§ 5. *Application du principe de HUYGENS.* Considérons maintenant comme un cas de diffraction tout ce qui se passe dans les expériences. Pour simplifier, je considérerai le collimateur et la lunette de M. NEWCOMB, mais je regarderai comme plan le miroir M . Je ferai aussi abstraction de la diffraction qui se produit dans le collimateur et dans la

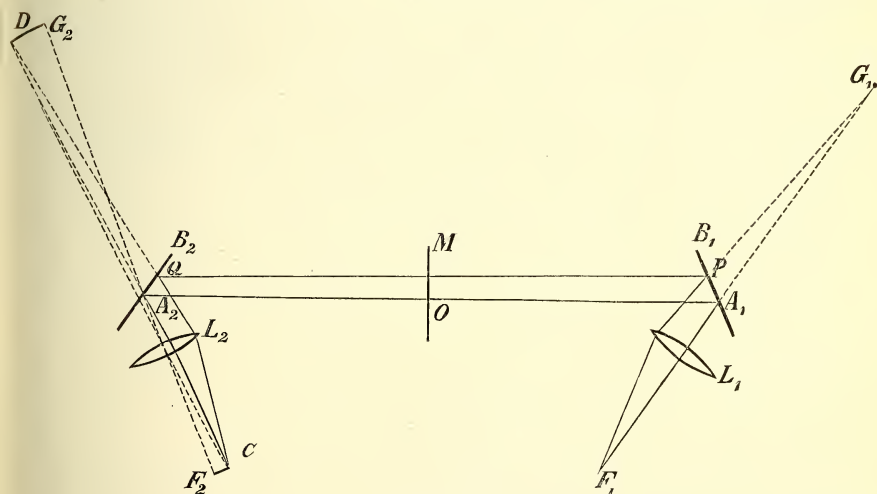


Fig. 4.

lunette, et de celle qui pourrait accompagner la réflexion sur M . On pourra négliger cette dernière en vertu de la grande largeur de M , et

on ne s'écartera guère de la vérité en faisant dépendre la diffraction qui existe réellement, non pas de l'ouverture des objectifs, mais de la largeur du miroir mobile.

Soient (Fig. 4) A_2 le centre du miroir tournant $A_2 B_2$, L_2 l'objectif de la lunette, F_2 le fil de repère, G_2 le point conjugué de F_2 par rapport à L_2 , $A_1 B_1$ l'image du miroir tournant par rapport au miroir fixe M , L_1 l'image de la lentille du collimateur, F_1 celle de la fente, G_1 le point conjugué de F_1 par rapport à L_1 . Je supposerai que F_1, A_1, G_1 d'un côté et F_2, A_2, G_2 de l'autre soient en ligne droite, et que l'axe de rotation passe par le point A_2 . Les phénomènes se passeront comme si, le miroir M étant transparent, F_1 était une fente réelle, dont les rayons seraient réfléchis par les deux miroirs tournants $A_1 B_1$ et $A_2 B_2$.

Soit maintenant C un point dans le voisinage de F_2 , situé de telle manière que, si D est le point conjugué par rapport à L_2 , les distances $A_2 D$ et $A_2 G_2$ soient égales entre elles.

Nous allons considérer les vibrations qui arrivent en C . Si P et Q sont des points arbitrairement choisis de $A_1 B_1$ et $A_2 B_2$, l'un des chemins que la lumière peut suivre se compose d'un rayon $F_1 P$, réfracté par la lentille L_1 , de la ligne droite $P Q$ et du rayon $Q C$, réfracté par la lentille L_2 .

Nous comparerons ce chemin avec le chemin central $F_1 A_1 A_2 C$. Pour qu'une vibration qui se propage suivant cette dernière ligne arrive en C à un moment déterminé t , il faut qu'elle soit partie de F_1 à un certain instant t_0 ; j'indiquerai par t_1 et t_2 les moments où elle aura rencontré les deux miroirs. Ces trois derniers instants ne seront plus les mêmes si on exige que, après avoir parcouru le chemin $F_1 P Q C$, la vibration arrive en C au même instant t ; on peut alors représenter les trois temps par

$$t_0 + \tau, t_1 + \tau_1, t_2 + \tau_2.$$

Posons:

$$\begin{aligned} A_1 G_1 &= l_1, A_2 G_2 = l_2, A_1 O = A_2 O = l, \\ A_1 P &= x_1, A_2 Q = x_2, \\ \angle F_1 A_1 O &= 2\alpha, \quad \angle F_2 A_2 O = 2\beta, \quad \angle G_2 A_2 D = \xi \end{aligned}$$

et désignons par ϕ l'angle que fait avec $A_2 O$ la normale du miroir à l'instant t_1 . Alors, comme $t_2 = t_1 + 2l$, cet angle aura les valeurs

$$\Phi + \omega \tau_1, \text{ et } \Phi + p + \omega \tau_2,$$

où $p = 2l\omega$, aux instants $t_1 + \tau_1$ et $t_2 + \tau_2$.

En considérant la longueur de G_1P , PQ et QD on trouve pour les inconnues τ , τ_1 , τ_2 les trois équations suivantes :

$$\begin{aligned} 2l_1(\tau - \tau_1) + (\tau - \tau_1)^2 &= -2l_1x_1 \sin(2\alpha - \Phi - \omega\tau_1) + x_1^2, \\ 4l(\tau_2 - \tau_1) + (\tau_2 - \tau_1)^2 &= -4lx_1 \sin(\Phi + \omega\tau_1) - \\ &\quad - 4lx_2 \sin(\Phi + p + \omega\tau_2) + \\ &\quad + x_1^2 - 2x_1x_2 \cos(2\Phi + p + \omega\tau_1 + \omega\tau_2) + x_2^2, \\ 2l_2\tau_2 + \tau_2^2 &= -2l_2x_2 \sin(2\beta - \Phi - p - \xi - \omega\tau_2) + x_2^2. \end{aligned}$$

Enfin, par un développement en série suivant les puissances croissantes de x_1 , x_2 et ξ , dans lequel on néglige les termes d'un ordre supérieur au deuxième, on obtient la valeur

$$\begin{aligned} \tau &= -2x_1 \sin(\alpha - \Phi) \cos \alpha - 2x_2 \sin(\beta - \Phi - p) \cos \beta + \\ &+ x_2 \xi \cos(2\beta - \Phi - p) + \frac{x_1^2 \cos^2(2\alpha - \Phi)}{2l_1} + \frac{x_2^2 \cos^2(2\beta - \Phi - p)}{2l_2} - \\ &\quad - \frac{\{x_1 \cos \Phi - x_2 \cos(\Phi + p)\}^2}{4l} + \\ &+ 2\omega [x_1^2 \cos(\alpha - \Phi) \cos \alpha \sin \Phi - 2x_1x_2 \cos(\alpha - \Phi) \sin(\beta - \Phi - p) \times \\ &\quad \times \cos \alpha \cos \beta - x_2^2 \cos(\beta - \Phi - p) \cos \beta \sin(2\beta - \Phi - p)] \quad (4) \end{aligned}$$

Supposons maintenant que les vibrations en un point de la fente soient représentées par

$$\rho = a \cos nt;$$

alors on aura pour la vibration résultante au point C une expression de la forme

$$\rho' = a \int_{-s}^{+s} \int_{-s}^{+s} q \cos n(t + \tau + c) dx_1 dx_2, \quad (5)$$

dans laquelle s désigne la demi-largeur du miroir mobile, c une constante et q un facteur qui représente l'affaiblissement de l'amplitude dans les trois réflexions sur le chemin qui correspond à la ligne F_1PQC de notre figure.

Je n'insisterai pas sur toutes les conséquences qu'on peut tirer des

formules (4) et (5). On en déduit p. e. que, dans le cas $\omega = 0$, le lieu occupé par la deuxième image sera indépendant de la position du miroir tournant, pourvu que la première image coïncide avec le miroir fixe, ce qui s'exprime par $l_1 = l$. On retrouve aussi l'effet du changement de courbure des ondes, dont nous avons parlé au § 3.

§ 6. *Position du milieu de l'image observée.* Ce qui nous intéresse surtout, c'est la question de savoir si réellement, comme on l'a toujours admis, l'axe de la lunette doit former avec celui du collimateur un angle $2\omega l = 2p$, pour que le milieu de la deuxième image coïncide avec le fil de repère. L'angle aura cette valeur $2p$, si $\beta = \alpha + p$. Il s'agit donc de démontrer que, dans ce dernier cas, le maximum d'intensité se trouvera au point F_2 , où $\xi = 0$; pour s'en convaincre il suffira évidemment de faire voir que la distribution de l'intensité lumineuse dans le plan F_2C est symétrique par rapport au point F_2 ; c'est-à-dire qu'elle est égale pour des valeurs égales de ξ , à signes opposés. C'est ce que nous allons prouver, en considérant d'abord comme constant le facteur q .

Dans le calcul du temps τ dont dépendent les différences de phase, nous avons commencé par choisir un instant déterminé pour lequel nous voulions connaître le mouvement lumineux en C , et nous avons désigné par ϕ l'angle entre la normale du miroir et la ligne $A_1 A_2$ au moment où le rayon $F_1 A_1 A_2 C$ doit frapper le miroir en A , pour arriver en C au moment t fixé. Il est donc clair que cet angle ϕ variera avec le temps et que la quantité τ elle-même sera une fonction de t . Cependant, comparés avec la succession des vibrations, ces changements de ϕ et de τ sont excessivement lents; ils resteront imperceptibles pendant des milliers d'oscillations. Dans le calcul de (5) on pourra donc regarder le terme τ comme constant, à la condition cependant de lui attribuer une nouvelle valeur, si, après avoir déterminé ρ' pour un certain moment t , on veut faire la même chose pour un moment postérieur.

Dans chaque révolution du miroir, il y a une certaine durée Δ , pendant laquelle le point C reçoit de la lumière, et dans cet intervalle il y a un moment déterminé, que je nommerai t' , et qui est le temps d'arrivée en C pour un rayon $F_1 A_1 A_2 C$ qui a atteint le point A_1 au moment où la normale du miroir coïncide avec la bisectrice de l'angle $A_2 A_1 F_1$. Pour ce moment t' , on a $\phi = \alpha$, et pour un moment voisin $t' + \theta$, $\phi = \alpha + \omega\theta$.

Quant à l'intensité observée, elle dépendra de l'énergie totale que reçoit le point C dans l'intervalle Δ . Par conséquent, si a' est l'amplitude de la vibration résultante ρ' , calculée pour le moment $t = t' + \theta$, on pourra considérer cette intensité comme proportionnelle à l'expression

$$I = \int a'^2 d\theta,$$

dans laquelle l'intégration doit s'étendre à toutes les valeurs négatives et positives de θ , pour lesquelles la vibration ρ' a une valeur sensible.

La valeur de $\omega \theta$ sera toujours de l'ordre de grandeur $\frac{s}{2l}$; donc, si nous continuons à négliger des termes qui contiennent des facteurs de l'ordre s^3 ou $s^2\xi$, nous pourrions remplacer $\Phi = \alpha + \omega \theta$ par l'angle α lui-même dans tous les termes du second ordre de la formule (4), et omettre les quantités en θ^2 dans ceux du premier ordre. Si on fait en même temps $\beta = \alpha + p$, on aura

$$\begin{aligned} \tau = & 2 \omega x_1 \theta \cos \alpha + 2 \omega x_2 \theta \cos (\alpha + p) + x_2 \xi \cos (\alpha + p) + \\ & + \frac{x_1^2 \cos^2 \alpha}{2 l_1} + \frac{x_2^2 \cos^2 (\alpha + p)}{2 l_2} - \frac{\{x_1 \cos \alpha - x_2 \cos (\alpha + p)\}^2}{4 l} + \\ & + \omega [x_1^2 \sin 2 \alpha - x_2^2 \sin 2 (\alpha + p)]. \end{aligned} \quad (6)$$

Soient maintenant C et C' deux points de part et d'autre de F_2 , correspondant aux valeurs ξ et $-\xi$; l'instant que nous venons d'indiquer par t' sera le même pour ces points. Calculons l'intensité lumineuse en C pour le moment $t' + \theta$, et en C' pour le moment $t' - \theta$. Nous aurons les deux intégrales

$$\rho'_{C, t+\theta} = a q \int_{-s-s}^{+s+s} \int_{-s-s}^{+s+s} \cos n (t' + \theta + \tau + c) dx_1 dx_2, \quad (7)$$

$$\rho'_{C', t-\theta} = a q \int_{-s-s}^{+s+s} \int_{-s-s}^{+s+s} \cos n (t' - \theta + \tau' + c) dx_1 dx_2, \quad (8)$$

où τ' est ce que devient τ , si on y remplace θ par $-\theta$, ξ par $-\xi$. Mais la valeur de l'intégrale (8) n'est pas changée par un renversement des signes de x_1 et x_2 dans la fonction à intégrer. Alors τ' devient égale à τ , parce que l'expression (6) est homogène et du second degré par rap-

port a x_1, x_2, θ, ξ , et la seule différence entre (7) et (8) sera qu'il y a $\ell + \theta$ dans une des formules et $\ell - \theta$ dans l'autre. Comme on sait, cela n'a aucune influence sur l'amplitude de la vibration résultante, d'où l'on voit que

$$a'_{C', \ell - \theta} = a'_{C, \ell + \theta}$$

et qu'en fin de compte

$$I_{C'} = I_C. \quad (9)$$

C'est bien l'égalité qu'il s'agissait de démontrer. Elle existe quels que soient les défauts de pointage, l'influence de la rotation sur la forme des ondes et les complications dues à la diffraction. Ces causes peuvent diminuer la netteté de l'image, mais le point central aura toujours la position que lui assigne la théorie élémentaire de l'expérience.

Cependant il ne faut pas oublier que nous nous sommes permis quelques simplifications. D'abord nous avons omis, dans le développement de τ , les quantités du troisième ordre par rapport à x_1, x_2 et ξ . Ces termes sont comparables à l'une des expressions suivantes

$$\frac{s^3}{l^2}, \frac{s^2 \xi}{l}, s \xi^2, \quad (10)$$

$$\frac{\omega s^3}{l}, \omega^2 s^3, \omega s^2 \xi,$$

dont je ne considérerai que les trois premières, attendu que ωl est inférieur à l'unité.

Dans le calcul de ces valeurs il faut se rappeler l'unité de longueur qui a été employée dans nos équations. On prendra pour s la demi-largeur du miroir tournant, et pour ξ la demi-largeur angulaire de l'image élargie par la diffraction. Je trouve ainsi que les temps qui sont représentés par les quantités (10) sont tous inférieurs à la millième partie de la durée d'une vibration; les différences de phase qui correspondent à ces temps ne peuvent donc avoir aucune influence appréciable sur les phénomènes observés.

Il me semble qu'il en est de même de la variabilité du facteur q dans la formule (5). En effet, cette variabilité provient de ce que les angles qu'ils font avec les normales des miroirs ne sont pas les mêmes pour les divers chemins, tels que $K_1 P Q C$, dont il a été question au § 5. La variation de ces angles d'un chemin à l'autre est de l'ordre de grandeur $\frac{s}{l}$, et si, ce qui n'est guère probable, la variabilité du facteur

q donnait lieu à un déplacement angulaire de l'image de cette même grandeur $\frac{s}{l}$, le résultat final de M. NEWCOMB n'en serait faux que d'une dix-millième partie.

§ 7. *Influence de l'air.* Dans le tourbillon d'air, qui environne le miroir mobile et que les rayons doivent traverser quatre fois, de la périphérie au centre ou vice versa, la densité va en décroissant vers le centre; il peut donc y avoir réfraction dans le passage d'une couche à l'autre.

Abstraction faite pour un moment de l'entraînement des ondes par la matière en mouvement, on peut dire que si les couches d'égale densité suivent des surfaces de révolution ayant pour axes l'axe de rotation A (Fig. 4) du miroir, les rayons qui se dirigent vers le centre A , dans le plan horizontal de la figure, ne dévieront pas de la ligne droite. La forme des couches fût-elle différente, mais toujours symétrique par rapport à un plan vertical passant par A et perpendiculaire au miroir, le rayon qui sort du tourbillon ferait encore avec le miroir le même angle que le rayon qui entre, et ce serait comme si le miroir avait été un peu déplacé parallèlement à lui-même. Enfin, dans le cas où cette symétrie ferait défaut, les rayons de retour subiraient une déviation qui tendrait à compenser celle qu'ils ont reçue dans leur premier passage à travers le tourbillon, il y aurait compensation parfaite si les rayons retrouvaient la masse d'air raréfié dans la même position et le même état. Même dans ce dernier cas d'un tourbillon asymétrique, l'erreur résiduelle qui existera parce que le tourbillon a suivi le miroir dans sa rotation, me semble devoir être extrêmement petite. Pour s'en assurer il suffit de faire le calcul pour un cas bien simple. Supposons qu'au centre du tourbillon la densité ait été réduite à la moitié de la densité atmosphérique — ce qui peut bien arriver — et que les couches d'air soient traversées sous une incidence de 5° (l'angle d'incidence sur le miroir ayant été d'environ 10° .) Alors dans la propagation vers le miroir il y aurait une déviation de $3''$. Si la sixième partie de cette déviation restait sans compensation, il en résulterait une erreur de 11 Kilomètres dans le résultat de M. NEWCOMB.

Il me reste à dire quelques mots de l'entraînement des ondes dans le tourbillon. Pour l'air le coefficient de FRESNEL $1 - \frac{1}{v^2}$, où v est l'indice

de réfraction, est égal à 0,0006, et on exagère certainement si l'on admet que quelque part dans le tourbillon la vitesse de l'air ait été de 20000 cm. par seconde. Alors la vitesse de l'entraînement des ondes aurait été de 12 cm. par seconde. Cette valeur est tellement petite par rapport à la vitesse de la lumière que les changements de direction qui en peuvent résulter doivent être absolument insensibles.