gut möglich ist, mittels des Suspensionsverfahrens selbst bei ziemlich kleinen Fröschen und bei erhaltener Circulation, die Bewegungen von Venen, Sinus, Atrien und Ventrikel gleichzeitig messbar zu registriren, wird die technische Lösung der zahlreichen und verwickelten Probleme, die hier in Angriff genommen werden müssen, voraussichtlich nicht von unüberwindlicher Schwierigkeit sein. Ueber einige auf diesem Wege bereits erhaltene Resultate hoffe ich der K. Akademie in einer der nächsten Sitzungen Mittheilungen machen zu können.

Natuurkunde. — De Heer LORENTZ biedt eene mededeeling aan, getiteld: *„Eene algemeene stelling omtrent de beweging eener vloeistof met wrijving en eenige daaruit afgeleide gevolgen".*

§ 1. De bewegingsvergelijkingen voor eene onsamendrukbare vloeistof met wrijving kunnen geschreven worden in den vorm

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned}
\varrho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right) &= \quad +\left(\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}\right)\\
\varrho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right) &= \mathbf{Y}+\left(\frac{\partial Y_x}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}+\frac{\partial Y_z}{\partial z}\right)\\
\varrho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right) &= \mathbf{Z}+\left(\frac{\partial Z_x}{\partial x}+\frac{\partial Z_y}{\partial y}+\frac{\partial Z_z}{\partial z}\right)
\end{aligned}\right\} \; . \quad (2)$$

Daarin stellen voor:

ϱ de dichtheid,

u, v, w de snelheidscomponenten,

X, **Y**, **Z** de componenten der uitwendige kracht per volumeeenheid,

X_x, X_y, enz. de spanningscomponenten op vlakken, loodrecht op de coordinaatassen.

De waarde dezer laatste grootheden wordt, als p den druk en μ den wrijvingscoefficient voorstelt, bepaald door de vergelijkingen

$$X_x=-p+2\mu\frac{\partial u}{\partial x},\text{ enz.} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

$$X_y=Y_x=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right),\text{ enz.} \quad . \; . \; . \; . \quad (4)$$

§ 2. Wij onderstellen dat eene zekere ruimte τ, door een oppervlak σ (of meer dan één oppervlak) begrensd, geheel met de vloeistof gevuld is, duiden met $d\tau$ en $d\sigma$ elementen van de ruimte en van het oppervlak aan, en strekken de integraties die in de volgende vergelijkingen voorkomen, over de geheele ruimte τ of het geheele oppervlak σ uit. Dit laatste kan het grensvlak zijn tusschen de vloeistof en een vast lichaam, of wel een willekeurig oppervlak binnen de vloeistofmassa. Wij noemen n de met betrekking tot de ruimte τ naar buiten getrokken normaal, α, β, γ de hoeken die zij met de coordinaatassen maakt, X_n, Y_n, Z_n de spanningscomponenten op het oppervlak, zoodat

$$X_n = X_x \cos \alpha + X_y \cos \beta + X_z \cos \gamma, \text{ enz.} \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Tot het bedoelde theorema geraakt men nu, wanneer men *twee* bewegingstoestanden onderstelt, die beide aan de bewegingsvergelijkingen voldoen. Wij gebruiken voor den *eersten* bewegingstoestand de boven ingevoerde letters, voor den *tweeden* dezelfde letters, voor zoover noodig van accenten voorzien. Deze tweede toestand voldoet aan vergelijkingen, die volkomen met (1) — (5) overeenstemmen en die wij, zonder ze neer te schrijven, met (1') — (5') kunnen aanwijzen.

§ 3. Men beschouwe thans de integraal

$$\Omega = \int (u' X_n + v' Y_n + w' Z_n)\, d\sigma.$$

Door gebruik te maken van de betrekkingen (5) en te bedenken dat, als φ eene willekeurige functie is,

$$\int \varphi \cos \alpha \, d\sigma = \int \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, d\tau,$$

$$\int \varphi \cos \beta \, d\sigma = \int \frac{\partial \varphi}{\partial y}\, d\tau, \text{ enz.,}$$

vindt men voor die uitdrukking

$$\Omega = \int \left[\frac{\partial (u'X_x)}{\partial x} + \frac{\partial (u'X_y)}{\partial y} + \frac{\partial (u'X_z)}{\partial z} + \text{enz.}\right] d\tau.$$

Het woord „enz." dient hier en in het vervolg om aan te geven dat de termen, die uit de neergeschrevene volgen door twee malen eene cyclische letterverwisseling toe te passen, moeten worden toegevoegd.

Men kan nu Ω in twee deelen splitsen. Het eerste is

$$\Omega_1 = \int \left[u'\left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right) + \text{enz.}\right] d\tau,$$

en het tweede

$$\Omega_2 = \int \left[X_x \frac{\partial u'}{\partial x} + X_y \frac{\partial u'}{\partial y} + X_z \frac{\partial u'}{\partial z} + \text{enz.}\right] d\tau,$$

of, na substitutie van (3) en (4) en met inachtneming van (1')

$$\Omega_2 = \mu \int \left[2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u'}{\partial x} + \text{enz.} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x}\right) + \text{enz.}\right] d\tau.$$

Daar deze uitdrukking niet verandert als men u, v, w en u', v', w' met elkaâr verwisselt, geraakt men tot dezelfde uitkomst als men uitgaat van

$$\Omega' = \int (u\, X'_n + v\, Y'_n + w\, Z'_n)\, d\sigma$$

en daarmede handelt als met Ω.

Stelt men dus

$$\Omega_1' = \int \left[u \left(\frac{\partial X'_x}{\partial x} + \frac{\partial X'_y}{\partial y} + \frac{\partial X'_z}{\partial z}\right) + \text{enz.}\right] d\tau,$$

dan wordt

$$\Omega - \Omega' = \Omega_1 - \Omega_1'.$$

In Ω_1 en Ω_1' substitueeren wij nu de waarden van

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}, \text{ enz.},$$

die uit de vergelijkingen (2) en (2') voortvloeien.

Wij verkrijgen dan, wanneer wij tevens — wat wegens (1) en (1') geoorloofd is, —

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}, \text{ enz.}$$

vervangen door

$$\frac{\partial (u^2)}{\partial x} + \frac{\partial (uv)}{\partial y} + \frac{\partial (uw)}{\partial z}, \text{ enz.},$$

de stelling

$$\int (u' X_n + v' Y_n + w' Z_n)\, d\sigma - \int (u X'_n + v Y'_n + w Z'_n)\, d\sigma =$$

$$= \varrho \int \left[\left(u' \frac{\partial u}{\partial t} - u \frac{\partial u'}{\partial t} \right) + \text{enz.} \right] d\tau - \int \left[\left(u' \mathbf{X} - u \mathbf{X}' \right) + \text{enz.} \right] d\tau +$$

$$+ \varrho \int \left[u' \left\{ \frac{\partial (u^2)}{\partial x} + \frac{\partial (uv)}{\partial y} + \frac{\partial (uw)}{\partial z} \right\} - u \left\{ \frac{\partial (u'^2)}{\partial x} + \frac{\partial (u'v')}{\partial y} + \frac{\partial (u'w')}{\partial z} \right\} + \text{enz.} \right] d\tau . (\mathrm{I})$$

§ 4. Wij passen deze stelling vooreerst toe in de onderstelling, dat beide bewegingstoestanden stationair zijn, dat er noch bij den eenen, noch bij den anderen uitwendige krachten werken en dat alle snelheden oneindig klein zijn. De vergelijking gaat dan over in

$$\int (u' X_n + v' Y_n + w' Z_n)\, d\sigma - \int (u X'_n + v Y'_n + w Z'_n)\, d\sigma = 0 \;. \quad (\mathrm{II})$$

De twee bewegingstoestanden moeten thans, behalve aan (1) en (1') voldoen aan

$$- \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \,\Delta\, u = 0, \text{ enz.} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

en

$$- \frac{\partial p'}{\partial x} + \mu \,\Delta\, u' = 0, \text{ enz.}, \quad \ldots\ldots \quad (6')$$

Voor den *eersten* bewegingstoestand nemen wij thans een zoodanigen, als in werkelijkheid in een of ander geval in de ruimte τ bestaat, met waarden van u, v, w, enz., die in deze ruimte overal eindig en doorloopend zijn, voor den *tweeden* daarentegen een denkbeeldigen toestand, dien wij op de volgende wijze definieeren.

Zij P een willekeurig punt in de ruimte τ, B een kleine bol, om dat punt als middelpunt met den straal R beschreven, en laat u', v', w' zoo zijn als 't geval zou wezen, indien de vloeistof zich rondom B tot in 't oneindige uitstrekte en aan 't oppervlak van B

$$u' = c, \quad v' = 0, \quad w' = 0 \text{ (}c\text{ eene oneindig kleine constante)}$$

en op oneindigen afstand

$$u' = v' = w' = 0$$

was.

Dan is, als men P tot oorsprong van coordinaten kiest, en den afstand tot P door r voorstelt,

$$u' = -\frac{1}{4} R^3 c \left(\frac{3x^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right) + \frac{3}{4} Rc \left(\frac{x^2}{r^3} + \frac{1}{r}\right),$$

$$v' = -\frac{3}{4} R^3 c \frac{xy}{r^5} + \frac{3}{4} Rc \frac{xy}{r^3},$$

$$w' = -\frac{3}{4} R^3 c \frac{xz}{r^5} + \frac{3}{4} Rc \frac{xz}{r^3},$$

waaruit men gemakkelijk de waarden der spanningscomponenten kan afleiden.

Door nu de stelling (II) toe te passen op de ruimte tusschen het boloppervlak B en het oppervlak σ, en R tot 0 te laten naderen, vindt men

$$u_P = \frac{3}{4\pi} \int \frac{x}{r^5} (ux + vy + wz)(x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma)\, d\sigma +$$

$$+ \frac{1}{8\pi\mu} \int \left[\left(\frac{x^2}{r^3} + \frac{1}{r}\right) X_n + \frac{xy}{r^3} Y_n + \frac{xz}{r^3} Z_n\right] d\sigma \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Met u_P is hier de snelheid u in het punt P bedoeld; daar er ook dergelijke formules voor v_P en w_P bestaan, is het antwoord gevonden op de vraag, hoe de snelheid in een willekeurig punt der ruimte afhangt van de snelheden en de spanningscomponenten aan het grensvlak.

§ 5. Men kan van deze uitkomst gebruik maken om te bepalen, hoe een gegeven bewegingstoestand door een vlakken vasten wand, waarlangs de vloeistof niet kan glijden, „teruggekaatst” wordt. Te dien einde behandelen wij eerst het volgende vraagstuk.

Het verband te zoeken tusschen twee bewegingstoestanden (u_1, v_1 w_1, p_1) en (u_2, v_2, w_2, p_2), die zich beide over de ruimte aan de positieve zijde van het yz-vlak uitstrekken en voor welke in alle punten van dit vlak

$$u_1 = u_2, \quad v_1 = -v_2, \quad w_1 = -w_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

is.

De oplossing wordt gevonden door op beide bewegingstoestanden de vergelijking (7) toe te passen (in dier voege, dat men het oppervlak σ met het yz-vlak laat samenvallen) en van verschillende mathematische kunstgrepen, die hier ter bekorting moeten achterwege blijven, gebruik te maken. Men vindt ten slotte voor elk punt der beschouwde ruimte

$$\left.\begin{aligned} u_2 &= \quad u_1 - 2\,x\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{x^2}{\mu}\frac{\partial p_1}{\partial x}, \\ v_2 &= -v_1 - 2\,x\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{x^2}{\mu}\frac{\partial p_1}{\partial y}, \\ w_2 &= -w_1 - 2\,x\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{x^2}{\mu}\frac{\partial p_1}{\partial z}, \\ p_2 &= p_1 + 2\,x\frac{\partial p_1}{\partial x} - 4\,\mu\frac{\partial u_1}{\partial x}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

Inderdaad ziet men aanstonds dat de drie eerste vergelijkingen voor $x = 0$ overgaan in (8) en kan men door rechtstreeksche berekening aantoonen dat u_2, v_2, w_2, p_2 aan de bewegingsvergelijkingen voldoen, indien dit met u_1, v_1, w_1, p_1 het geval is.

Wat nu het vraagstuk der „terugkaatsing" betreft, onderstellen wij, dat de vaste wand met het yz-vlak samenvalt, en dat de vloeistof zich aan de zijde der positieve x-as bevindt. Wij stellen ons voor dat men, door aan een klein gesloten oppervlak in de vloeistof standvastige snelheden te onderhouden, of door op een deel der vloeistof standvastige uitwendige krachten te laten werken, een bewegingstoestand M_o opwekt, dien men kent voor het geval, dat bij afwezigheid van den vasten wand de vloeistof zich ook achter het yz-vlak (waar x negatief is) uitstrekt. Laat u_o, v_o, w_o de snelheden zijn, die bij dezen toestand aan het yz-vlak bestaan.

Men kan zich nu altijd een toestand M_1 vóór het yz-vlak denken, die (wat de snelheden betreft) het spiegelbeeld is van wat M_o achter het yz-vlak zou zijn. Aan dit vlak zelf zullen bij dezen toestand M_1 de snelheden

$$u_1 = -u_0, \quad v_1 = v_0, \quad w_1 = w_0$$

voorkomen. Leidt men dan uit den toestand M_1 door middel van de vergelijkingen (9) een toestand M_2 af, dan zullen de bij dezen voorkomende snelheden u_2, v_2, w_2 aan het yz-vlak voldoen aan

$$u_0 + u_2 = 0, \quad v_0 + v_2 = 0, \quad w_0 + w_2 = 0.$$

M_2 is dus de beweging, die, als de vaste wand er is, tegelijk met M_o bestaan kan.

§ 6. Kon men (§ 4) een bewegingstoestand met oneindig kleine snelheden u', v', w' zoo bepalen, dat aan het oppervlak van den oneindig kleinen bol B

$$u' = c, \quad v' = 0, \quad w' = 0$$

en aan het oppervlak σ

$$u' = v' = w' = 0$$

was, dan zou men uit (II) vinden

$$u_P = -\frac{1}{6\,\pi\mu\,cR}\int (uX'_n + vY'_n + wZ'_n)\,d\sigma.$$

Dan zou dus het vraagstuk zijn opgelost, om bij willekeurig gegeven snelheden aan het grensvlak σ de snelheden u, v, w in een willekeurig inwendig punt te bepalen.

§ 7. Wij stellen ons thans voor dat in de door het oppervlak σ omsloten ruimte een vast lichaam L geplaatst is, en nemen voor (u, v, w) in (I) een bewegingstoestand M, die mogelijk is, wanneer dit lichaam in rust wordt gehouden of eene gegeven beweging heeft.[1]) Voor (u', v', w') nemen wij een stationairen toestand met oneindig kleine snelheden en zonder uitwendige krachten, bij welken aan het oppervlak van L

$$u' = c, \quad v' = 0, \quad w' = 0$$

en aan σ

$$u' = v' = w' = 0$$

is. Elke oppervlakteintegraal in (I) splitst zich thans in eene integraal over het grensvlak σ en eene integraal over het oppervlak Σ van L. Daar nu de eerste integraal in (I), over Σ genomen, de met $-c$ vermenigvuldigde resulteerende kracht Ξ voorstelt, die het lichaam L bij den bewegingstoestand M in de richting der x-as ondervindt, verkrijgen wij

$$\Xi = -\frac{1}{c}\int (uX'_n + vY'_n + wZ'_n)\,d\Sigma - \frac{1}{c}\int (uX'_n + vY'_n + wZ'_n)\,d\sigma +$$

$$+\frac{1}{c}\int (u'\mathbf{X} + v'\mathbf{Y} + w'\mathbf{Z})\,d\tau - \frac{\varrho}{c}\int \left[u'\left\{\frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z}\right\} + \text{enz.}\right] d\tau$$

Bestaan er bij den bewegingstoestand M geene uitwendige krachten

---

[1]) Deze beweging moet echter bestaanbaar zijn met een stationairen toestand (gelijkmatige wenteling van een omwentelingslichaam om zijne as).

en mag men de tweede machten der snelheden verwaarloozen, dan blijven in het tweede lid alleen de twee eerste termen over; dan kan dus de op L werkende kracht gevonden worden, zoo men slechts de snelheden u, v, w aan de oppervlakken Σ en σ kent. Bestaan er uitwendige krachten **X, Y, Z**, bij oneindig kleine snelheden, dan heeft men met een term meer te doen, maar ook nu nog is de kennis van u, v en w in elk punt der ruimte niet noodig. Dit is eerst het geval, wanneer men de tweede machten der snelheden in aanmerking neemt, maar, zoo men de nog hoogere machten verwaarloost, blijkt gemakkelijk uit den vorm van den laatsten term, dat men daarin de waarden van u, v en w mag substitueeren, zooals die door de bewegingsvergelijkingen voor oneindig kleine snelheden worden opgeleverd.

De formule is afgeleid met het oog op eene bepaalde toepassing, die echter nog niet is uitgewerkt.

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt namens Dr. J. VERSCHAFFELT eene mededeeling aan: „*Over capillaire opstijging tusschen twee concentrische cylindrische buizen*", metingen verricht in het Natuurkundig Laboratorium te Leiden.

In een vorig stuk heb ik mijn uitkomsten medegedeeld omtrent metingen van capillaire stijghoogten van vloeibaar koolzuur. De proef werd zoo genomen dat de capillair in de as van eene wijde dikwandige buis werd geplaatst, en de verticale afstand werd gemeten tusschen het laagste punt van den meniscus in den capilair, en het horizontale raakvlak aan den meniscus in de ringvormige ruimte.

Stellen wij ons voor dat de wijde dikwandige buis van onderen open is en rechtop wordt gesteld midden in een oneindig uitgestrekten vloeistofspiegel, dan is de *werkelijke* stijghoogte H in den capillair gelijk aan de *schijnbare* stijghoogte h, vermeerderd met de stijghoogte h' in de ringvormige ruimte.

Zijn r_1 en r_2 de inwendige en uitwendige straal van den capillair, en r_3 de inwendige straal van de manometerbuis, zoo wordt gewoonlijk aangenomen voor de stijghoogte h' (Zie b.v. WINKELMANN, Handbuch d. Physik, 1891, Erster Bd., p. 460)

$$2\pi r_1 \alpha = \pi r_1^2 h$$

en

$$2\pi (r_3 + r_2)\alpha = \pi (r_3^2 - r_2^2) h'$$

zoodat

$$\frac{h'}{h} = \frac{r_1}{r_3 - r_2} .$$