Elektromagnetisme II: antwoorden op tentamenvragen

18 januari 1995

1. *(a)* $\vec{E} = \vec{r}\rho/(3\varepsilon_0)$ binnen de bol; $\vec{E} = \vec{r}a^3\rho/(3\varepsilon_0 r^3)$ buiten de bol.
   (b) $V(r) = -\int_0^r E(r')\,dr'$ geeft $V = -\rho r^2/(6\varepsilon_0)$ binnen de bol en $V = a^3\rho/(3\varepsilon_0 r) - a^2\rho/(2\varepsilon_0)$ buiten de bol.
   (c) $\vec{E} = (\vec{r} - \vec{r}_+)\rho/(3\varepsilon_0) - (\vec{r} - \vec{r}_-)\rho/(3\varepsilon_0) = (\vec{r}_- - \vec{r}_+)\rho/(3\varepsilon_0)$.

2. *(a)* $dW = \vec{F}\cdot d\vec{l} = dq(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})\cdot\vec{v}\,dt = \vec{E}\cdot\vec{v}\,dqdt = \vec{E}\cdot\vec{v}\rho\,d\vec{r}dt = \vec{E}\cdot\vec{j}\,d\vec{r}dt$.
   (b) $\vec{E}\cdot\vec{j}\,d\vec{r} = I\vec{E}\cdot d\vec{l} \Rightarrow dW/dt = I\oint\vec{E}\cdot d\vec{l} = -Id\Phi/dt = -LIdI/dt$.
   (c) $\Delta U_{\mathrm{m}} = -\int_{t_1}^{t_2}(dW/dt)dt = \frac{1}{2}L(I_2^2 - I_1^2)$.

3. Zie Griffiths, § 9.4.1.

4. *(a)* $\vec{F}_{\mathrm{B}} = \hat{y}\,q_{\mathrm{A}}q_{\mathrm{B}}/(4\pi\varepsilon_0 d^2)$.
   (b) $\vec{F}'_{\mathrm{B}} = \gamma\vec{F}_{\mathrm{B}}$.
   (c) $\vec{F}'_{\mathrm{A}} = -\hat{y}\,q_{\mathrm{A}}q_{\mathrm{B}}/(4\pi\varepsilon_0 d^2) \neq -\vec{F}'_{\mathrm{B}} \Rightarrow$ derde wet van Newton geldt niet in de relativistische mechanica.

28 april 1995

1. *(a)* $\vec{E} = \hat{\phi}\,\frac{1}{2}RB_0\,\omega\sin\omega t$ als $R \le a$;
   $\vec{E} = \hat{\phi}\,\frac{1}{2}(a^2/R)B_0\,\omega\sin\omega t$ als $R > a$.
   (b) $\operatorname{div}\vec{E} = 0 \Rightarrow \rho = 0$; $\vec{j} = (1/\mu_0)\operatorname{rot}\vec{B} - \varepsilon_0\partial\vec{E}/\partial t =$
   $= (1/\mu_0)\hat{\phi}B_0\delta(r-a)\cos\omega t - \frac{1}{2}\varepsilon_0\hat{\phi}B_0\,\omega^2\min(R, a^2/R)\cos\omega t$.
   (c) $\vec{E}\cdot\vec{j} \sim \sin\omega t\cos\omega t$ middelt uit tot nul over een periode.

2. *(a)* $\vec{E} = -\nabla V - \partial\vec{A}/\partial t = \omega A_0\hat{y}\cos(kx - \omega t)$;
   $\vec{B} = \nabla\times\vec{A} = kA_0\hat{z}\cos(kx - \omega t)$.
   (b) $\nabla\times\vec{B} = \varepsilon_0\mu_0\partial\vec{E}/\partial t \Rightarrow k^2 = \varepsilon_0\mu_0\omega^2$.
   (c) Neen, want dan zou $\vec{B}$ nul moeten zijn.

3. Zie Griffiths, § 9.4.1.

4. *(a)* $(V/c, \vec{A})$ transformeert als een viervector
   (b) De Lorentzijk is het inproduct van de twee viervectoren $(V/c, \vec{A})$ en $(-\partial/\partial ct, \nabla)$ en dus invariant onder verandering van inertiaalstelsel.
   (c) De golfvergelijking kan geschreven worden als $\Box^2(V/c, \vec{A}) = -\mu_0(c\rho, \vec{j})$, waarbij $\Box^2 = \nabla^2 - c^{-2}\partial^2/\partial t^2$ het inproduct is van $(-\partial/\partial ct, \nabla)$ met zichzelf. Dit inproduct is invariant onder Lorentztransformatie, terwijl $(V/c, \vec{A})$ en $(c\rho, \vec{j})$ beiden transformeren als een viervector. Lorentztransformatie van de golfvergelijking levert dus weer dezelfde vergelijking op.

21 augustus 1995

1. *(a)* $\vec{E} = \hat{z}(Q/4\pi\varepsilon_0)z(\frac{1}{4}L^2 + z^2)^{-3/2}$.
   (b) $\vec{E} = \hat{z}(Q/4\pi\varepsilon_0)z^{-1}(\frac{1}{4}L^2 + z^2)^{-1/2}$.
   (c) $\vec{E} \to \hat{z}(Q/4\pi\varepsilon_0)z^{-2}$ = veld van puntlading Q in oorsprong.

2. *(a)* $\vec{B} = -2A_0\hat{z}$.
   (b) $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\chi$ met $\chi = A_0 xy$.
   (c) χ is tijdsonafhankelijk, dus Φ verandert niet.
   (d) Hetzelfde als in onderdeel *(a)*, met een tijdsafhankelijke A_0.

3. *(a)* Zie Griffiths, § 10.3.1.
   (b) $\Phi(\vec{r},t) = (q/4\pi\varepsilon_0)|x - vt|^{-1}$, $\vec{A}(\vec{r},t) = (q\mu_0/4\pi)\hat{x}v|x - vt|^{-1}$. De afleiding is behandeld op het college.

4. *(a)* De afleiding is behandeld op het college.
   (b) $E'_x = E_x$, $E'_y = \gamma(E_y - vB_z)$, $B'_z = \gamma(B_z - vc^{-2}E_y)$. De afleiding is behandeld op het college.

19 januari 1996

1. *(a)* $\vec{E} = \hat{z}(Q/4\pi\varepsilon_0)h(h^2 + a^2)^{-3/2}$.
   (b) $\vec{E} = \hat{z}(Q/4\pi\varepsilon_0)(2/a^2)[1 - h(h^2 + a^2)^{-1/2}]$.
   (c) $\vec{E} \to \hat{z}(Q/4\pi\varepsilon_0)h^{-2}$ = veld van puntlading Q in oorsprong.

2. *(a)* Zie Griffiths, § 5.2.2.
   (b) De relatie tussen $\vec{A}$ en $\vec{B}$ is dezelfde als de relatie tussen $\vec{B}$ en $\mu_0\vec{j}$. Dus vgl. (1) volgt uit de wet van Biot en Savart door $\vec{B}$ te vervangen door $\vec{A}$ en $\mu_0\vec{j}$ te vervangen door $\vec{B}$.
   (c) $\operatorname{rot}\vec{A} = \vec{B}$, $\operatorname{div}\vec{A} = 0$.

3. *(a)* Zie Griffiths, § 10.2.1.
   (b) $T = R/c$.
   (c) $\vec{A} = (\mu_0 I_0/2\pi)[\ln(ct + \sqrt{c^2t^2 - R^2}) - \ln R]$.
   (d) $\vec{B} = \hat{\phi}\mu_0 I_0/2\pi R$.

4. *(a)* De bewering houdt in dat $c\rho$ en $\vec{j}$ net zo transformeren als ct en $\vec{r}$ onder verandering van inertiaalstelsel.
   (b) De afleiding is behandeld op het college en staat ook in Griffiths, § 12.3.4.
   (c) De wet van behoud van lading stelt het inproduct van twee viervectoren gelijk aan nul, nl. de viervector $(c\rho, \vec{j})$ en de viervector $(-\partial/\partial ct, \partial/\partial\vec{r})$. Het inproduct van twee viervectoren is relativistisch invariant, dus ook de wet van behoud van lading.

11 maart 1996

1. *(a)* $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \Rightarrow -\Delta \vec{B} = \mu_0 \nabla \times \vec{j}$.
   (b) Bewijs dat $B_z = 0$: de z-component van $\nabla \times \vec{j}$ is nul, dus de z-component van $\Delta \vec{B}$ is nul, dus de laplaciaan van B_z is nul, dus B_z is nul;
   Bewijs dat $B_R = 0$: $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, $B_z = 0$ en $\partial B_\phi / \partial \phi = 0$, dus $\partial R B_R / \partial R = 0$, dus $B_R = 0$.
   (c) $\vec{B} = \hat{\phi} B_\phi(R, z)$ met de wet van Ampère geeft: $2\pi R B_\phi = \mu_0 N I$ voor $0 < z < h$, $d < R < D$; $B_\phi = 0$ buiten spoel.

2. *(a)* Neem de divergentie van de vierde Maxwellvergelijking en vul de eerste Maxwellvergelijking in voor $\nabla \cdot \vec{E}$.
   Integreren over een volume V (oppervlakte S) geeft $dQ_V/dt = -\int_S \hat{n} \cdot \vec{j}\, dS$, waarbij Q_V de lading in V is en $\hat{n}$ een normaal op S. Voor een afgesloten systeem geldt $\hat{n} \cdot \vec{j} = 0 \Rightarrow dQ_V/dt = 0$ (wet van behoud van lading).
   (b) Zie Griffiths, § 8.1.2.
   (c) $\varepsilon_0 \vec{E} \times \vec{B}$ is de elektromagnetische impulsdichtheid.

3. *(a)* $B_0 = E_0/c$, $\omega = ck$
   (b) $\langle u \rangle = \epsilon_0 E_0^2/2$, $\langle \vec{p} \rangle = \hat{x} \epsilon_0 E_0^2 / 2c$
   (c) $F = A \epsilon_0 E_0^2/2$

4. *(a)* In stelsel S: $\vec{E} = (\rho_0/\varepsilon_0 d_0) 2^{-1/2} (\hat{y} - \hat{x})$ binnen de condensator en nul erbuiten; $\vec{B} = 0$. In stelsel S': $E'_x = E_x$, $E'_y = \gamma E_y$, $E'_z = E_z$; $B'_x = 0$, $B'_y = 0$, $B'_z = -(\gamma v_\mathrm{R}/c^2) E_y$.
   (b) In stelsel S: $\rho = \pm\rho_0$, $\vec{j} = 0$; In stelsel S': $\rho' = \gamma\rho$, $\vec{j}'_x = -\gamma v_\mathrm{R} \rho$, $\vec{j}'_y = 0$, $\vec{j}'_z = 0$.
   (c) $\tan\alpha' = \Delta y'/\Delta x' = \gamma \Delta y/\Delta x = \gamma \tan\alpha = \gamma \Rightarrow \alpha' = \arctan\gamma$
   $\tan\alpha_{E'} = E'_y/E'_x = -\gamma \Rightarrow \alpha_{E'} = \pi - \arctan\gamma$, dus $\alpha_{E'} - \alpha' = \pi - 2\arctan\gamma < \pi/2$.
   Als $v_\mathrm{R} \to c$ gaat $\alpha_{E'} \to \alpha'$, dus $\vec{E}'$ komt evenwijdig aan de platen te staan.

19 augustus 1996

1. *(a)* $V = (Q/4\pi\varepsilon_0)(1/a - 1/b)$.
   (b) $W = \frac{1}{2} Q V$.
   (c) $W = \frac{1}{2} Q (V_1 - V_2)$, met $V(\vec{r})$ een oplossing van $\Delta V = -\rho/\varepsilon_0$; dus $V \propto Q \Rightarrow W \propto Q^2$.

2. *(a)* $\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \oint_C (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \phi$.
   (b) $\vec{A}_0 = \hat{\phi}(\phi_0/2\pi R)$ als $R > R_0$; $\vec{A}_0 = \hat{\phi}(\phi_0/2\pi R)(R/R_0)^2$ als $R < R_0$.
   (c) Neen: dan zou $\oint_C \vec{A}'_0 \cdot d\vec{l} = 0$ voor C een kring die de spoel omvat, terwijl deze integraal juist $\phi_0 \neq 0$ moet opleveren.

3. *(a)* $Q = 2\pi L \varepsilon_0 V / \ln(b/a)$ op binnenste cylinder ($-Q$ op buitenste cylinder).
   (b) $\vec{B} = \hat{\phi} \mu_0 I / 2\pi R$; $\vec{E} = \hat{R} V [R \ln(b/a)]^{-1}$; $\vec{S} = (1/\mu_0) \vec{E} \times \vec{B} = \hat{z} I V [2\pi R^2 \ln(b/a)]^{-1}$.
   (c) $\Delta u / \Delta t = IV$.

4. *(a)* Transformatieregels invullen en uitwerken.
   (b) Neen, tenzij $\vec{E}$ ook nul is. Immers, als $\vec{B} = 0$ en $\vec{E} \neq 0$, dan geldt dat $|\vec{E}|^2 - c^2 |\vec{B}|^2 > 0$. Maar als $\vec{E}' = 0$ moet deze term ≤ 0 zijn, hetgeen een tegenstrijdigheid oplevert.
   (c) Gegeven $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$, vul de transformatieregels in, werk uit en vind $\vec{E}' \cdot \vec{B}' = 0$.

20 januari 1997

1. *(a)* $\vec{p} = \int d\vec{r}\, \vec{r} \rho(\vec{r})$.
   Bij verplaatsing van het atoom gaat $\vec{r} \to \vec{r} + \vec{r}_0$, maar $\vec{p}$ blijft onveranderd omdat $\int d\vec{r}\, \rho(\vec{r}) = 0$.
   (b) $\vec{p} = 0$, vanwege de bolsymmetrie.
   (c) $\vec{p} = qd\hat{x}$.
   (d) De verplaatsing d kun je vinden door het totale elektrische veld ter plaatse van de kern nul te stellen. Het elektrische veld van de elektronenwolk is $qd/4\pi\varepsilon_0 a^3$, gelijk stellen aan E_0 levert op: $d = 4\pi\varepsilon_0 a^3 E_0/q$. Dus de polariseerbaarheid wordt $\alpha = p/E_0 = 4\pi\varepsilon_0 a^3$.

2. *(a)* $\Phi - \partial\chi/\partial t = 0$ heeft altijd een oplossing; $\vec{A} + \nabla\chi = 0$ heeft niet altijd een oplossing (alleen als $\nabla \times \vec{A} = 0$, dus als $\vec{B} = 0$).
   (b) $\frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \vec{A} = -\rho/\varepsilon_0$, $\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \Delta\vec{A} + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} = \mu_0 \vec{j}$.
   (c) $\vec{A} = -q\vec{r}t/4\pi\varepsilon_0 r^3$.

3. *(a)* $\vec{E} = E_0 \cos(kx - \omega t)\hat{y}$, $\vec{B} = B_0 \cos(kx - \omega t)\hat{z}$, $B_0 = E_0/c$.
   (b) $1200\,\mathrm{Wm}^{-2} = \frac{1}{2}c\varepsilon_0 E_0^2 \Rightarrow E_0 = 950\,\mathrm{N/Coulomb}$.
   (c) $P = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 = 4 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{Nm}^{-2}$.

4. *(a)* $\vec{E}' = \gamma v \vec{B}$.
   (b) $\vec{B}' = \gamma\vec{B}$; $\vec{F}' = q(\vec{E}' + \vec{v} \times \vec{B}') = 0$.
   (c) $\vec{E}' = 0$, $\vec{B}' = \vec{B}$, $\vec{F}' = 0$.

24 februari 1997

1. *(a)* $\vec{\mu} = \frac{1}{2}\int d\vec{r}\, \vec{r} \times \vec{j}(\vec{r})$.
   Bij verplaatsing van het deeltje gaat $\vec{r} \to \vec{r} + \vec{r}_0$, maar $\vec{\mu}$ blijft onveranderd omdat $\int d\vec{r}\, \vec{j}(\vec{r}) = 0$.
   (b) $\partial\rho/\partial t = -\nabla \cdot \vec{j} = 0$.
   (c) $\vec{\mu} = (2\pi/3)(a/b^2)\hat{z}$.

2. *(a)* $U = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int d\vec{r}\, \Phi(\nabla \cdot \vec{E}) = -\frac{1}{2}\varepsilon_0 \int d\vec{r}\, \vec{E} \cdot \nabla\Phi = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int d\vec{r}\, |\vec{E}|^2$.
   (b) $U = (3/20)Q^2/(\pi\varepsilon_0 a)$.

3. *(a)* $\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon_0$, $\vec{E} = -\nabla\Phi - \partial\vec{A}/\partial t$, $\nabla \cdot \vec{A} = 0 \Rightarrow \Delta\phi = -\rho/\varepsilon_0$.
   (b) $\Phi(\vec{r}, t) = (4\pi\varepsilon_0)^{-1} \int d\vec{r}'\, \rho(\vec{r}', t)|\vec{r} - \vec{r}'|^{-1}$.
   (c) Om een signaal over te brengen moet het elektrische veld veranderen, de potentiaal zelf is niet waarneembaar.

4. *(a)* Zie Griffiths, § 10.3.1.
   (b) $\Phi = (4\pi\varepsilon_0)^{-1}q/x_0$.

5. *(a)* $(\Phi/c, \vec{A})$ transformeert als een viervector.
   (b) $\Phi = (4\pi\varepsilon_0)^{-1}q/x_0$.

18 augustus 1997

1. *(a)* $\Phi_0 = (q/4\pi\varepsilon_0)[(x^2 + y^2 + (z - d)^2)^{-1/2} - (x^2 + y^2 + (z + d)^2)^{-1/2}]$.
   (b) Φ_1 moet 0 zijn op het vlak $z = 0$ (aangenomen dat de potentiaal nul is in het oneindige); Φ_0 voldoet hieraan. Bovendien voldoet Φ_0 aan dezelfde Poissonvergelijking als Φ_1 voor $z > 0$. Voor $z < 0$ geldt $\Delta\Phi_1 = 0$, dus $\Phi_1 = 0$ voor $z < 0$.
   (c) De integraal van $\vec{E} \cdot d\vec{S}$ over een groot oppervlak S dat de plaat bevat plus de lading q gaat naar nul als het oppervlak S oneindig groot wordt. Dus de totale omvatte lading is nul, dus de lading op de plaat is $-q$.

2. *(a)* Aan $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ is automatisch voldaan, omdat de divergentie van de rotatie nul is.
(b) $\Delta\vec{W} = -\vec{B}$.
(c) $\vec{W}$ voldoet aan een Poissonvergelijking, waarvan de algemene oplossing bekend is. Neem de rotatie van die oplossing en je vind de gezochte relatie voor $\vec{A}$.

3. *(a)* $d^2E'/dz^2 = (k^2 - \omega^2/c^2)E'$, $E'(0) = E'(b) = 0$.
(b) $E'(z) = A\sin(n\pi z/b)$,
$\vec{B} = \hat{x}\,\mathrm{Re}\,(i/\omega)(dE'/dz)e^{i(kx-\omega t)} + \hat{z}\,\mathrm{Re}\,(k/\omega)E'e^{i(kx-\omega t)}$.
(c) $(n\pi/b)^2 + k^2 = \omega^2/c^2$, $n = 0, 1, 2, \ldots \Rightarrow \omega > \pi c/b \equiv \omega_\mathrm{c}$.

4. *(a)* $\vec{p} = md\vec{r}/d\tau$, met eigentijd $\tau = t\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Alleen in de klassieke limiet $v \ll c$ geldt $\vec{p} = md\vec{r}/dt$.
(b) $F'_x = F_x$, $F'_y = F_y/\gamma$, $F'_z = F_z/\gamma$, $\gamma = (1 - v_\mathrm{R}^2/c^2)^{-1/2}$.
(c) $\vec{K} = d\vec{p}/d\tau$, $K_0 = dp_0/d\tau = c^{-1}dE/dt$.

4 maart 1998

1. *(a)* $\vec{p} = \int d\vec{r}\,\vec{r}\rho(\vec{r})$.
(b) $\Phi(\vec{r}) = \vec{r}\cdot\vec{p}/4\pi\varepsilon_0 r^3$.
(c) $\vec{p} = (4/3)\pi a^3\sigma_0\hat{z}$.

2. *(a)* $T_{xx} = -\varepsilon_0 E_0^2\cos^2(kx - \omega t)$, alle andere componenten zijn 0.
(b) $F = -ST_{xx} \Rightarrow \bar{F} = (1/2)\varepsilon_0 E_0^2 S$.
(c) tijdsgemiddelde energiedichtheid $\bar{U} = (1/2)\varepsilon_0 E_0^2$, vermogen $P = \bar{U}Sc = 1300\,\mathrm{W}$. Hieruit volgt E_0 en dus $B_0 = E_0/c$.

3. *(a)* Zie Griffiths, § 10.3.1.
(b) $\Phi = q/4\pi\varepsilon_0 R$, $\vec{A} = (\mu_0 q\omega/4\pi)(-\sin\omega(t - R/c), \cos\omega(t - R/c), 0)$; retardatie is onbelangrijk als $\omega R \ll c$.

4. *(a)* De afleiding is behandeld op het college.
(b) $E'_x = E_x$, $E'_z = \gamma(E_z + vB_y)$, $B'_y = \gamma(B_y + vc^{-2}E_z)$. De afleiding is behandeld op het college.

17 april 1998

1. *(a)* De afleiding is behandeld op het college.
(b) $W_1 = W_2 = (Q^2/\varepsilon_0 R)(3/20\pi)$.
(c) $2W_1 + Q^2/4\pi\varepsilon_0 L$.

2. *(a)* $\vec{A} = (\mu_0 I/4\pi)\oint d\vec{l}/r$, $\nabla\cdot\vec{A} = 0$.
(b) De afleiding is behandeld op het college.
(c) Als I stroomt door de *lange* spoel, dan is de flux omvat door de *korte* spoel gelijk aan $\mu_0 N_2 I\pi R^2 N_1 L$. Hieruit volgt $M_{12} = M_{21} = \mu_0 N_1 N_2\pi R^2 L$ en dus de flux $M_{12}I$ door de lange spoel als de stroom I door de korte spoel loopt.

3. *(a)* De afleiding is behandeld op het college.
(b) Vul in, en zie dat 't klopt mits $v = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$.
(c) $\vec{B} = -(1/v)f(x - vt)\hat{y}$.

4. Zie collegedictaat en/of Griffiths.

3 februari 1999

1. *(a)* $\vec{E} = E(R)\hat{R}$; $E(R) = 0$ voor $R > b$; $E(R) = Q/2\pi\varepsilon_0 RL$ voor $a < R < b$; $E(R) = QR/2\pi\varepsilon_0 a^2 L$ voor $R < a$.
   (b) $U = (Q^2/4\pi\varepsilon_0 L)(\ln(b/a) + 1/4)$
   (c) $V = (Q/2\pi\varepsilon_0 L)(\ln(b/a) + 1/2)$, onafhankelijk van z omdat $\vec{E}$ radieel gericht is.

2. *(a)* gebruik de wet van Ampére: $B = \mu_0\sigma v$
   (b) de magnetische kracht staat loodrecht op de platen en naar buiten gericht; $F_m = \frac{1}{2}\mu_0 Q\sigma v^2$ (let op de factor een half!).
   (c) $F_e = \frac{1}{2}Q\sigma/\varepsilon_0$, tegengesteld aan F_m; de totale kracht is nul als $v = c$.

3. *(a)* $\vec{E} = (q/4\pi\varepsilon_0 r^2)\hat{r}$; $\vec{B} = 0$
   (b) $\rho = q\delta(\vec{r})$ (puntlading in de oorsprong); $\vec{j} = 0$
   (c) $\Phi' = \Phi - \partial\chi/\partial t = q/4\pi\varepsilon_0 r$ voor $\chi = -qt/4\pi\varepsilon_0 r$

4. *(a)* $\alpha^0 = d\eta^0/d\tau$
   (b) $\alpha^0 = \gamma^2(\vec{v}\cdot\vec{a})/c$; $\vec{\alpha} = \gamma^2\vec{a} + \gamma^4(\vec{v}\cdot\vec{a})\vec{v}/c^2$
   (c) inproduct van α^μ en η^μ is $\alpha^0\eta^0 - \vec{\alpha}\cdot\vec{\eta} = 0$

7 juni 1999

1. *(a)* binnen de bol: $\vec{E} = \hat{r}Qr/(4\pi\varepsilon_0 a^3)$; buiten de bol: $\vec{E} = \hat{r}Q/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$
   (b) binnen de bol: $\Phi = -Qr^2/(8\pi\varepsilon_0 a^3)$; buiten de bol: $\Phi = (1 - 3r/2a)Q/(4\pi\varepsilon_0 r)$
   (c) $\vec{E} = (\vec{r}_- - \vec{r}_+)/(4\pi\varepsilon_0 a^3)$

2. *(a)* $\vec{E} = bA_0\hat{y}\cos(ax - bt)$, $\vec{B} = aA_0\hat{z}\cos(ax - bt)$
   (b) $\rho = 0$, $\mu_0\vec{j} = (a^2 - b^2\varepsilon_0\mu_0)A_0\hat{y}\sin(ax - bt)$
   (c) $a^2 = b^2\varepsilon_0\mu_0$, of $c|a| = |b|$
   (d) neen, want als $\vec{A} = 0$ dan ook $\vec{B} = 0$, maar $\vec{B} \neq 0$

3. *(a)* energiedichtheid: $\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2$; impulsdichtheid: $\frac{1}{2}c^{-1}\varepsilon_0 E_0^2\hat{x}$
   (b) $c \times \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2$
   (c) veronderstel een oppervlakte van circa $1\,\mathrm{m}^2$. Dan is de kracht $F = 1\,\mathrm{m}^2 \times \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 = 1\,\mathrm{m}^2 \times 1300\,\mathrm{W/m^2}c^{-1} \approx 4\cdot 10^{-6}\mathrm{Nm}^{-2}$. Dit komt overeen met een gewicht van 0.4 milligram, dus onvoelbaar weinig.

4. *(a)* $\vec{E}' = \gamma(1 - v/c)\vec{E}$, $\vec{B}' = \gamma(1 - v/c)\vec{B}$
   (b) $\omega' = \gamma\omega(1 - v/c)$, $k' = \gamma k(1 - v/c)$
   (c) $c' = \omega'/k' = \omega/k = c$

24 januari 2000

1. *(a)* $\Phi = (4\pi\varepsilon_0 r^3)^{-1}\vec{p}\cdot\vec{r}$, $\vec{E} = (4\pi\varepsilon_0 r^3)^{-1}(3\hat{r}\hat{r}\cdot\vec{p} - \vec{p})$
   (b) $\vec{E} = -\hat{x}(qd/4\pi\varepsilon_0)(z^2 + d^2/4)^{-3/2}$
   (c) $\vec{E} \to -\hat{x}(qd/4\pi\varepsilon_0)z^{-3}$

2. *(a)* $\vec{B} = \mu_0 nI\hat{z}$ voor $R < a$ en $\vec{B} = 0$ voor $R > a$; de flux is $\mu_0 nI\pi a^2$
   (b) $\nabla\cdot\vec{A} = 0$, $\nabla\times\vec{A} = \vec{B}$
   (c) $\vec{A} = \hat{\phi}\mu_0 nIa^2/2R$ voor $R > a$ (gebruik dat de kringintegraal van de vectorpotentiaal gelijk is aan de omvatte flux)
   (d) neen, dat kan niet, want dan zou de omvatte flux gelijk zijn aan nul

3. *(a)* $\nabla \cdot \vec{B} = \partial B_x/\partial x = 0$, dus B kan niet afhangen van x
het magneetveld voldoet aan de golfvergelijking in vacuum, dus voor $B(y)$ vind je $d^2B/dy^2 = (k^2 - \omega^2/c^2)B$
de randvoorwaarde op het elektrische veld is $E_z = 0$ voor $y = 0$ of $y = b$; omdat $\partial E_z/\partial t = -c^2\partial B_x/\partial y$ volgt dat randvoorwaarde voor $B(y)$ gegeven is door $dB/dy = 0$ voor $y = 0$ en $y = b$
(b) $B(y) = B_0 \cos(n\pi y/b)$, $k^2 = (\omega/c)^2 - (n\pi/b)^2$, $\omega_c = \pi c/b$

4. *(a)* $(ct, \vec{r})$ is een viervector, de eigentijd $\tau = t/\gamma$ is invariant, dus $(\gamma c, d\vec{r}/d\tau)$ is een viervector
(b) zie Griffiths § 12.3.4; de nulde component is ρc

10 maart 2000

1. *(a)* $\vec{E} = 0, \hat{r}Q(4\pi\varepsilon_0 r^2)^{-1}, 0$ voor, respectievelijk, $r < a$, $a < r < b$, $r > b$
(b) $V = Q(4\pi\varepsilon_0 ab)^{-1}(b - a)$
(c) energie $= QV/2 = Q^2(8\pi\varepsilon_0 ab)^{-1}(b - a)$

2. *(a)* let op dat niet alle veldlijnen door beide ringen gaan; $\vec{B}_0 \to \vec{B}_0/2$
(b) $\vec{B}_0 = \hat{z}8\mu_0 Ia^2/d^3$
(c) $\vec{B}_0 = \hat{z}\mu_0 Ia^2(a^2 + d^2/4)^{-3/2}$

3. zie Griffiths § 7.3.2

4. de magnetostatische analogie gaat niet op omdat een bewegende puntlading geen statische situatie is; de gevonden formule is bij benadering goed als de snelheid v veel kleiner is dan de lichtsnelheid

5. *(a)* $(V/c, \vec{A})$ transformeert als een viervector, dus net als $(ct, \vec{r})$
(b) de Lorentzijk is het inproduct van twee viervectoren, $(V/c, \vec{A})$ en $(-\partial/\partial ct, \partial/\partial\vec{r})$, en zo'n inproduct is invariant onder Lorentztransformatie
(c) het rechterlid bevat de viervector $(c\rho, \vec{j})$, het linkerlid bevat de viervector $(V/c, \vec{A})$ alsmede de d'Alembertiaan, die invariant is onder Lorentztransformatie; linker- en rechterlid transformeren dus op dezelfde wijze onder Lorentztransformatie, dus de golfvergelijkingen hebben in elk inertiaalstelsel dezelfde vorm

15 januari 2001

1. *(a)* $Q = (2/3)\pi CLa^3$, dimensie van C is Coulomb per m^4
(b) $R < a$: $\vec{E} = \hat{r}CR^2/3\varepsilon_0$; $R > a$: $\vec{E} = \hat{r}Ca^3/3\varepsilon_0 R$
(c) $E \propto 1/R$ voor $R > a$, dus de integraal $\int_a^\infty E^2\, RdR$ divergeert; om een eindig antwoord te verkrijgen moet je een cylinder van eindige lengte nemen

2. *(a)* $\vec{B}_1 = (\mu_0/4\pi)I_1 \oint_{C_1} r_l^{-3} d\vec{l}_1 \times \vec{r}_l$
(b) $\vec{F}_{12} = \int \vec{j} \times \vec{B}_1\, d\vec{r} = I_2 \oint_{C_2} d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1$
(c) $\vec{F}_{12} = -(\mu_0/4\pi)I_1 I_2 \oint_{C_1}\oint_{C_2} d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2\, \vec{r}_l r_l^{-3} +$ rest, waarbij de "rest term" gegeven is door rest $= (\mu_0/4\pi)I_1 I_2 \oint_{C_1}\oint_{C_2} d\vec{l}_1\, (d\vec{l}_2 \cdot \vec{r}_l) r_l^{-3}$. Die rest term is nul, omdat $\oint_{C_2} d\vec{l}_2 \cdot \vec{r}_l r_l^{-3} = -\oint_{C_2} d\vec{l}_2 \cdot \nabla r_l^{-1} = 0$. Dus wat overblijft is een uitdrukking voor $\vec{F}_{12}$ die voldoet aan de derde wet van Newton, $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.

3. *(a)* $c = (\varepsilon_0\mu_0)^{-1/2}$
(b) ga uit van een vlakke golf in de x-richting en gebruik dat de divergentie van $\vec{E}$

en $\vec{B}$ gelijk is aan nul om aan te tonen dat de golf geen component in de x-richting kan hebben
(c) $\vec{E}$ en $\vec{B}$ staan loodrecht op elkaar en op de voortplantingsrichting, met grootte $E = cB$

4. *(a)* $v'_x = (v_x - v_R)(1 - v_R v_x/c^2)^{-1}$, $v'_y = (v_y/\gamma)(1 - v_R v_x/c^2)^{-1}$, $v'_z = (v_z/\gamma)(1 - v_R v_x/c^2)^{-1}$
(b) neen, voor een viervector zouden de y en z componenten niet mogen veranderen
(c) $v'_x = -v_R$, $v'_y = c/\gamma = (c^2 - v_R^2)^{1/2}$, $v'_z = 0$, dus $(v'_x)^2 + (v'_y)^2 + (v'_z)^2 = c^2$

2 maart 2001

1. *(a)* $I = (2\pi/3)Ca^3$, dimensie van C is Ampère per m^3
(b) $R < a$: $\vec{B} = \hat{\phi}(\mu_0/3)CR^2$; $R > a$: $\vec{B} = \hat{\phi}(\mu_0/3)Ca^3/R$
(c) $B \propto 1/R$ voor $R > a$, dus de integraal $\int_a^\infty B^2\, RdR$ divergeert

2. *(a)* $\vec{B} = -2A_0\hat{z}$
(b) $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\chi$ met $\chi = A_0xy$; χ is tijdsonafhankelijk, dus Φ verandert niet
(c) Hetzelfde als in onderdeel *(a)*, met een tijdsafhankelijke A_0

3. *(a)* $\vec{E}_0'' + R^{-1}\vec{E}_0' = (k^2 - \omega^2/c^2)\vec{E}_0$; evenzo voor $\vec{B}_0$; randvoorwaarden: de z en ϕ componenten van $\vec{E}_0$ en de R component van $\vec{B}_0$ zijn nul voor $R = a$
(b) de divergentie van $\vec{E}$ is nul, dus $d(RE_R)/dR = 0$, dus $E_R = 0$
(c) $\vec{E}_0(R) = \hat{\phi}J_0(R\sqrt{\omega^2/c^2 - k^2})$; de dispersierelatie is gegeven door de vergelijking $J_0(a\sqrt{\omega^2/c^2 - k^2}) = 0$

4. *(a)* vul de Lorentztransformatie van $\vec{E}$ en $\vec{B}$ in en werk uit
(b) laat zien dat het inproduct $\vec{E} \cdot \vec{B}$ invariant is onder Lorentztransformatie
(c) neen, want dan zou $E^2 - c^2B^2$ van teken veranderen

16 januari 2002

1. *(a)* De afleiding is behandeld op het college.
(b) $|\mu| = Iw^2\sqrt{2}$, in het y-z vlak, onder een hoek van 45° met de y-as.

2. *(a)* Gebruik dat div $\vec{f} = 0$; dan is het dezelfde afleiding als de afleiding op het college dat de magnetische monopool $\int d\vec{r}\,\vec{B}(\vec{r})$ nul is omdat div $\vec{B} = 0$.
(b) $\vec{A}(\vec{r}, t) = (\mu_0/4\pi)\int d\vec{r}'\,\vec{f}(\vec{r}')(t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c)|\vec{r} - \vec{r}'|^{-1}$
(c) retardatie heeft geen effect omdat $\int d\vec{r}'\,\vec{f}(\vec{r}')(t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c)|\vec{r} - \vec{r}'|^{-1} = \int d\vec{r}'\,\vec{f}(\vec{r}')t|\vec{r} - \vec{r}'|^{-1}$, gebruik makend van het resultaat uit onderdeel *(a)*.
(d) $\Phi = 0$ want $\rho = 0$, dus $\vec{E} = -\partial\vec{A}/\partial t$ is onafhankelijk van t.

3. *(a)* $u_{\text{elektrisch}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0E^2$, $u_{\text{magnetisch}} = (1/2\mu_0)B^2$, $\vec{S} = (1/\mu_0)\vec{E} \times \vec{B}$.
(b) $\mu_0 \operatorname{div}\vec{S} = \operatorname{div}\vec{E} \times \vec{B} = (\nabla \times \vec{E}) \cdot \vec{B} - (\nabla \times \vec{B}) \cdot \vec{E} = -(1/\mu_0)\vec{j} \cdot \vec{E} = 0$ in vacuüm.
(c) $-\operatorname{div}\vec{S} = \vec{j} \cdot \vec{E} =$ de arbeid per tijdseenheid die het elektromagnetische veld verricht op lading en stroom; volgens de wet van behoud van energie is dit de toename van de mechanische energie $u_{\text{mechanisch}}$; dus voor tijdsonafhankelijke velden geldt $\partial u_{\text{mechanisch}}/\partial t = -\operatorname{div}\vec{S}$.

4. *(a)* $E'_x = E_x$, $E'_y = \gamma E_y$, $E'_z = \gamma E_z$
(b) $\vec{B}' = -(1/c^2)\vec{v} \times \vec{E}'$
(c) vul de Lorentztransformatie in en laat zien dat $\vec{E}' \cdot \vec{B}' = \vec{E} \cdot \vec{B}$

1 maart 2002

1. *(a)* $r > a$: $\Delta V = -(q/\varepsilon_0)\delta(x-d)\delta(y)\delta(z)$; $V = 0$ voor $r = a$.
   (b) $4\pi\varepsilon_0 V = q'(a^2 + L'^2 - 2xL')^{-1/2} + q(a^2 + L^2 - 2xL)^{-1/2}$
   (c) $L' < a$, dus aan de differentiaalvergelijking voor $r > a$ is voldaan; invullen levert op dat $V = 0$ voor $r = a$, dus ook aan de randvoorwaarde is voldaan; dus is de potentiaal van *(b)* met deze keuze van q' en L' een oplossing.

2. *(a)* $\vec{A}(0) = (\mu_0 I/4\pi)\oint_C dl\,\hat{u}/r$, met $\hat{u}$ een tangentiële eenheidsvector langs de stroomkring C en r de afstand van een punt op de stroomkring tot de oorsprong.
   (b) alleen de twee rechte stukken dragen bij; $\vec{A}(0) = \hat{x}(\mu_0 I/4\pi)2\ln(b/a)$.
   (c) $\vec{\mu} = \hat{z}I \times \text{oppervlak} = \hat{z}(\pi I/2)(b^2 - a^2)$.

3. *(a)* $\vec{E} = -\nabla V - \partial\vec{A}/\partial t = \omega A_0 \hat{y}\cos(kx - \omega t)$;
   $\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = kA_0\hat{z}\cos(kx - \omega t)$.
   (b) $\nabla \times \vec{B} = \varepsilon_0\mu_0\partial\vec{E}/\partial t \Rightarrow k^2 = \varepsilon_0\mu_0\omega^2$.
   (c) Neen, want dan zou $\vec{B}$ nul moeten zijn.

4. *(a)* $\vec{F}_{\mathrm{B}} = \hat{y}\,q_{\mathrm{A}}q_{\mathrm{B}}/(4\pi\varepsilon_0 d^2)$.
   (b) $\vec{F}'_{\mathrm{B}} = \gamma\vec{F}_{\mathrm{B}}$.
   (c) $\vec{F}'_{\mathrm{A}} = -\hat{y}\,q_{\mathrm{A}}q_{\mathrm{B}}/(4\pi\varepsilon_0 d^2) \neq -\vec{F}'_{\mathrm{B}} \Rightarrow$ derde wet van Newton geldt niet in de relativistische mechanica.

20 januari 2003

1. *(a)* $\operatorname{div}\vec{B} = 0 \Rightarrow a + 2b = 0$.
   (b) $\mu_0\vec{j} = \operatorname{rot}\vec{B} = -ax\hat{z}$.
   (c) probeer $\vec{A} = f(x,y)\hat{z}$ en gebruik $\operatorname{rot}\vec{A} = \vec{B}$; je vindt dan $f(x,y) = axy^2/2$.
   (d) $\operatorname{div}\vec{A} = 0$, dus $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{A}) = -\Delta\vec{A} = \operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j}$.

2. *(a)* De verplaatsing van het molekuul komt overeen met een translatie over een vector $\vec{R}$; het dipoolmoment vóór de translatie is $\vec{p} = \int \vec{r}\rho(\vec{r})d\vec{r}$; na de translatie is het dipoolmoment $\vec{p}' = \int(\vec{r} - \vec{R})\rho(\vec{r})d\vec{r}$; gebruik nu dat het molekuul neutraal is, d.w.z. $\int\rho(\vec{r})d\vec{r} = 0$; dan geldt $\vec{p} = \vec{p}'$.
   (b) Er zijn twee elektrische velden, het veld van de condensator (met potentiaal V) en het veld van de dipool; de krachten (en dus ook de arbeid) tengevolge van beide velden zijn onafhankelijk bij elkaar op te tellen; de verplaatsing in het dipoolveld is nul, dus er is geen arbeid tengevolge van het dipoolveld; de verplaatsing in het condensatorveld is niet nul, dus die arbeid moeten we wel meenemen.
   Een ladingselementje $dq = \rho(\vec{r})d\vec{r}$ ter plaatse $\vec{r}$ heeft een potentiële energie $V(\vec{r})dq$ in het condensatorveld; omdat de potentiaal nul is in het oneindige is deze potentiële energie gelijk aan de verrichtte arbeid; de totale arbeid is dan gegeven door de integraal $\int V(\vec{r})\rho(\vec{r})d\vec{r}$.
   (c) $W = \int\rho(\vec{r})[V(\vec{r}_0) + (\vec{r} - \vec{r}_0)\cdot\nabla V(\vec{r}_0) + \cdots] = -\vec{p}\cdot\vec{E}(\vec{r}_0) + \cdots$; de puntjes $\cdots$ geven hogere orde termen in de Taylorreeksontwikkeling aan; deze zijn verwaarloosbaar als de potentiaal langzaam varieert over de afmeting van het molekuul.

3. *(a)* $\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\nabla \times (\partial\vec{B}/\partial t) \Rightarrow \nabla(\nabla\cdot\vec{E}) - \Delta\vec{E} = -(\partial/\partial t)(\nabla \times \vec{B})$; vervolgens MI en MIV invullen geeft de inhomogene golfvergelijking.
   (b)
   $$-\Delta\vec{B} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{B} = \mu_0\nabla \times \vec{j}$$

(c)

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{1}{4\pi}\int d\vec{r}'\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'}\left[\varepsilon_0^{-1}(\nabla\rho)(\vec{r}',t_R) + \mu_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{j}(\vec{r}',t_R)\right]$$

Hier is $t_R = t - |\vec{r}-\vec{r}'|/c$ de geretardeerde tijd.
(d) De derde term tussen vierkante haken staat al in de algemene oplossing; het gaat dus om de eerste twee termen; de kettingregel leert ons dat

$$\frac{\partial}{\partial\vec{r}'}\rho(\vec{r}',t_R) = (\nabla\rho)(\vec{r}',t_R) + \frac{\partial\rho}{\partial t_R}\frac{\partial t_R}{\partial\vec{r}'}$$

hieruit volgt

$$(\nabla\rho)(\vec{r}',t_R) = \frac{\partial}{\partial\vec{r}'}\rho(\vec{r}',t_R) - \frac{\partial\rho}{\partial t}\frac{1}{c}\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Substitutie in de algemene oplossing en partiële integratie levert dan de Jefimenko vergelijking op.

4. *(a)* $\vec{E}' = \gamma v_0 B_0\hat{z}$, $\vec{B}' = \gamma B_0\hat{y}$
(b) $\vec{F}' = q\vec{E}' = q\gamma v_0 B_0\hat{z}$
(c) Er is geen fundamenteel verschil tussen elektrische en magnetische krachten. In het ruststelsel is er alleen een elektrische kracht; als we transformeren naar een stelsel waarin de lading beweegt, dan verandert de elektrische kracht in een magnetische kracht.
(d) voor de z-component vinden we

$$F_z' = \frac{dp_z'}{dt'} = \frac{dp_z}{\gamma(dt - dx v_0/c^2)} = \frac{dp_z/dt}{\gamma(1 - v_x v_0/c^2)} = \gamma F_z$$

de x-component geeft

$$F_x' = \frac{dp_x'}{dt'} = \frac{\gamma(dp_x - E v_0/c^2)}{\gamma(dt - dx v_0/c^2)} = \frac{F_x - (\vec{v}\cdot\vec{F})v_0/c^2}{1 - v_x v_0/c^2} = 0$$

evenzo vinden we $F_y' = 0$.

23 april 2003

1. *(a)* De twee matrices zijn elkaars inverse.
(b) $U = \frac{1}{2}\sum_{ij}^N P_{ij}Q_iQ_j$.
(c) $\partial U/\partial Q_i = \sum_j P_{ij}Q_j = \sum_j S_{ij}Q_j$, dus de matrices S en P zijn aan elkaar gelijk, dus P is symmetrisch, dus C is ook symmetrisch.
(d) Stel $Q_1 = 0$, dan is $V_2 \approx Q_2/4\pi\varepsilon_0 R$. Dus $P_{21} = 1/4\pi\varepsilon_0 R = P_{12}$.

2. *(a)* Schrijf de vergelijking in integrale vorm om ladingsbehoud aan te tonen.
(b) $\partial u/\partial t + \nabla\cdot\vec{j}_u = 0$, met $\vec{j}_u = \mu_0^{-1}\vec{E}\times\vec{B}$ de energiestroomdichtheid en $u = u_{\text{mechanisch}} + \frac{1}{2}\varepsilon_0|\vec{E}|^2 + (1/2\mu_0)|\vec{B}|^2$ de energiedichtheid.
(c) $\varepsilon_0\vec{E}\times\vec{B}$ is the elektromagnetische impulsdichtheid, die samen met de mechanische impuls behouden is.

3. *(a)* de algemene oplossing luidt

$$V(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}',t-|\vec{r}-\vec{r}'|/c)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,d\vec{r}'$$

invullen levert de gevraagde vergelijking op, met $k = \omega/c$.
(b) de term $e^{-ik|\vec{r}-\vec{r}'|}$ beschrijft de retardatie; deze term is ongeveer gelijk aan 1 als $kR \ll 1$, met R de afstand van waarnemer tot trillende lading; dus als $\omega \ll c/R$.
(c) voor $r \gg r'$ kun je benaderen $|\vec{r}-\vec{r}'| \approx r - r'\cos\theta$, met θ de hoek tussen $\vec{r}$ en $\vec{r}'$; invullen levert op dat $V \approx (4\pi\varepsilon_0 r)^{-1}e^{-ikr}\int\rho(\vec{r}')e^{-ikr'\cos\theta}d\vec{r}'$; de amplitude van deze oscillerende potentiaal neemt af $\propto 1/r$. Het elektrische veld $\vec{E} = -\nabla V$ neemt ook af $\propto 1/r$, omdat je de term $\exp(-ikr)$ kunt differentiëren zonder een extra $1/r$ te krijgen. Een elektromagnetisch veld dat afvalt als $1/r$ (i.pl.v. als $1/r^2$) noemt men straling, omdat de totale uitgestraalde energie niet van de afstand afhangt.

4. *(a)* Een viervector transformeert via een Lorentztransformatie bij verandering van inertiaalstelsel. De totale lading is behouden, dus transformeert niet volgens een Lorentztransformatie.
(b) $\rho' = \gamma\rho = \rho/\sqrt{1-v^2/c^2}$; de zijde van de kubus is met een factor $1/\gamma$ korter geworden (Lorentzcontractie), dus de verandering van de totale lading is nul.
(c) Deze vergelijking kan geschreven worden als het inproduct van twee viervectoren $(c\rho,\vec{j})$ en $(c^{-1}\partial/\partial t, -\partial/\partial\vec{r})$ en is dus invariant onder Lorentztransformatie.

19 januari 2004

1. *(a)* wet van Gauss: $\vec{E} = \hat{R}\lambda/2\pi\varepsilon_0 R$
(b) integreren van de algemene oplossing van de Poissonvergelijking:
$\vec{E} = \hat{x}(\lambda/4\pi\varepsilon_0)\int_{-L/2}^{L/2}dz'\,x(x^2+z'^2)^{-3/2} = \hat{x}(\lambda/4\pi\varepsilon_0)(L/x)(x^2+L^2/4)^{-1/2}$
voor $L\to\infty$ vind je het Coulombveld van een lading λL.
(c) in cylindercoördinaten: $\vec{E} = \hat{R}(\lambda/4\pi\varepsilon_0)(L/R)(R^2+L^2/4)^{-1/2}$

2. *(a)* ijktransformatie $\vec{A}\to\vec{A}+\nabla\chi \Rightarrow U_M \to U_M - \frac{1}{2}\int\chi\nabla\cdot\vec{j}\,d\vec{r} = U_M$
omdat $\nabla\cdot\vec{j} = 0$ in een tijdsonafhankelijk probleem.
(b) $U_M = \frac{1}{2}\int|B(\vec{r})|^2/\mu(\vec{r})\,d\vec{r}$
(c) $B = \mu IN/L \Rightarrow U_M = \frac{1}{2}\pi a^2\mu N^2I^2/L$

3. *(a)* vlakke golf die zich voorplant in de z-richting: $\nabla\cdot\vec{E}(z,t) = 0 \Rightarrow E_z = 0$; evenzo, $B_z = 0$.
(b) de Maxwellvergelijkingen in de Lorentzijk leiden tot de golfvergelijking met golfsnelheid $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$.
(c) $c|\vec{B}| = \vec{E} \to \frac{1}{2}\varepsilon_0|\vec{E}|^2 = |\vec{B}|^2/2\mu_0$, dus de elektrische en magnetische energiedichtheden zijn gelijk.

4. *(a)* $\lambda' = \lambda/\gamma$, omdat de totale lading van de draad niet verandert maar de lengte in stelsel S een factor $1/\gamma$ kleiner is dan in stelsel S' (Lorentzcontractie).
(b) $\vec{E}(\vec{r}') = \gamma\vec{E}'(\vec{r}') = \gamma\lambda'\hat{R}'/2\pi\varepsilon_0 R'$; nu is $\gamma\lambda' = \lambda$ en $\vec{R}' = \vec{R}$ (omdat $\vec{R}$ loodrecht op de bewegingsrichting staat); dus $\vec{E}(\vec{r}) = \lambda\hat{R}/2\pi\varepsilon_0 R$; er is geen relativistische afhankelijkheid van de snelheid omdat het eigenlijk een probleem uit de elektrostatica is (de ladingsdichtheid is tijdsonafhankelijk).
(c) $\vec{B}' = 0$, dus $\vec{B}(\vec{r}') = (\gamma/c^2)\vec{v}\times\vec{E}' = \mu_0\vec{v}\times\hat{R}/2\pi R = \mu_0\lambda v\hat{\phi}/2\pi R$; dit is gewoon het magnetostatische veld van een stroom $I = \lambda v$.

23 februari 2004

1. *(a)* Wet van Ampére geeft $\vec{B} = \hat{\phi}\mu_0 I/2\pi R$ in cylindercoördinaten.
(b)

$$\vec{B}(\vec{r}) = (\mu_0 I/4\pi)\int_{-L/2}^{L/2}\frac{d\vec{z}\times(\vec{r}-\vec{z})}{|\vec{r}-\vec{z}|^3}$$

hier is $d\vec{z} = \hat{z}dz$ een integratie-element langs de draad.
(c) voor $\vec{r} = \vec{x}$ geldt $d\vec{z}\times(\vec{r}-\vec{z}) = \hat{y}x dz$ en $|\vec{r}-\vec{z}| = \sqrt{x^2+z^2}$, dus $\vec{B} = (\mu_0 I/4\pi)\hat{y}\int_{-L/2}^{L/2} dz\, x(x^2+z^2)^{-3/2} = (\mu_0 I/4\pi)\hat{y}(L/x)(x^2+L^2/4)^{-1/2}$.

2. *(a)* $\Phi(0,0,z) = (q/4\pi\varepsilon_0)[|z-d/2|^{-1} - |z+d/2|^{-1}]$
(b) de Taylorreeks geeft $|z\pm d/2|^{-1} = |z|^{-1}(1\mp d/2z+\cdots)$; dus de gezochte benadering is $\Phi(0,0,z)\approx(q/4\pi\varepsilon_0)|z|^{-1}d/z$. De potentiaal valt af $\propto z^{-2}$.
(c) $E_z = -d\Phi/dz = (q/4\pi\varepsilon_0)(2d/z^3)\,\mathrm{sign}(z)$; de x en y-componenten zijn nul vanwege de symmetrie.

3. *(a)* $\nabla\times\vec{E}$ ligt in het $x-y$ vlak als $\vec{E}$ in de z-richting wijst, dus $\partial B_z/\partial t = 0$. Omdat alleen tijdsafhankelijke velden bijdragen tot de elektromagnetische golf, mogen we B_z gelijk stellen aan nul.
(b) $\nabla\times(\nabla\times\vec{E}) = -\Delta\vec{E} = -\varepsilon(x,y)\mu_0\partial^2\vec{E}/\partial t^2$; hier hebben we gebruikt dat $\nabla\cdot\vec{E} = 0$ en dat $\vec{j} = 0$; in de complexe notatie wordt $\partial^2/\partial t^2\to-\omega^2$, dus $\Delta\vec{\mathcal{E}}+\omega^2\varepsilon(x,y)\mu_0\vec{\mathcal{E}}=0$.
(c) Omdat $\nabla\times\vec{\mathcal{E}} = -i\omega\vec{\mathcal{B}}$, geldt dat $\vec{S} = (i/\omega\mu_0)\vec{\mathcal{E}}\times(\nabla\times\vec{\mathcal{E}})$. Vul in $\vec{\mathcal{E}} = (0,0,\mathcal{E}(x,y))$ en je vindt $\vec{\mathcal{E}}\times(\nabla\times\vec{\mathcal{E}}) = \mathcal{E}\nabla\mathcal{E} = \nabla|\vec{\mathcal{E}}|^2/2$.

4. *(a)* Een viervector transformeert onder verandering van inertiaalstelsel volgens de Lorentztransformatie (dus net zo als ruimte en tijd).
(b) Vanwege de Lorentzcontractie is $\rho = \gamma\rho_0$, waarbij ρ_0 de ladingsdichtheid in het ruststelsel is. Dus $\vec{j} = \gamma\vec{v}\rho_0 = \vec{\eta}\rho_0$, met $\vec{\eta}$ de eigensnelheid. Hieruit volgt de relatie $(c\rho,\vec{j}) = \rho_0(\gamma c,\vec{\eta})$.
(c) Het is het inprodukt van de twee viervectoren $(c\rho,\vec{j})$ en $(-\partial/\partial ct,\nabla)$ en dus relativistisch invariant.

17 januari 2005

1. *(a)* $\vec{E} = (Q/2\pi\epsilon_0 LR)\hat{R}$ voor $a<R<b$ en $\vec{E} = 0$ voor $R>b$.
(b) $V = \int_a^b \vec{E}\cdot\hat{R}dR = (Q/2\pi\epsilon_0 L)\ln(b/a)$; binnenste cylinder heeft hoogste potentiaal.
(c) $\vec{B} = (\mu_0 I/2\pi R)\hat{\phi}$ voor $a<R<b$ en $\vec{B} = 0$ voor $R>b$;
(d) $\vec{A} = -(\mu_0 I/2\pi)\ln(R/a)\hat{z}$ voor $a<R<b$ en $\vec{A} = -(\mu_0 I/2\pi)\ln(b/a)\hat{z}$ voor $R>b$.

2. *(a)* De afleiding is dezelfde als in vacuüm.
(b) $dE/dz = -i\omega B$, $-dB/dz = \mu_0(\sigma-i\epsilon_0\omega)E$, dus $E'' = \gamma^2\omega^2E$ met $\gamma = (-\epsilon_0\mu_0+i\mu_0\sigma/\omega)^{1/2}$.
(c) $E(z) = E_0e^{\pm\gamma\omega z}\Rightarrow\vec{E}(\vec{r},t) = \hat{x}E_0e^{-\alpha\omega z}\cos[\omega(t-\beta z)]$.
(d) fasesnelheid is $1/\beta$; indringdiepte is $1/\alpha\omega$.

3. *(a)* $\vec{A}' = \vec{A}+\nabla\chi$ met $\nabla\times\vec{A}' = \nabla\times\vec{A}$ impliceert dat $\Delta\chi = 0$. De enige oplossing met $\nabla\chi\to0$ als $\vec{r}\to\infty$ is $\chi(\vec{r},t) = f(t)$. We hebben nu al dat $\vec{A}' = \vec{A}$. Omdat $V' = V - df/dt$ moet $df/dt = 0$ zijn (anders zou V' niet naar nul gaan in het

oneindige). Dus ook $V' = V$.
(b) $\Delta V = -\rho/\epsilon_0$, $\Delta\vec{A} - \epsilon_0\mu_0\partial^2\vec{A}/\partial t^2 = -\mu_0\vec{j} + \epsilon_0\mu_0\nabla\partial V\partial t$.
(c) Als $\rho = 0$ dan is $\Delta V = 0$, dus $V = 0$ (omdat $V = 0$ in het oneindige). Het elektrische veld $\vec{E} = -\partial\vec{A}/\partial t$ hoeft niet nul te zijn (omdat $\vec{A} \neq 0$ kan zijn).

4. *(a)* $E'_z = \gamma E_0(1 - v/c)\cos(kx - \omega t)$, $B'_y = -\gamma(E_0/c)(1 - v/c)\cos(kx - \omega t)$; alle andere componenten zijn nul.
(b) $kx - \omega t = k'x' - \omega' t'$, met $k' = \gamma k(1 - v/c)$ en $\omega' = \gamma\omega(1 - v/c)$.
(c) $\omega' < \omega$ als $v > 0$, dus als je met de golf meebeweegt en $\omega' > \omega$ als $v < 0$, dus als je tegen de golf in beweegt.

16 februari 2005

1. *(a)* $\vec{E} = -\nabla V = \hat{r}(Ze/4\pi\epsilon_0 r)e^{-r/a}(1/r + 1/a)$.
(b) de totale lading in een bol met straal r rond het atoom is gegeven door $Q(r) = 4\pi\epsilon_0 r^2 E(r) = Ze(1 + r/a)e^{-r/a}$; voor $r \to \infty$ gaat deze lading naar nul, dus het atoom is neutraal.
(c) $\rho(\vec{r}) = \epsilon_0\nabla\cdot\vec{E} = -(Ze/4\pi r a^2)e^{-r/a}$.

2. *(a)* $\int\vec{A}\cdot d\vec{l} = \Phi$, dus $\vec{A}(\vec{r}) = \hat{\phi}\Phi/2\pi R$ voor $R > a$; $\vec{B} = \nabla\times\vec{A} = \hat{z}R^{-1}d(RA)/dR = 0$.
(b) Als $\vec{A} = 0$ buiten de spoel, dan zou de omvatte flux nul zijn, wat in tegenspraak is met het gegeven.
(c) na partiële integratie vind je $\nabla\cdot\vec{A} = (\mu_0/4\pi)\int d\vec{r}'|\vec{r} - \vec{r}'|^{-1}\nabla\cdot\vec{j}(\vec{r}')$ en dit is gelijk aan nul omdat de divergentie van een tijdsonafhankelijke stroom nul is.

3. *(a)* gebruik $\nabla\times\vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t$, met als resultaat $B_y = E_x/c$ en $B_x = -E_y/c$ (met $c = \omega/k$).
(b) de energiestroomdichtheid is $S = \mu_0^{-1}\vec{E}\times\vec{B} = \hat{z}(\mu_0 c)^{-1}\sum_{i=1,2}[\mathrm{Re}\,E_i e^{i(kz-\omega t)}]^2$; schrijf $E_i = |E_i|e^{i\alpha_i}$ en middel over 1 periode; omdat het gemiddelde van cosinuskwadraat 1/2 is, volgt het resultaat $\langle S\rangle = \hat{z}(2\mu_0 c)^{-1}(|E_1|^2 + |E_2|^2)$.
(c) Als E_1 reëel is en $E_2 = iE_1$, dan geldt $E_x = E_1\cos(kz - \omega t)$ en $E_y = -E_1\sin(kz - \omega t)$, hetgeen de formule van een cirkel is (met straal E_1).

4. *(a)* $v'_x = (v_x - v_R)(1 - v_R v_x/c^2)^{-1}$, $v'_y = (v_y/\gamma)(1 - v_R v_x/c^2)^{-1}$, $v'_z = (v_z/\gamma)(1 - v_R v_x/c^2)^{-1}$
(b) neen, voor een viervector zouden de y en z componenten niet mogen veranderen
(c) $v'_x = -v_R$, $v'_y = c/\gamma = (c^2 - v_R^2)^{1/2}$, $v'_z = 0$, dus $(v'_x)^2 + (v'_y)^2 + (v'_z)^2 = c^2$

16 januari 2006

1. *(a)* De randvoorwaarde voor het elektrisch veld is dat de evenwijdige component continu is. Omdat het elektrisch veld nul is binnen in een geleider, moet de evenwijdige component nul zijn op het oppervlak, dus moet het elektrisch veld een rechte hoek maken met het oppervlak.
(b) $Q = \epsilon_0\int_S\vec{E}\cdot d\vec{S}$ en $V = \int_{\mathcal{L}}\vec{E}\cdot d\vec{l}$, in absolute waarde.
(c) $U = \frac{1}{2}\int\rho\Phi dV = (Q\Phi_1 - Q\Phi_2)/2 = QV/2$, waarbij 1 en 2 de twee geleiders aanduidt; eveneens geldt $U = (\epsilon_0/2)\int|\vec{E}|^2 dV$; gelijk stellen aan $CV^2/2$ en invullen van de uitdrukking voor C geeft de gevraagde gelijkheid.
(d) ga uit van de uitdrukking voor C, vermenigvuldig beide zijden met σ, dan staat er $\sigma C = \epsilon_0 I/V = \epsilon_0/R$, omdat $I = \sigma\int_S\vec{E}\cdot d\vec{S}$.

2. *(a)* $\partial\rho/\partial t = \nabla \cdot \vec{j} = 0$, dus ρ blijft nul.
(b) $\vec{A}(\vec{r},t) = (\mu_0/4\pi)\hat{y}\int dx' \int dy' f(t-r/c)/r$, waarbij $r = \sqrt{x'^2+y'^2+z^2}$; vanwege de translatieinvariantie is $\vec{A}$ onafhankelijk van x en y.
(c) In cylindercoördinaten: $\vec{A} = (\mu_0/2)\hat{y}\int_0^\infty RdR\, f(t-r/c)/r$, met $r = \sqrt{R^2+z^2}$; verander de integratievariable nu in $u = (r-|z|)/c \to du = (R/cr)dR$; de integratiegrenzen voor u zijn van 0 tot ∞.
(d) $\vec{B} = -\hat{x}dA/dz = -\hat{x}(\mu_0/2)(\operatorname{sign} z)\int du\, f'(t-|z|/c-u)$; de bovengrens geeft nul (omdat $f(-\infty) = 0$) en de ondergrens geeft $\vec{B} = \hat{x}(\mu_0/2)(\operatorname{sign} z) f(t-|z|/c)$; het elektrische veld volgt evenzo uit $\vec{E} = -\partial\vec{A}/\partial t = -\hat{y}(\mu_0 c/2) f(t-|z|/c)$.
(e) de velden zijn functies van $t-z/c$ boven de plaat en van $t+z/c$ onder de plaat; dit zijn golven die langs de positieve en negatieve z-as lopen met snelheid c.

3. *(a)* $(-\partial/\partial ct, \partial/\partial\vec{r})$ transformeert net zoals $(ct,\vec{r})$, dus als een viervector.
(b) zie college
(c) als $v = c$ staat er het inproduct van de viervector $(-\partial/\partial ct, \partial/\partial\vec{r})$ met zichzelf, hetgeen invariant is.

14 februari 2006

1. *(a)* $E_z(x) = \pm(\sigma_0/2\epsilon_0)\cos kx$ ($\pm$ is boven of onder de plaat)
(b) $\nabla\cdot\vec{E} = 0$ buiten de plaat, $\vec{E} = -\nabla\Phi$, dus $\nabla\cdot\nabla\Phi \equiv \Delta\Phi = 0$; randvoorwaarde: $\partial\Phi/\partial z = -E_z$ als $z \to 0$.
(c) $\Phi = f(z)\cos kx \Rightarrow f''(z) = k^2 f(z)$, randvoorwaarde: $f'(0) = \mp\sigma_0/2\epsilon_0$; oplossing $f(z) = (\sigma_0/2\epsilon_0)k^{-1}\exp(-k|z|)$

2. *(a)* $\nabla\times\nabla\vec{B} = -\Delta\vec{B} = \mu_0\nabla\times\vec{j} = -\lambda^{-2}\vec{B}$
(b) $\vec{B} = B_0\hat{z}\exp(-x/\lambda)$
(c) ideale geleider: $\partial\vec{B}/\partial t \to 0$ voor $x \gg \lambda$; supergeleider: $\vec{B} \to 0$ voor $x \gg \lambda$.

3. *(a)* arbeid verricht op 1 lading: $dW = q(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l} = q\vec{E}\cdot\vec{v}dt$, omdat $\vec{v} = d\vec{l}/dt$. Integreren over alle ladingen, met $q\vec{v} = \vec{j}d\vec{r}$, geeft $dW/dt = \int\vec{E}\cdot\vec{j}d\vec{r}$. Het magnetische veld staat loodrecht op de verplaatsing $d\vec{l}$ and verricht dus geen arbeid.
(b) $\vec{E} = (V/L)\hat{z}$, $\vec{B} = \hat{\phi}\mu_0 I/2\pi a$, Poyntingvector $\vec{j}_u = (1/\mu_0)\vec{E}\times\vec{B} = -\hat{R}VI/A$ (met A het oppervlak van de draad).
(c) $dU_{\text{mech}}/dt + dU_{\text{em}}/dt = -\oint\vec{j}_u\cdot d\vec{S} = VI = dU_{\text{mech}}/dt$ (want U_{em} is tijdsonafhankelijk); eveneens geldt $dW/dt = \int(V/L)(I/\pi a^2)d\vec{r} = VI = dU_{\text{mech}}/dt$.

4. *(a)* Transformatieregels invullen en uitwerken.
(b) Neen, tenzij $\vec{E}$ ook nul is. Immers, als $\vec{B} = 0$ en $\vec{E} \neq 0$, dan geldt dat $|\vec{E}|^2 - c^2|\vec{B}|^2 > 0$. Maar als $\vec{E}' = 0$ moet deze term ≤ 0 zijn, hetgeen een tegenstrijdigheid oplevert.
(c) Gegeven $\vec{E}\cdot\vec{B} = 0$, vul de transformatieregels in, werk uit en vind $\vec{E}'\cdot\vec{B}' = 0$.

22 januari 2007

1. *(a)* zie college
(b) omschrijven in integraalvorm
(c) $\nabla\cdot\vec{j} = j_0 e^{-atr^2}(3-2atr^2)$, integreren over t geeft $\rho = j_0 e^{-atr^2}(1/ar^2 - 2t)$ + constante.

2. *(a)* $-(d/dt)\int_{S(t)}\vec{B}\cdot d\vec{S} = -\int_S(\partial\vec{B}/\partial t)\cdot d\vec{S} - \oint_C\vec{B}\cdot(\vec{v}\times d\vec{l}) = \mathcal{E}(t)$.
(b) $I(t) = I_0 e^{-Rt/L}$
(c) de relaxatietijd is L/R, dus de hoogste frequentie die de stroomkring kan bijhouden is R/L.

3. *(a)* $\vec{E} = -\omega\vec{A}_0 \sin(kz - \omega t)$, $\vec{B} = k\sin(kz - \omega t)(A_{0y}, -A_{0x}, 0)$.
   (b) $\rho = -\varepsilon_0 \omega k A_{0z} \cos(kz-\omega t)$, $\vec{j} = (k^2/\mu_0)\cos(kz-\omega t)(A_{0x}, A_{0y}, 0) - \varepsilon_0\omega^2\vec{A}_0 \cos(kz-\omega t)$.
   (c) $\rho = 0 \Rightarrow A_{0z} = 0$, $\vec{j} = 0 \Rightarrow k^2/\mu_0 = \varepsilon_0\omega^2 \Rightarrow k = \omega/c$.

4. *(a)* zie college
   (b) $(x' \pm ct') = (x \pm ct)(1 \mp \beta)^{1/2}(1 \pm \beta)^{-1/2}$; invullen $\beta = (e^{\beta} + e^{-\beta})(e^{\theta} - e^{-\beta})^{-1}$ geeft de gevraagde vergelijkingen.
   (c) $\theta_{\text{totaal}} = \theta_1 + \theta_2 \Rightarrow \beta_{\text{totaal}} = (\beta_1 + \beta_2)(1 + \beta_1\beta_2)^{-1}$, oftewel $v_{\text{totaal}} = (v_1 + v_2)(1 + v_1 v_2/c^2)^{-1}$.

19 maart 2007

1. *(a)* $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, $\nabla \times \vec{B} = 0$
   (b) $\vec{E}' = \gamma\vec{v} \times \vec{B} = \gamma v b_0(y_0, x_0, 0)$
   (c) integreer $d\vec{l}\cdot\vec{E}$ langs een pad van $(0,0,0)$ eerst naar $(x_0, 0, 0)$, dan naar $(x_0, y_0, 0)$, en tenslotte naar (x_0, y_0, z); het resultaat is $\Phi = -\int d\vec{l} \cdot \vec{E} = -\gamma v b_0 x_0 y_0$.

2. *(a)* substitueer $\vec{E} = -\nabla\Phi - \partial\vec{A}/\partial t$ in $\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon_0$ en gebruik dan de ijkvergelijking om $\vec{A}$ te elimineren
   (b) de voortplantingsnelheid van deze golfvergelijking is v; de potentiaal op zichzelf is niet meetbaar en dus is een snelheid groter dan c niet verboden; alleen het elektrische (en magnetische) veld is meetbaar.
   (c) $\Phi(\vec{r}, t) = (4\pi\varepsilon_0)^{-1} \int d\vec{r}' \rho(\vec{r}', t_R)|\vec{r} - \vec{r}'|^{-1}$, met $t - t_R = |\vec{r} - \vec{r}'|/v$.

3. *(a)* neem de rotatie van MII en substitueer in MIV; $\kappa^2 = (\omega/c)^2(1 - i\sigma/\varepsilon_0\omega)$
   (b) schrijf $\kappa = a + ib$, met a en b reëel en $b > 0$; dan geldt $\mathcal{E}(z) = \mathcal{E}_0 e^{-bz} e^{iaz}$; het elektrische veld is $\vec{E} = \vec{\mathcal{E}}_0 e^{-bz} \cos(az + i\omega t)$ (veronderstellend dat $\mathcal{E}_0$ reëel is)
   (c) $\kappa = \sqrt{-i\sigma\mu_0\omega} = (-1 + i)\sqrt{\sigma\mu_0\omega/2}$ voor $\omega \ll \sigma/\varepsilon_0$, dus de indringdiepte is $(\sigma\mu_0\omega/2)^{-1/2}$.

4. *(a)* $\vec{F}_{\text{B}} = \hat{y}\, q_{\text{A}} q_{\text{B}}/(4\pi\varepsilon_0 d^2)$.
   (b) $\vec{F}'_{\text{B}} = \gamma\vec{F}_{\text{B}}$.
   (c) $\vec{F}'_{\text{A}} = -\hat{y}\, q_{\text{A}} q_{\text{B}}/(4\pi\varepsilon_0 d^2) \neq -\vec{F}'_{\text{B}} \Rightarrow$ derde wet van Newton geldt niet in de relativistische mechanica.

21 januari 2008

1. *(a)* Taylorreeks $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r}_0) + (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \nabla\vec{E}(\vec{r}_0)$; de eerste term levert niets op, omdat de bijdragen van tegenoverliggende oppervlakten tegenelkaar wegvallen; de tweede term levert de gevraagde benadering op; de verwaarloosde termen zijn een orde a/L kleiner, waarbij L de afstand is waarover $\vec{E}$ variëert.
   (b) Invullen van de tweede vergelijking in de eerste levert op V div $\approx Q/\varepsilon_0$; beide zijden delen door V en de limiet $V \to 0$ nemen geeft div$\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$.
   (c) buiten de bol: $\vec{E} = \hat{r}Q/4\pi\varepsilon_0 r^2$; binnen de bol: $\vec{E} = \hat{r}Qr/4\pi\varepsilon_0 R^3$.
   (d) Optellen van de krachten op de ene puntlading afkomstig van de andere puntlading en van de geladen bol, geeft als totale kracht $e^2/4\pi\varepsilon_0 b^2 - e^2 b/4\pi\varepsilon_0 R^3$; de totale kracht is nul als $b = R$.

2. *(a)* $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ en $\vec{E} = -\nabla\Phi - \partial\vec{A}/\partial t$ blijven onveranderd bij de ijktransformatie $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\chi$, $\Phi' = \Phi - \partial\chi/\partial t$.

(b) $c^2 \operatorname{div}(\vec{A} + \nabla\chi) + (\partial/\partial t)(\Phi - \partial\chi/\partial t) = 0$; uitwerken levert een inhomogene golfvergelijking op voor $\chi(\vec{r}, t)$.
(c) zie college
(d) de Lorentzijk is het inproduct van de twee viervectoren $\partial_\mu = (-\partial/\partial ct, \partial/\partial\vec{r})$ en $A_\mu = (\Phi/c, \vec{A})$; omdat het inproduct van viervectoren invariant is onder Lorentz-transformatie, is de Lorentzijk dat ook.

3. *(a)* $Q = 2\pi L\varepsilon_0 V/\ln(b/a)$ op binnenste cylinder ($-Q$ op buitenste cylinder).
(b) $\vec{B} = \hat{\phi}\mu_0 I/2\pi R$; $\vec{E} = \hat{R}V[R\ln(b/a)]^{-1}$; $\vec{S} = (1/\mu_0)\vec{E}\times\vec{B} = \hat{z}IV[2\pi R^2\ln(b/a)]^{-1}$.
(c) integreer de Poyntingvector over de ruimte tussen de beide cylinders om de energiestroom $\Delta u/\Delta t$ te vinden; het resultaat is eenvoudigweg $\Delta u/\Delta t = IV$.

4. *(a)* $v'_x = (v_x - v_R)(1 - v_R v_x/c^2)^{-1}$, $v'_y = (v_y/\gamma)(1 - v_R v_x/c^2)^{-1}$, $v'_z = (v_z/\gamma)(1 - v_R v_x/c^2)^{-1}$
(b) neen, voor een viervector zouden de y en z componenten niet mogen veranderen
(c) $v'_x = -v_R$, $v'_y = c/\gamma = (c^2 - v_R^2)^{1/2}$, $v'_z = 0$, dus $(v'_x)^2 + (v'_y)^2 + (v'_z)^2 = c^2$

17 maart 2008

1. *(a)* $\mu_0\vec{J} = \operatorname{rot}\vec{B}$ en $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{B} = 0$, dus $\operatorname{div}\vec{J} = 0$.
(b) $\vec{E}(\vec{r}, t) = Q(t)(4\pi\varepsilon_0)^{-1}\vec{r}/r^3$, buiten de bol.
(c) $\vec{j}_v = \varepsilon_0\partial\vec{E}/\partial t = (I/4\pi)\vec{r}/r^3$; de integraal van $\vec{j}_v$ over het oppervlak van de bol levert I op, naar buiten gericht, terwijl de oppervlakte integraal van $\vec{j}$ ook I oplevert, maar naar binnen gericht; de som is dus nul.

2. *(a)* je kunt dit b.v.b. snel zien door de golfvergelijking te schrijven als $(\partial/\partial\xi_+)(\partial/\partial\xi_-)f = 0$, met $\xi_\pm = x \pm vt$; de golf beweegt met snelheid v; als de golf naar rechts beweegt is $f_+ = 0$.
(b) $f_\pm = \frac{1}{2}(F \pm v^{-1}\int_0^x G(x')\,dx') \pm$ constante; deze constante valt weg in f, dus die mag je nul stellen.
(c) substitueren van de definities van U en S geeft $\partial U/\partial t + \partial S/\partial x = v^{-2} f_{tt} f_t + f_{xt} f_x - f_{tx} f_x - f_t f_{xx}$; dit is gelijk aan nul volgens de golfvergelijking, Q.E.D. *Notatie:* subscript t betekent afgeleide naar t, subscript x betekent afgeleide naar x.

3. *(a)* gebruik $\nabla\times\vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t$, met als resultaat $B_y = E_x(k/\omega)$ en $B_x = -E_y(k/\omega)$
(b) invullen in $\nabla\times\vec{B} = \varepsilon_0\mu_0\partial\vec{E}/\partial t$ levert op $v = \omega/k = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$.
(c) de energiestroomdichtheid is $S = \mu_0^{-1}\vec{E}\times\vec{B} = \hat{z}(\mu_0 c)^{-1}\sum_{i=1,2}[\operatorname{Re} E_i e^{i(kz-\omega t)}]^2$; na middelen over 1 periode verdwijnt het produkt $\langle\cos(kz - \omega t)\sin(kz - \omega)\rangle = 0$, overblijft $\langle\cos^2(kz - \omega t)]\rangle = 1/2 = \langle\sin^2(kz - \omega t)\rangle$; het resultaat is $\langle S\rangle = \hat{z}(\mu_0 c)^{-1}(|E_1|^2 + |E_2|^2)$.

4. *(a)* $\vec{p} = m d\vec{r}/d\tau$, met eigentijd $\tau = t\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Alleen als $v \ll c$ geldt $\vec{p} = m d\vec{r}/dt$.
(b) $F'_x = F_x$, $F'_y = F_y/\gamma$, $F'_z = F_z/\gamma$, $\gamma = (1 - v_R^2/c^2)^{-1/2}$.
(c) $\vec{K} = d\vec{p}/d\tau$, $K_0 = dp_0/d\tau = c^{-1}dE/dt$.

19 januari 2009

1. *(a)* $\vec{E}_0 = C_0(4\varepsilon_0 r^2)^{-1}\min(a^4, r^4)$; $\Phi_0 = C_0 a^4/4\varepsilon_0 r$ voor $r > a$; $\Phi_0 = (C_0/12\varepsilon_0)(4a^3 - r^3)$ voor $r < a$.
(b) $\delta\vec{E} = \hat{r}\delta Q(4\pi\varepsilon_0 r^2)^{-1}$ voor $r > a$; $\delta\vec{E} = 0$ voor $r < a$; $\delta\Phi = (\delta Q/4\pi\varepsilon_0)\min(1/r, 1/a)$.

(c) de component van $\vec{E}$ evenwijdig aan het oppervlak is continu, de loodrechte component heeft een discontinuïteit van σ/ε_0.
(d) totale lading $Q = 0$, dipoolmoment $\vec{p} = (4/3)\pi a^3\sigma_0\hat{z}$.

2. *(a)* vervang $\vec{j}$ door j_x in de integrand.
(b) neem divergentie van de integrand, $(\partial/\partial\vec{r})\cdot\vec{j}(\vec{r}')|\vec{r}-\vec{r}'|^{-1} = -\vec{j}(\vec{r}')\cdot(\partial/\partial\vec{r}')|\vec{r}-\vec{r}'|^{-1}$; na partiële integratie wordt de integrand $|\vec{r}-\vec{r}'|^{-1}(\partial/\partial\vec{r}')\cdot\vec{j}(\vec{r}') = 0$ omdat de divergentie van een statische stroomdichtheid nul is.
(c) $\vec{A}(\vec{r}) = (\mu_0/4\pi)I\int dl\hat{u}_t|\vec{r}-\vec{r}'|^{-1}$, waarbij de integraal langs de draad loopt. De stroom door de draad is I en $\hat{u}_t$ is een eenheidsvector evenwijdig aan de draad.
(d) in de Lorentzijk wordt de formule: $\vec{A}(\vec{r},t) = (\mu_0/4\pi)\int d\vec{r}'\,\vec{j}(\vec{r}',t_R)|\vec{r}-\vec{r}'|^{-1}$, waarbij de geretardeerde tijd t_R gegeven wordt door $c(t-t_R) = |\vec{r}-\vec{r}'|$.

3. *(a)* MII geeft $\vec{B} = \hat{y}(E_0/c)\cos[\omega(z/c-t)+\alpha]$; de golf plant zich voort in de z-richting.
(b) $\vec{J} = (1/\mu_0)\vec{E}\times\vec{B} = \hat{z}(E_0^2/\mu_0 c)\times 1/2$, gemiddeld over 1 periode; eenheid: $\mathrm{J\,m^{-2}\,s^{-1}}$
(c) $U = (\varepsilon_0/2)|\vec{E}|^2 + (1/2\mu_0)|\vec{B}|^2) = (\varepsilon_0/2)E_0^2$, gemiddeld over 1 periode (merk op: $c^2 = 1/\varepsilon_0\mu_0$); eenheid: $\mathrm{J\,m^{-3}}$.
(d) het product Uc is de hoeveelheid energie die per seconde uit het elektromagnetische veld wegstroomt door een oppervlak van $1\,\mathrm{m}^2$; deze verliesterm is gelijk aan de energiestroomdichtheid $|\vec{J}|$, dus er gaat geen energie verloren.

4. *(a)* $\vec{E}' = (q/4\pi\varepsilon_0)\vec{r}'|\vec{r}'|^{-3}$, $\vec{B}' = 0$.
(b) $\vec{E} = (q/4\pi\varepsilon_0)(\vec{r}-\vec{r}_q)|\vec{r}-\vec{r}_q|^{-3}(1-v^2/c^2)[1-(v^2/c^2)\sin^2\theta)^{-3/2}$, waarbij θ de hoek is met de x-as.
(c) radiëel gericht, 't grootst loodrecht op de bewegingsrichting.
(d) de y-component is nul, de z-component is maximaal op $t = 0$, de x-component gaat door nul op $t = 0$.

16 maart 2009

1. *(a)* Een constante V_0 bij alle potentialen optellen mag de ladingen niet veranderen.
(b) $U_e = \frac{1}{2}\sum_{i,j} c_{ij}V_iV_j$
(c) $Q_1 = C(V_1-V_2)$, $Q_2 = -C(V_1-V_2)$, dus $c_{11} = c_{22} = C$ en $c_{12} = c_{21} = -C$.

2. *(a)* Gebruik $\nabla\times\vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t$, in cylindercoördinaten. De z-component van de rotatie is nul, dus B_z is tijdsonafhankelijk en kan gelijk gesteld worden aan nul. Alleen de transversale componenten B_x en B_y zijn ongelijk aan nul.
(b) uit de golfvergelijking $\Delta\vec{E} - c^{-2}(\partial^2/\partial t^2)\vec{E} = 0$ in cylindercoördinaten volgt $R^{-1}(d/dR)(RdE/dR) + (\omega^2/c^2 - k^2)E = 0$; de randvoorwaarde is $E(a) = 0$.
(c) De randvoorwaarde vereist dat $J_0(a\sqrt{(\omega/c)^2-k^2}) = 0$, dus de eerste mode heeft dispersierelatie $k = \sqrt{(\omega/c)^2-(2.405/a)^2}$. De cutoff frequentie is $\omega = 2.405\,c/a$.

3. *(a)* $\nabla\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$, $\vec{E} = -\nabla\Phi - \partial\vec{A}/\partial t$, $\nabla\cdot\vec{A} = 0 \Rightarrow \Delta\phi = -\rho/\varepsilon_0$.
(b) $\Phi(\vec{r},t) = (4\pi\varepsilon_0)^{-1}\int d\vec{r}'\,\rho(\vec{r}',t)|\vec{r}-\vec{r}'|^{-1}$.
(c) Om een signaal over te brengen moet het elektrische veld veranderen, de potentiaal zelf is niet waarneembaar.

4. *(a)* $E'_x = E_x$, $B'_x = 0$, $E'_y = \gamma E_y$, $B'_y = (\gamma v/c^2)E_z$, $E'_z = \gamma E_z$, $B'_z = -(\gamma v/c^2)E_y$. Inproduct van $\vec{E}'$ en $\vec{B}'$ is nul, dus ze staan loodrecht op elkaar.
(b) Transformatieregels invullen en uitwerken.
(c) Als $\vec{E}\cdot\vec{B} = 0$ in stelsel S, moet het gelijk zijn aan nul in elk ander inertiaalstelsel.

16 december 2009

1. (a) rotatie van $\vec{E}$ is nul, dus $\partial f/\partial y = b$ en $\partial f/\partial x = 0$, dus $f(x,y) = by +$constante. De constante is nul, omdat $\vec{E} = 0$ voor $\vec{r} = 0$. Potentiaal $\vec{E} = -\nabla\Phi$, dus $\Phi = -ax^2/2 - bzy - cz^3/3$
   (b) divergentie van $\vec{E} = a + 2cz = \rho(\vec{r})/\varepsilon_0$; integreren over de kubus geeft de totale lading $[aL^3 + cL^4]\varepsilon_0$.
   (c) $U_1 - U_2 = (\varepsilon_0/2)\oint_{\text{kubus}} \Phi\vec{E}\cdot d\vec{S} \neq 0$; de energiedichtheid in de wet van behoud van energie is U_2, dus die zou je moeten gebruiken om te weten hoevel energie er *in de kubus* zit. Voor de totale energie (in de gehele ruimte) mag je beide formules gebruiken, er komt hetzelfde uit.

2. *(a)* $\int \vec{A}\cdot d\vec{l} = \Phi$, dus $\vec{A}(\vec{r}) = \hat{\phi}\Phi/2\pi R$ voor $R > a$; $\vec{B} = \nabla\times\vec{A} = \hat{z}R^{-1}d(RA)/dR = 0$.
   (b) Als $\vec{A} = 0$ buiten de spoel, dan zou de omvatte flux nul zijn, wat in tegenspraak is met het gegeven.
   (c) na partiële integratie vind je $\nabla\cdot\vec{A} = (\mu_0/4\pi)\int d\vec{r}'|\vec{r}-\vec{r}'|^{-1}\nabla\cdot\vec{j}(\vec{r}')$ en dit is gelijk aan nul omdat de divergentie van een tijdsonafhankelijke stroom nul is.

3. (a) golfvergelijking $(d^2/dz^2)E(z) = (k^2 - \omega^2/c^2)E(z)$, randvoorwaarde $E(0) = 0 = E(d)$. Divergentie is nul, dus geen y-afhankelijkheid.
   (b) oplossing $E(z) = \sin(n\pi z/d)$, met $k^2 + (n\pi/d)^2 = (\omega/c)^2$ en $n = 1,2,3,\ldots$.
   (c) Evenwijdige component moet nul zijn op de platen, dus $\vec{E}_0$ kan geen x of y component hebben; de z component heeft geen randvoorwaarde, dus kan ongelijk nul zijn. De relatie tussen ω en k is die van de vrije ruimte, $k = \omega/c$.

4. (a) het volume V van een kubusje met lading q is kleiner dan het rustvolume V_0, tengevolge van de Lorentzcontractie: $V = V_0\sqrt{1-v^2/c^2} = V_0/\gamma$. Omdat de lading hetzelfde blijft, moet de ladingsdichtheid dus groter worden, $\rho = \rho_0/\sqrt{1-v^2/c^2} = \gamma\rho_0$. De stroomdichtheid is $\vec{j} = \rho\vec{v} = \rho_0\gamma\vec{v} = \rho_0\vec{\eta}$, met $\vec{\eta}$ de eigensnelheid. Omdat $(c\gamma,\vec{\eta})$ een viervector is, is ook $(c\rho,\vec{j}) = \rho_0(c\gamma,\vec{\eta})$ een viervector.
   (b) Dit is het inproduct in de Minkowski ruimte van de lading-stroom viervector $(c\rho,\vec{j})$ en de viervector $(-\partial/\partial t,\nabla)$. Het inproduct is invariant onder Lorentztransformatie, dus de wet van behoud van lading behoudt zijn vorm onder verandering van inertiaalstelsel.
   (c) Het inproduct van de viervector $(E/c,\vec{p}) = (\gamma mc,\gamma m\vec{v})$ met zichzelf is $E^2/c^2 - |\vec{p}|^2 = m^2c^2$. We kunnen nu de limiet $m \to 0$ nemen en vinden dan $|\vec{p}| = E/c$. Impuls van licht kan gemeten worden via de stralingsdruk (= absorptie van fotonen die een kracht veroorzaakt ten gevolge van de geabsorbeerde impuls).

28 januari 2010

1. *(a),(b)* Zie college.
   (c) Wet van behoud van lading: $\int_S \vec{j}\cdot d\vec{S} = -(d/dt)\int_V \rho d\vec{r}$; the oppervlakteintegraal door een bol met straal r geeft $4\pi j_0$, onafhankelijk van r; dit is the hoeveelheid lading die per tijdseenheid vanuit de oorsprong de bol instroomt. N.B. div $\vec{j} = 0$ voor $\vec{r} \neq 0$.

2. *(a)* Het dipoolmoment wijst in de $+x$ richting en hangt niet af van de oorsprong omdat het molekuul neutraal is. Dus de verandering $\delta\vec{p} = \int d\vec{r}\,\vec{r}_0\rho(\vec{r})$ bij translatie over een vector $\vec{r}_0$ levert nul op, omdat $\int d\vec{r}\rho(\vec{r}) = 0$.

(b) Het dipoolmoment is $\vec{p} = \hat{x} \int dx\, x\lambda(x)$, met $\lambda(x)$ de ladingsdichtheid per lengte. De ladingsdichtheid is $\lambda = -2Q/L$ voor $-L/2 < x < 0$ en $\lambda = +2Q/L$ voor $0 < x < L/2$. Het antwoord is $\vec{p} = \hat{x}QL/2$. Twee puntladingen $\pm Q$ op afstand L zouden een dipoolmoment QL hebben, dus twee keer zo groot.
(c) De elektrische potentiaal in dipoolbenadering is $\Phi(\vec{r}) = (\vec{p} \cdot \hat{r})/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$, die valt dus af met de tweede macht van de afstand. Het elektrische veld $\vec{E} = -\partial\Phi/\partial\vec{r}$ valt dan af met de derde macht van de afstand, en dus ook de kracht $\vec{F} = -e\vec{E}$ op het elektron. Als het molekuul geladen was, dan zou Φ afvallen met de eerste macht van de afstand, dus dan zou de kracht afvallen met de tweede macht.

3. *(a)* $\nabla \times \vec{A} = (\nabla\alpha) \times (\nabla\beta) + \alpha(\nabla \times \nabla)\beta = \vec{B}$, omdat $\nabla \times \nabla\beta = 0$. Omdat $\vec{B}$ de rotatie is van deze $\vec{A}$, volgt direct dat de divergentie van $\vec{B}$ nul is.
(b) $\vec{A} - \vec{A}' = \nabla(\alpha\beta)$, dus $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\chi$ met $\chi(\vec{r}, t) = f(t) - \alpha(\vec{r}, t)\beta(\vec{r}, t)$.

4. *(a)* $\Phi(\vec{r}, t) = (q/4\pi\varepsilon_0)[|\vec{r}-\vec{r}_R|-c^{-1}\vec{v}(t_R)\cdot(\vec{r}-\vec{r}_R)]^{-1}$, met $\vec{r}_R$ de positie van de puntlading op de geretardeerde tijd t_R; $c(t - t_R) = |\vec{r} - \vec{r}_R|$; $\vec{A}(\vec{r}, t) = (\vec{v}(t_R)/c^2)\Phi(\vec{r}, t)$; Verschil met Coulombpotentiaal: retardatie (niet $\vec{r}_P$ maar $\vec{r}_R$) en schijnlading (extra term $c^{-1}\vec{v}(t_R) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_R)$).
(b) Zie college (retardatie en schijnlading heffen elkaar op).
(c) Nee, $\vec{E} = -\nabla\Phi - \partial\vec{A}/\partial t \neq -\nabla\Phi_{\text{Coulomb}}$. De elektrische veldlijnen zijn radiëel gericht, maar niet isotroop (veld groter loodrecht op bewegingsrichting).

5. *(a)* $\vec{E}' = \gamma\vec{v} \times \vec{B}$ (omdat $\vec{E} = 0$), dus $\vec{F}' = \gamma\vec{F}$.
(b) $F'_x = (F_x - (\beta/c)\vec{v} \cdot \vec{F})/(1 - (\beta/c)v_x) = 0$, $F'_y = \gamma^{-1}F_y/(1 - (\beta/c)v_x) = \gamma F_y$, $F'_z = \gamma^{-1}F_z/(1 - (\beta/c)v_x) = \gamma F_z$, dus inderdaad, $\vec{F}' = \gamma\vec{F}$.