

POW 2013

OPGAVEN



Mede mogelijk gemaakt door: nederlandse



PANalytical



natuurkundige vereniging



Stichting Physica



Universiteit Leiden



rijksuniversiteit groningen



3. Majorana-deeltjes

C.W.J. Beenakker
Universiteit Leiden

10 punten

In 2012 werden twee deeltjes ontdekt: het Higgs-deeltje in Genève en het Majorana-deeltje in Delft. Over de Delftse ontdekking gaat deze opgave.

De ladingsdragers in een elektrische geleider kunnen negatief geladen elektronen zijn of positief geladen gaten. Een elektron kan een gat annihilieren (= opheffen). We noemen het gat daarom het antideeltje van het elektron. Een Majorana-deeltje is zijn eigen antideeltje, dus twee Majorana-deeltjes kunnen alleen blijven bestaan als ze ruimtelijk gescheiden zijn. In het Delftse experiment werden twee Majorana-deeltjes gevangen aan de beide uiteinden van een dunne supergeleidende draad.

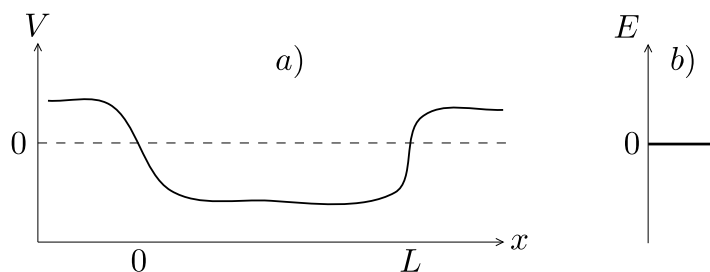
Vraag 1: Wat denk je dat de lading van het Majorana-deeltje is, in verhouding tot de elektronlading $-e$? Beargumenteer je antwoord.

De kwantummechanische golffuncties van het elektron, $\psi_e(x)$, en van het gat, $\psi_g(x)$, in de dunne draad (langs de x -as) voldoen bij gegeven energie E aan twee gekoppelde differentiaalvergelijkingen,

$$\begin{cases} -eV(x)\psi_e(x) - i\hbar v \frac{d}{dx}\psi_g(x) = E\psi_e(x) \\ +eV(x)\psi_g(x) - i\hbar v \frac{d}{dx}\psi_e(x) = E\psi_g(x) \end{cases} \quad (3.1)$$

De golfsnelheid is v en $V(x)$ is de elektrische potentiaal in de draad. Een oplossing van vergelijking 3.1 beschrijft een nieuw soort deeltje, samengesteld uit een elektron en een gat.

Vraag 2: Bewijs de deeltje-antideeltje-symmetrie: als er een oplossing is van vergelijking 3.1 bij energie $+E$, dan is er ook een oplossing bij energie $-E$.



Figuur 3.1: a) Het verloop van de elektrische potentiaal $V(x)$ langs de draad. b) Het energiespectrum van de draad in de limiet $L \rightarrow \infty$.

Om een Majorana-deeltje te vinden zoeken we een oplossing van vergelijking 3.1 bij energie $E = 0$. Dit samengestelde deeltje is dan zijn eigen antideeltje. De potentiaal $V(x)$ ziet eruit als in figuur 3.1a, de precieze vorm doet er niet toe, als $V(x)$ maar negatief is in de draad en

positief erbuiten. Het linker uiteinde van de draad is op $x = 0$, het rechter uiteinde op $x = L$. We vereenvoudigen het probleem een beetje door de limiet $L \rightarrow \infty$ te nemen.

Vraag 3: Bewijs dat het Majorana-deeltje gegeven is door

$$\psi_e(x) = C \exp\left(\frac{se}{\hbar v} \int_0^x V(x') dx'\right), \quad \psi_g(x) = is\psi_e(x), \quad (3.2)$$

met C een willekeurige constante en s gelijk aan $+1$ of -1 . Welk van beide waarden van s is van toepassing op het Majorana-deeltje bij het linker uiteinde van de draad? Waarom?

Vraag 4: We hebben nu voor $L \rightarrow \infty$ een paar Majorana-deeltjes gevonden bij $E = 0$. Het energiespectrum van de draad ziet er dus uit als in figuur 3.1b. Schets het energiespectrum als L wel groot is, maar niet oneindig groot.