Wordt besloten den Heer JÖRGENSEN den dank der Afdeeling voor dit geschenk te doen toekomen.

Wordt besloten, de circulaire, waarvan in de Maart-zitting kennis werd genomen, en die betrekking had op de herdenking van het 50-jarig professoraat in Juni a.s. van Lord KELVIN, Hoogleeraar in de Natuurwetenschappen te Glasgow, met een brief te beantwoorden, waarvan de redactie, met hun goedvinden, door den Voorzitter opgedragen wordt aan de Heeren VAN DER WAALS en LORENTZ.

— De Heer MARTIN deelt mede dat hij van zijn voornemen om bij de feestvergadering te Buda-Pesth in September e.k. (zie Notulen der Maart-vergadering) de Afdeeling te vertegenwoordigen, heeft afgezien.

Wiskunde. — De Heer SCHOUTE biedt eene verhandeling aan, getiteld: „*Het vierdimensionale prismoïde*" en bespreekt, naar aanleiding daarvan, eene bepaalde eigenschap van het middellichaam, uit beschouwingen van de ruimte met vier dimensiën afgeleid, waarvan daarna een bewijs, onafhankelijk van de vierde afmeting, wordt gegeven.

Natuurkunde. — De Heer LORENTZ spreekt „*over het evenwicht der warmtestraling bij dubbelbrekende lichamen*".

In eene luchtledige ruimte, die aan alle zijden door volkomen zwarte lichamen van eene standvastige temperatuur omringd is, zal een toestand ontstaan, die kan worden opgevat als een stelsel van elkander in alle richtingen doorkruisende warmte- (en misschien licht-)stralen en die onafhankelijk is van de grootte en den vorm der ruimte. Een dergelijken toestand zal men vinden in een ponderabel, diathermaan lichaam M, dat een deel der ruimte vult; is er „evenwicht", dan moet er eene bepaalde verhouding bestaan tusschen de hoeveelheden stralingsenergie, die in de volume-eenheid van den aether en in de volume-eenheid van het lichaam aanwezig zijn, m.a.w. tusschen de dichtheden der energie; deze verhouding is, voor het geval dat M isotroop is, reeds lang bekend.

De vraag is wat er zal gebeuren zoo men met een dubbelbrekend kristal te doen heeft. De mechanische warmtetheorie vereischt dat in zoodanig lichaam een stralingstoestand ontsta, die aan elk grensvlak, *welke richting dit ook hebbe*, met de straling in den omringenden aether in evenwicht is. Deze uitkomst wordt bevestigd door de lichttheorie, althans wanneer men aanneemt dat de afmetingen van het lichaam M zeer groot zijn in vergelijking met de golflengte, eene onderstelling trouwens die men wel maken moet om van „stralen" te kunnen spreken en van diffractieverschijnselen te kunnen afzien. Zij heeft tevens ten gevolge dat men de intensiteiten van twee stralen, die zich langs dezelfde lijn voortplanten, bij elkander mag optellen; de reden hiervan komt overeen met die, waarom b. v. dikke glasplaten geene interferentieverschijnselen vertoonen.

In het vervolg zullen wij alleen over de stralen spreken, waarvan de trillingstijd tusschen bepaalde oneindig weinig van elkander verschillende grenzen T en $T + d\,T$ ligt, en over de aan deze stralen beantwoordende energie. De dichtheid daarvan in den aether zal door A worden voorgesteld. Voorts zal, wanneer over een bepaalden straal S of over eene bepaalde groep van stralen met de richting S gesproken wordt, tevens aan eene bepaalde trillingsrichting gedacht worden. In het lichaam M heeft men dus bij elke voortplantingsrichting tweeërlei stralen en ook in den aether is dit het geval, wanneer men bij elken straal S twee zoowel onderling als op den straal loodrechte, doch overigens willekeurige richtingen uitkiest, en alle trillingen die zich volgens S voortplanten volgens die beide richtingen ontbindt. De bij de stralen S behoorende golfnormalen zullen door de letter N, de voortplantingssnelheden der golven door V, en die der stralen door U worden aangewezen. In den aether vallen S en N, en eveneens U en V samen; de voortplantingssnelheid in *dit* medium moge V_0 zijn. Verschillende stralen of groepen van stralen zullen van elkander onderscheiden worden door indices of accenten; deze zullen tevens dienen om de grootheden aan te wijzen, die op de beschouwde stralen betrekking hebben.

Men kan nu, wat den aether betreft, uit het geheele complex van stralen die afzonderen, voor welke de richting binnen een vastgestelden oneindig smallen kegel met de opening $d\,\omega$ valt. De dichtheid der aan deze stralen beantwoordende energie zou, daar alle richtingen in gelijke mate voorkomen,

$$A \frac{d\,\omega}{4\,\pi},$$

zijn, wanneer men alle trillingsrichtingen toeliet; wij moeten er echter

$$A \frac{d\,\omega}{8\,\pi} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

voor schrijven, daar wij, overeenkomstig de boven gemaakte opmerking, slechts aan éêne trillingsrichting denken.

Op eene dergelijke wijze kan men onder alle stralen in het kristal die uitkiezen, wier richting binnen een oneindig smallen kegel ligt, of liever, want dan wordt eene eenvoudiger uitkomst verkregen, die, voor welke de golfnormaal binnen zulk een kegel $d\omega$ valt. Men kan dan bewijzen dat de toestand stationair is, wanneer de dichtheid der energie, voor zoover zij bij *deze* stralen (met éêne trillingsrichting) behoort, de waarde

$$A\,\frac{V_0^3}{V^3}\,\frac{d\,\omega}{8\,\pi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

heeft.

Om het bewijs voor deze stelling te leveren beschouwen wij een zeker deel σ van het grensvlak, zoo klein dat het als plat mag worden beschouwd, en toch zeer groot in vergelijking met de golflengte. Zij S_1 een straal, die zich van σ af, hetzij in den aether, hetzij in het lichaam M, voortplant, en laat S_2, S_3, enz. de stralen zijn, uit welke S_1 door terugkaatsing of breking ontstaan kan.

Zoodra S_1 gekozen is, zijn ook de richtingen van S_2, S_3, enz. bepaald; eveneens die van N_1, N_2, N_3, enz. en de voortplantingssnelheden. Wanneer wij verder aan N_1 achtereenvolgens alle richtingen binnen een oneindig smallen kegel $d\,\omega_1$ geven, zullen N_2, N_3, enz. bepaalde kegels $d\,\omega_2$, $d\,\omega_3$, enz. doorloopen. Wanneer wij in het vervolg van de stralengroepen S_1, S_2, S_3, enz. spreken, zullen wij daarbij al de verschillende richtingen samenvatten, die door de kegels $d\,\omega_1$, $d\,\omega_2$, $d\,\omega_3$, enz. worden toegelaten.

Eindelijk zullen nog zekere volumina ter sprake komen. Wij stellen ons voor dat op σ als grondvlak cilinders geconstrueerd worden, waarvan de eerste de beschrijvende lijnen evenwijdig heeft aan S_1, de tweede aan S_2, enz., terwijl de lengten dezer beschrijvende lijnen evenredig zijn met de voortplantingssnelheden der stralen. Noemt men nu de inhouden dezer cilinders I_1, I_2, I_3, enz., en de hoeken, die de lichtstralen met de normaal op het grensvlak maken, β_1, β_2, β_3, enz., dan is

$$I_1 : I_2 : I_3 : \text{enz.} = U_1 \cos\beta_1 : U_2 \cos\beta_2 : U_3 \cos\beta_3 : \text{enz.} \quad . \quad (3)$$

Men kan nu de intensiteit van S_1 uit die van S_2, S_3, enz. berekenen en wij zullen aantoonen dat men, aannemende dat de intensiteiten van S_2, S_3, enz. door den in (2) uitgedrukten regel bepaald zijn, voor de intensiteit van S_1 op deze wijze eene waarde vindt, die mede aan dien regel voldoet. Daarmede zal het gestelde klaarblijkelijk bewezen zijn, daar de richting van S_1 geheel willekeurig kan worden gekozen. Het verdient hierbij opmerking dat de uitdrukking (1) als een bijzonder geval van (2) kan beschouwd worden.

Ging het arbeidsvermogen, dat in den stralenbundel S_2 bestaat, geheel in S_1 over, dan zou in de ruimte I_1 de energie komen, die bij de stralen S_2 in de ruimte I_2 bestaat, d.w.z. volgens (2) de energie

$$A \frac{V_0^3}{V_2^3} \frac{d\omega_2}{8\pi} I_2.$$

In werkelijkheid komt echter in I_1 slechts een gedeelte dezer energie, dat wij door de breuk $p_{2\cdot 1}$ zullen aanwijzen. Stelt men op dezelfde wijze de energie voor, die uit de stralen S_3 enz. ontstaat, dan vindt men voor het arbeidsvermogen in de ruimte I_1:

$$\frac{A V_0^3}{8\pi} \left\{ \frac{I_2 \, d\omega_2}{V_2^3} p_{2\cdot 1} + \frac{I_3 \, d\omega_3}{V_3^3} p_{3\cdot 1} + \text{enz.} \ldots \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Zoo aanstonds zal nu bewezen worden, vooreerst dat

$$\frac{I_1 \, d\omega_1}{V_1^3} = \frac{I_2 \, d\omega_2}{V_2^3} = \frac{I_3 \, d\omega_3}{V_3^3} = \text{enz.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

en ten tweede dat

$$p_{2\cdot 1} + p_{3\cdot 1} + \text{enz.} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

is.

Dientengevolge kan men voor (4) schrijven

$$\frac{A V_0^3}{8\pi} \cdot \frac{I_1 \, d\omega_1}{V_1^3}$$

en dat is juist de waarde, die men moest verkrijgen.

Bewijs van (6). Men kan, zooals bekend is, de lichtbeweging omkeeren. Terwijl straks een straal S_1 ontstond uit de stralen S_2, S_3, enz., kan omgekeerd een straal S'_1 die in tegengestelde richting loopt als S_1, gesplitst worden in stralen S'_2, S'_3, enz., die zich in tegengestelde richting voortplanten als S_2, S_3, enz. Stelt men door $p_{1\cdot 2}$, $p_{1\cdot 3}$, enz. de breuken voor, die aangeven, welke gedeelten van het in S'_1 invallende arbeidsvermogen de wegen S'_2, S'_3, enz. inslaan, dan vereischt de wet van 't behoud van arbeidsvermogen dat

$$p_{1\cdot 2} + p_{1\cdot 3} + \text{enz.} \ldots = 1$$

is. Volgens eene bekende stelling heeft men echter

$$p_{1\cdot 2} = p_{2\cdot 1}, \quad p_{1\cdot 3} = p_{3\cdot 1}, \text{ enz } ;$$

men komt daardoor onmiddellijk tot de betrekking (6).

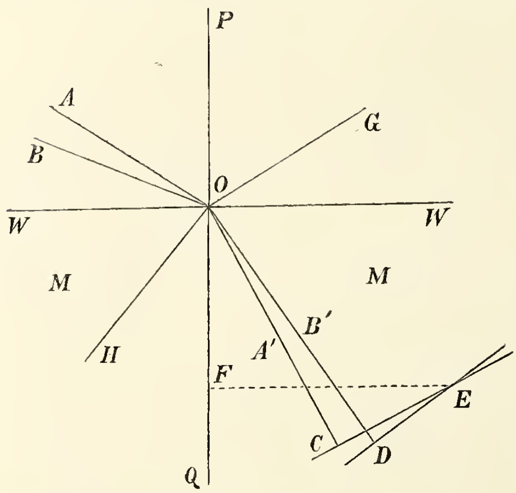
Bewijs van (5). Thans moet nog worden aangetoond dat voor twee willekeurige onder de besproken stralen de betrekking

$$\frac{I\,d\omega}{V^3} = \frac{I'\,d\omega'}{V'^3} \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

doorgaat.

a. Als de beide stralen in den aether loopen, de een dus een aan de buitenzijde van M invallende straal is, en de ander daaruit door terugkaatsing ontstaat, is de zaak onmiddellijk duidelijk.

b. Wij beschouwen thans een straal die in den aether invalt, en een straal die daaruit door breking ontstaat.



In de nevenstaande figuur, waarvan het vlak met het invalsvlak moge samenvallen, zij WW de doorsnede met het grensvlak, PQ de normaal op dat vlak, AO een invallende straal, OA' de golfnormaal van den daaruit ontstaanden gebroken straal, BO een tweede invallende straal met hetzelfde invalsvlak, die oneindig weinig van AO afwijkt, OB' de daarbij behoorende golfnormaal in het lichaam M.

Zij

$$\angle POA = \alpha, \qquad \angle AOB = d\alpha,$$

$$\angle QOA' = \alpha', \qquad \angle A'OB' = d\alpha'.$$

Men vindt dan gemakkelijk

$$d\omega : d\omega' = \sin\alpha\, d\alpha : \sin\alpha'\, d\alpha' \ldots \ldots \quad (8)$$

Bij deze beschouwing is in aanmerking genomen dat de golfnormaal in M altijd in het invalsvlak van den in den aether invallenden straal ligt.

Daar in den aether de golfnormaal met den straal samenvalt, geeft de formule (3)

$$I : I' = V \cos \alpha : U' \cos \beta' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Om nu de richting van den bij OA' behoorenden straal en de waarde van U' te vinden moet men op verschillende, uit O getrokken, lijnen stukken $= V'$ uitzetten, en door de eindpunten dier stukken vlakken loodrecht op de lijnen brengen. Het omhullende oppervlak van deze vlakken is het golfoppervlak. Dit zal door het vlak, dat op de zooeven genoemde wijze loodrecht op OA' gebracht wordt, in een bepaald punt R worden aangeraakt, dat in de figuur niet is aangewezen, omdat het buiten het vlak daarvan komt te liggen. De lijn OR zal dan de richting van den lichtstraal aangeven, en de lengte van OR zal de waarde van U' bepalen. De laatste term in de evenredigheid (9) zal de projectie van OR op de normaal OQ zijn.

Het is voor ons doel niet noodig, het geheele golfoppervlak te construeeren. Men kan volstaan met *drie* oneindig weinig van elkander afwijkende lijnen, uit O getrokken, b.v. met OA', OB' en eene derde lijn, die niet in het vlak der figuur ligt. De drie vlakken, op de gezegde wijze loodrecht op deze lijnen gebracht, zullen elkander in R snijden.

Zelfs kan men zich tot de twee lijnen OA' en OB' bepalen, daar men niet het punt R zelf, maar alleen de projectie van OR op OQ noodig heeft.

Zij dus in de figuur OC de voortplantingssnelheid V', behoorende bij de golfnormaal OA', OD de voortplantingssnelheid, passende bij OB', $CE \perp OC$, $DE \perp OD$, en EF de loodlijn, uit het snijpunt van CE en DE op OQ neergelaten. Dan zijn CE en DE de doorsneden van het vlak der figuur met de door C en D loodrecht op OA' en OB' gebrachte vlakken. De lijn, volgens welke deze vlakken elkander snijden, staat in E loodrecht op het vlak der figuur, en daar deze lijn het punt R moet bevatten, is OF de gezochte projectie, dus

$$U' \cos \beta' = OF.$$

Voor de golfnormalen geldt de gewone wet van SNELLIUS. Derhalve is

$$OC = V \frac{\sin \alpha'}{\sin \alpha}, \quad OD = V \frac{\sin (\alpha' + d\,\alpha')}{\sin (\alpha + d\,\alpha)}.$$

en hieruit vindt men door eene eenvoudige meetkundige beschouwing

$$O\,F = V \frac{\sin^2 \alpha' \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \, \frac{d\,\alpha}{d\,\alpha'}.$$

Substitueert men dit voor den laatsten term in (9) en vermenigvuldigt men dan de evenredigheid met (8), dan komt men tot de vergelijking (7).

c. Dat deze betrekking ook doorgaat, wanneer de eene straal een in M invallende is, en de andere de straal in den aether, die daaruit door breking ontstaat, volgt aanstonds uit het onder b bewezene. Men heeft slechts in gedachten den loop der stralen om te keeren.

d. Eindelijk kan men met een in het lichaam M invallenden straal en een teruggekaatsten straal te doen hebben; de golfnormalen kunnen b.v. $H\,O$ en $O\,A'$ zijn.

Zij $O\,G$ de straal in den aether, die uit $H\,O$ ontstaat, $A\,O$ de straal die tot $O\,A'$ aanleiding kan geven. Uit de wetten der terugkaatsing en breking volgt dan dat $O\,G$ ook door terugkaatsing uit $A\,O$ ontstaan kan.

De in (7) uitgedrukte stelling is nu reeds bewezen voor de stralen $A\,O$ en $O\,G$, voor de stralen $A\,O$ en $O\,A'$, en eindelijk ook voor $H\,O$ en $O\,G$. Daaruit volgt dat zij ook voor $H\,O$ en $O\,A'$ moet gelden.

Dat de uitkomsten der lichttheorie met die der thermodynamica overeenstemmen, is hiermede aangetoond. Wat echter de eigenlijke grond voor deze overeenstemming is, moet nog nader worden onderzocht.

Thans moge nog alleen opgemerkt worden, dat, volgens de in (2) uitgedrukte wet, de straling in het anisotrope lichaam niet in alle richtingen in gelijke mate plaats heeft en bij eene bepaalde richting der golfnormaal trillingen van de beide mogelijke richtingen in verschillende mate voorkomen. De reeds door anderen voor isotrope lichamen verkregen uitkomst is in het hier gevondene als een bijzonder geval begrepen.

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt eene mededeeling aan over „*Een hulpmiddel bij het verlichten van schalen voor spiegelaflezing*".

1. In het Natuurkundig Laboratorium te Leiden wordt bij de spiegelaflezingen sedert tal van jaren (1885) eene methode gevolgd, die het gemakkelijk maakt vrij lange verdeelde glazen schalen sterk en gelijkmatig te verlichten met behulp van eene enkele lichtbron van