

TENTAMEN ELEKTROMAGNETISME II, 28 JANUARI 2010, 14-17 UUR.

1. (a) Leid uit de Maxwellvergelijkingen af, de continuïteitsvergelijking

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t).$$

(b) De continuïteitsvergelijking wordt ook wel de wet van behoud van lading genoemd. Leg uit waarom, door deze differentiaalvergelijking te herschrijven tot een integraalvergelijking.

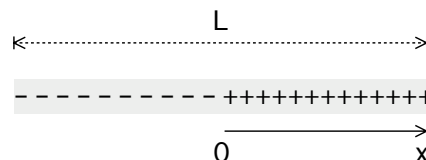
(c) Een tijdsafhankelijke stroomdichtheid is gegeven door

$$\vec{j}(\vec{r}) = j_0 |\vec{r}|^{-3} \vec{r}$$

(j_0 is een constante). Leid af, uitgaande van de wet van behoud van lading, dat deze stroomdichtheid alleen kan bestaan als er een puntbron van lading in de oorsprong aanwezig is.

2. Een zeker molecuul kan benaderd worden door een dunne draad van lengte L , waarbij de ene helft uniform negatief geladen is (totale lading $-Q$) en de andere helft uniform positief geladen is (totale lading $+Q$).

Veronderstel dat het molecuul langs de x -as ligt, met het middelpunt in de oorsprong (zie figuur).



(a) In welke richting wijst het dipoolmoment \vec{p} van het molecuul? Hangt \vec{p} af van de keuze van de oorsprong? (Beargumenteer uw antwoord.)

(b) Bereken de grootte van \vec{p} . Is het groter, kleiner, of even groot als het dipoolmoment van puntladingen $+Q$ en $-Q$ op een afstand L van elkaar?

(c) Een elektron bevindt zich op een grote afstand d van de oorsprong (met "groot" bedoelen we $d \gg L$). De kracht \vec{F} , die het molecuul op het elektron uitoefent, valt af als $1/d^m$ met een zekere macht m . Bereken m . Wat zou die macht zijn, als het molecuul als geheel geladen was (in plaats van neutraal)? (Beargumenteer wederom uw antwoord.)

3. De wiskundige Euler heeft eens bedacht dat het magnetische veld $\vec{B}(\vec{r}, t)$ beschreven kan worden in termen van twee scalaire potentialen $\alpha(\vec{r}, t)$ en $\beta(\vec{r}, t)$, en wel als volgt:

$$\vec{B} = (\nabla \alpha) \times (\nabla \beta).$$

(a) Laat zien dat we de vectorpotential $\vec{A}(\vec{r}, t)$ in termen van α en β kunnen schrijven als

$$\vec{A} = \alpha(\nabla \beta).$$

Waarom volgt hieruit dat \vec{B} voldoet aan de Maxwellvergelijking $\nabla \cdot \vec{B} = 0$?

(b) Een andere vectorpotential $\vec{A}'(\vec{r}, t)$ is gegeven door

$$\vec{A}' = -\beta(\nabla \alpha).$$

Vind een ijktransformatie $\vec{A}'(\vec{r}, t) = \vec{A}(\vec{r}, t) + \nabla \chi(\vec{r}, t)$ die de beide vectorpotentialen relateert.

4. Een puntlading q beweegt met snelheid \vec{v} . Op tijdstip t bevindt de lading zich op plaats \vec{r}_p . De waarnemer bevindt zich op plaats \vec{r} .
- (a) Geef de Liénard-Wiechert formules voor de elektrische potentiaal $\Phi(\vec{r}, t)$ en de vectorpotentiaal $\vec{A}(\vec{r}, t)$. Leg uit hoe en waarom Φ verschilt van de Coulombpotentiaal

$$\Phi_{\text{Coulomb}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_p|}$$

Veronderstel in het vervolg van de opgave dat de snelheid \vec{v} onafhankelijk is van de tijd. Dan geldt (zoals we op het college hebben afgeleid door middel van een Lorentztransformatie) dat Φ gegeven wordt door de formule

$$\Phi(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_p|} \sqrt{\frac{1}{1 - (\nu/c)^2 \sin^2 \theta}}$$

waarbij θ de hoek is tussen de vectoren \vec{v} en $\vec{r} - \vec{r}_p$.

(b) Leid deze formule voor Φ af uit de Liénard-Wiechert potentiaal, voor het speciale geval dat $\theta = 0$ (dus voor het geval dat de puntlading in de richting van de waarnemer beweegt). Wat is de bijbehorende $\vec{A}(\vec{r}, t)$?

(c) Voor dit speciale geval $\theta = 0$ is Φ gelijk aan Φ_{Coulomb} , dus de elektrische *potentiaal* is onafhankelijk van de grootte ν van de snelheid van de puntlading. Geldt hetzelfde voor het elektrische *veld*? Schets de elektrische veldlijnen.

5. In inertiaalstelsel S beweegt een puntlading q met snelheid \vec{v} in een uniform magneetveld \vec{B} . Er is geen elektrisch veld. De kracht op de puntlading is dus gegeven door de Lorentzkracht, $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$. In het meebewegende stelsel S' is de puntlading in rust.

(a) Bereken de kracht \vec{F}' op de puntlading in stelsel S' , door middel van Lorentztransformatie van de elektromagnetische velden.

(b) De relativistische wet van Newton luidt $\vec{F} = d\vec{p}/dt$. Leid af, uit de bekende transformatieregels voor impuls \vec{p} en tijd t , hoe de kracht \vec{F} transformeert als we van stelsel S overgaan naar stelsel S' . Ga na, dat de getransformeerde kracht \vec{F}' dezelfde is als in antwoord (a).