TIME-DEPENDENT CORRELATIONS IN THE ONE-DIMENSIONAL XY-MODEL

J.H.H. PERK

Tot de promotie wordt met het oog op de beperkte ruimte in de senaatskamer uitsluitend toegang verleend op vertoon van een uitnodiging

RECEPTIE NA AFLOOP VAN DE PROMOTIE IN

HET ACADEMIEGEBOUW

RAPENBURG 73, LEIDEN

N.B. Met tijdrovende parkeermoeilijkheden bij het Universiteitsgebouw moet nog altijd rekening worden gehouden

STELLINGEN

I

Voor de c-cyclische versie van het isotrope ééndimensionale XY-model in veld nul wordt de autocorrelatiefunctie van de x-component van een randspin in de hoge-temperatuurlimiet gegeven door een Bessel-functie, die van een spin in het inwendige door het kwadraat van de Gaussiaan van de spin-cyclische versie.

Zie hoofdstuk II van dit proefschrift.

II

Voor een aantal toepassingen verdient het aanbeveling de Bulaevskii-benadering voor ééndimensionale $S=\frac{1}{2}$ Heisenberg-systemen te formuleren in termen van spinoperatoren.

L.N. Bulaevskii, Sov.Phys.JETP 16 (1963) 685.

III

Voor een axiaal-symmetrische Heisenberg-Ising-keten bij het absolute nulpunt zijn alle tijdsafhankelijke correlatiefuncties exact te berekenen voor waarden van het magneetveld groter dan een grenswaarde. In het bijzonder is de golfvectorafhankelijke loodrecht-susceptibiliteit

$$\chi_{\perp}(q) = \tfrac{1}{4} / (b - 2J_{/\!/} + 2J_{\perp}\cos q), \quad b > 2J_{/\!/} + 2|J_{\perp}|.$$

IV

De theorie van massaloze spin-$\frac{5}{2}$-velden met een Lagrangiaan, bilineair in de veldoperatoren en eerste orde in de afgeleiden, en met een propagator met enkelvoudige polen en positieve residuen, is eenduidig.

V

De verwachting dat het vierde-orde kritische punt in Ising-metamagneten, gevonden door Kincaid en Cohen, geinterpreteerd zou kunnen worden middels de ontvouwing van de dubbele cusp-katastrofe, is niet gerechtvaardigd.

J.M. Kincaid and E.G.D. Cohen, Phys.Repts. 22C (1975) 57.

VI

Het "infinite-mode Dicke maser model", ingevoerd door Fannes *et al.*, kan door een eenvoudige kanonieke transformatie overgevoerd worden in een "single-mode Dicke maser model".

M. Fannes, P.N.M. Sisson, A. Verbeure, and J.C. Wolfe, Ann.Phys. 98 (1976) 38.

VII

Bij een aantal spingolfberekeningen, zoals in onderstaande referenties, zou een exacte beschouwing van de klassieke grondtoestand zonder enige moeite kunnen worden gegeven.

T. Oguchi, Phys.Rev. 117 (1960) 117.
G. Kozłowski, Acta Phys.Pol. A40 (1971) 333, A47 (1975) 183.
L. Biegała, Acta Phys.Pol. A42 (1972) 675.

VIII

In de bestudering van de symmetrie-eigenschappen van het 16-vertexmodel kan het, voor reële vertexgewichten, zinvol zijn om naast de parametrisatie via Pauli-matrices ook de parametrisatie te beschouwen waarin σ^y is vervangen door $i\,\sigma^y$.

A. Gaaff and J. Hijmans, Physica 80A (1975) 149, 94A (1978) 192.

IX

De interpretatie die in de introductie van onderstaand boek over niet-gepubliceerd werk van Newton gegeven wordt van de symbolen  ,  en  gaat voorbij aan het feit dat Newton hier, op een factor na, de partiële afgeleiden heeft ingevoerd.

Unpublished Scientific Papers of Isaac Newton, A.R. Hall and M. Boas Hall, eds.,(Cambridge University Press, 1962).

X

Indien voor een symmetrische potentiaalput $V_1 = \phi(x) = \phi(-x)$ de trillingstijd voor een trilling met amplitude A gegeven is door het verband $T_1 = \tau(A)$, dan is voor de potentiaal $V_2 = \phi(x - a^2/x)$ de trillingstijd voor een trilling met omkeerpunten $x = A_1$ en $x = A_2 = a^2/A_1$ gegeven door $T_2 = \frac{1}{2}\,\tau(|A_2 - A_1|)$.

XI

Tegen de analyse van de susceptibiliteit en de soortelijke warmte van de gekantelde antiferromagneet $RbCoCl_3.2H_2O$ door McElearney en Merchant zijn bezwaren aan te voeren.

J.N. McElearney and S. Merchant, Phys.Rev. B18 (1978) 3612.

XII

Figuur 18 van hoofdstuk 11 van onderstaand boek suggereert ten onrechte dat twee verschillende integraalkrommen van een autonoom systeem van differentiaalvergelijkingen elkaar kunnen snijden.

H.T. Davis, Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations (Dover Publ., New York, 1962), blz. 336.

J.H.H. Perk, 6 juni 1979.

TIME-DEPENDENT CORRELATIONS IN THE ONE-DIMENSIONAL XY-MODEL

Proefschrift

ter verkrijging van de graad van Doctor in de Wiskunde en de Natuurwetenschappen aan de Rijksuniversiteit te Leiden, op gezag van de Rector Magnificus Dr. D. J. Kuenen, hoogleraar in de faculteit der Wiskunde en Natuurwetenschappen, volgens het besluit van het college van dekanen te verdedigen op woensdag 6 juni 1979 te klokke 15.15 uur

door

Jacques Herman Henri Perk

geboren te Amsterdam in 1948

1979
Krips Repro – Meppel

PROMOTOR: Dr. H.W. Capel

This investigation is part of the research program of the "Stichting voor Fundamenteel Onderzoek der Materie (FOM)", which is financially supported by the "Nederlandse Organisatie voor Zuiver-Wetenschappelijk Onderzoek (ZWO)".

Aan mijn ouders

CONTENTS

Parts of this thesis have been published elsewhere:

Chapter I : H.W. Capel and J.H.H. Perk, Physica 87A (1977) 211;
Chapter II : J.H.H. Perk and H.W. Capel, Physica 89A (1977) 265;
Chapter III: J.H.H. Perk, H.W. Capel and Th.J. Siskens, Physica 89A (1977) 304;
Chapter IV: J.H.H. Perk and H.W. Capel, Physica 92A (1978) 163.

(Physica is published by the North-Holland Publ. Co., Amsterdam)

INTRODUCTION AND SUMMARY

The aim of statistical mechanics is to understand the macroscopic properties of matter in terms of an underlying microscopic model. In view of the enormous mathematical complications attached to the large (infinite) number of degrees of freedom involved, such an understanding can only be reached after many simplifying assumptions and approximations. It is of great importance to test the basic assumptions in such a process. This can be done in several ways. In the first place one can carry out model experiments, *i.e.* one investigates compounds, where a specific property is very much pronounced, so that other features can be treated as small corrections or may be neglected. This thesis is concerned with the theory of dynamical properties of one-dimensional magnetic systems; therefore such experiments will involve crystals composed of long chains of magnetic ions with large intrachain interactions and very small interchain interactions, see refs. 1,2 for a review. In the second place one can do computer simulations (Monte Carlo methods), series expansions and finite chain calculations, see refs. 2,3. Finally, a special role is played by the exactly-solvable models. Here all approximations are made in defining the model used to describe a certain situation. Then all calculations are done without any further approximation. In this way one can do explicit tests on specific assumptions and often one finds new unexpected features; also one may decide whether a certain property is universal or nonuniversal. For a review on exact results in one dimension, see refs. 2,4,5.

The most simple description of matter is that of an ideal system of noninteracting units. In many cases, interactions between units are treated in a first approximation in terms of a molecular field (effective field) picture. In this picture short-range correlations are neglected, *i.e.* a certain unit does not feel each other unit individually, it only feels some average field produced by the other units. This picture can only be exact if there are no short-range forces.† However, correlations due to short-range exchange forces will be seen at low temperatures and in the dynamical properties. In general it will be extremely difficult to obtain rigorous results for three-dimensional systems with short-range interactions. Therefore, from now on we will restrict ourselves to systems consisting of a chain of N quantum spins with nearest-neighbour anisotropic Heisenberg interactions, *i.e.*

$$\mathcal{H} = 2\sum_{j=1}^{N-1} \left(J^x S_j^x S_{j+1}^x + J^y S_j^y S_{j+1}^y + J^z S_j^z S_{j+1}^z \right) - b \sum_{j=1}^{N} S_j^z \quad . \tag{1}$$

Here J^x, J^y, J^z denote the exchange constants and b the magnetic field after appropriate scaling. We shall particularly be interested in the case $S = \frac{1}{2}$.

This model contains a number of special cases.

i) The case $J^x = J^y = 0$, is known as the one-dimensional Ising model. It has been introduced by Lenz in order to understand the Weiss molecular field [7]. It has been solved by Ising [8] and it has no phase transition at finite temperatures. This is typical for a one-dimensional system with short-range interactions. Such a system can be split arbitrarily into two parts with only a finite interaction between the two parts, so that the long-range order will not propagate. The two-dimensional Ising model [9,10], however, has a phase transition with non-classical exponents, *i.e.* different from those obtained by an effective-field method. Also dynamic correlations have been considered [11,12].

ii) The case $J^x = J^y$ is known as the Heisenberg-Ising model, or XXZ-model. In this case the ground-state energy and the excitation spectrum are known [13-16]. Also, under very plausible

† For systems with both short-range and extremely long-range interactions, see *e.g.* ref. 6.

assumptions, an infinite system of integral equations has been derived for finite temperatures [17-19].

iii) The case $b = 0$ is known as the XYZ-model. Here exact information has been obtained for the ground-state energy [20], correlation functions [21,22], and, under similar assumptions as for the XXZ-model, for finite temperatures [19].

iv) The case $J^z = 0$ is known as the XY-model. This model has been introduced by Lieb, Schultz and Mattis [23] and by Katsura [24] as an exactly-solvable many-body system. The model is also used as a starting point for perturbation methods to treat the XXZ- and XYZ-models [25-28]. The case $J^z = J^y = 0$ is the Ising model in a transverse field.

It should be mentioned at this point, that the quantum hamiltonians given above commute with the transfer matrices of certain two-dimensional classical lattice problems [4]. This has been shown first by McCoy and Wu [29] for the XXZ-model. Subsequently, it has been shown by Sutherland [30] and Baxter [20] that the XYZ-hamiltonian commutes with the transfer matrices of symmetric 8-vertex models [31]. Relations have been established between the one-dimensional XY-model and the two-dimensional Ising-, dimer-, and free-fermion problems [32]. Also direct translations exist, see refs. 20, 33.

There exists an extensive literature on the correlation functions of the two-dimensional Ising model [9,10]. Wu, McCoy, Tracy, and Barouch have found exact mappings, in the scaling limit, of 2-point functions on solutions of Painlevé- or sine-Gordon equations [34]. Also n-point functions have been evaluated [35,36]. Furthermore, time-dependent correlation functions between x- and y-components of spins have been evaluated for the corresponding case of the one-dimensional XY-model at zero temperature [37-40]. In the translation one should replace one of the coordinates for the two-dimensional Ising model by an (analytic continuation to) imaginary time for the one-dimensional XY-model. This is related to the Wick rotation known from field theory, where one relates Euclidean and Lorentz-invariant field theories by analytic continuation. The two-dimensional Ising model has been used as a discrete version of a Euclidean field theory [41,42]. Also the one-dimensional Heisenberg and XY-models have been used as discrete field theories [43-45], *e.g.* in order to test variational schemes. The other way around field-theoretical ideas have been used to calculate critical exponents [46], or to give continuum derivations of the scaling-regime results of Wu *et al.* [47,48] Exact results have been obtained on systems with bosons and/or fermions with δ-repulsion [49-51], which can be seen as continuum limits of spin chain systems. In connection with this one might also mention the approximate treatment of Luther and Peschel [52], further discussed and applied in refs. 53-55. Here the anisotropic Heisenberg model is replaced by the continuous Luttinger-Tomonaga model using a bosonization procedure and a few other tricks. One would expect to obtain reasonable results for the Heisenberg model for large times and distances, for large spin S, and for small J^z. Then, in order to get results for $S = \frac{1}{2}$, some cutoffs are introduced, which can only be removed afterwards using exact results obtained by different methods.

An exact calculation is often not at hand. Then one has to rely on numerical methods, such as series expansions, finite-chain calculations, and computer simulations, see *e.g.* refs. 56, 57 for equilibrium properties and refs. 3, 58, 59 for time-dependent correlation functions. There are also results for alternating Heisenberg chains, where the interaction strength between neighbouring spins vary with period 2 along the chain. Such systems can occur in nature due to the spin-Peierls transition [60,61], where the uniform (homogeneous) chain becomes unstable due to the spin-lattice coupling. In connection with this, model calculations have been made, mainly in zero magnetic field, for the alternating Ising model [62], Heisenberg model [63,64,54], and XY-model [65], see also ref. 66. There are also many other analytic results on nonuniform systems, see *e.g.* refs. 10, 67-73.

Many examples of (quasi-) one-dimensional systems are known [1,2,74]. Such compounds usually have a phase transition at very low temperature, where the two- or three-dimensional ordering sets in. One can have compounds with a high-spin quantum number or with $S = \frac{1}{2}$; one can have compounds with a large XY or Ising anisotropy, see *e.g.* refs. 75-79 for recent work.

Also attention has been paid to frequency- dependent correlations, see *e.g.* refs. 2, 80, 81. There are compounds with more than one critical field [82], which has been attributed to an alternation of the exchange constants [83], see refs. 64, 67-69 for other treatments on alternating Heisenberg and XY-models. Finally, the XY-model has also been introduced to describe experiments with electric dipole-dipole interactions [84].

In this thesis we shall restrict ourselves to the time-dependent spin-spin correlations for $S = \frac{1}{2}$ XY-chains at high temperatures. There exists, for isotropic Heisenberg systems at high temperatures a phenomenological description in terms of spin diffusion, which could be appropriate at least in a certain time regime, see ref. 85 for a review and ref. 86. Exact XY-model calculations for the zz-correlations [87] and various numerical results [3,58,59] show long-time tails and singularities in the frequency dependence, *cf.* also ref. 88. However, Sur, Jasnow, and Lowe [89] found strong numerical evidence for Gaussian behaviour at all times for the autocorrelation of the x-component of the magnetization for the zero-field isotropic $S = \frac{1}{2}$ XY-model in the high-temperature limit. They also pointed out that in the anisotropic case this autocorrelation cannot be a simple Gaussian. In this thesis a proof of the result of Sur *et al.* will be given, together with the generalization to the inhomogeneous anisotropic XY-model in nonzero field, for $S = \frac{1}{2}$. In that case, a system of differential equations will be derived which can be considered to be a generalization of the equations of motion of Toda's exponential lattice [90]. Therefore, in special cases solutions can be given in terms of elliptic functions. Elliptic functions show up in various other problems, such as band problems in solid-state physics and sine-Gordon field theories [91,92], in treatments on anisotropic $S = \frac{1}{2}$ [20,21] and classical [93] Heisenberg models, and in treatments of the asymmetrical top, see also ref. 94 where Euler equations have been derived for the long-range anisotropic Heisenberg model. In ref. 95 Gaussian behaviour has been found for a large (but finite) "spin Van der Waals system". For the special case of the homogeneous XY-model, there exists independent work by Brandt and Jacoby [96] where some of the results of this thesis have been found by different methods.

At this point a summary of the thesis and a short outline of the method used, will be given. In chapter I, the homogeneous XY-model, *i.e.* eq. (1) with $J^z = 0$, is considered. As a first step one usually performs the Jordan-Wigner transformation to fermion operators, *i.e.*

$$
\begin{aligned}
S_j^x &= \prod_{k=1}^{j-1} (\div 2\, i\, \gamma_{2k-1} \gamma_{2k})\, \gamma_{2j-1} / \sqrt{2} \ , \\
S_j^y &= \prod_{k=1}^{j-1} (\div 2\, i\, \gamma_{2k-1} \gamma_{2k})\, \gamma_{2j} / \sqrt{2} \ , \\
S_j^z &= -i\gamma_{2j-1}\gamma_{2j} \ , \qquad [\gamma_k, \gamma_l]_+ = \delta_{kl} \ .
\end{aligned} \tag{2}
$$

Here the γ_k, $k = 1, \ldots\ldots, 2N$, are hermitean combinations of the creation and annihilation operators introduced in refs. 23, 24, *i.e.*

$$
c_j^\dagger = (\gamma_{2j-1} + i\,\gamma_{2j})/\sqrt{2} \ , \quad c_j = (\gamma_{2j-1} - i\,\gamma_{2j})/\sqrt{2} \ . \tag{3}
$$

Also the following relabelings will be used in the different chapters of this thesis

$$
\gamma_{2j-1} \equiv \gamma_j^x \equiv \alpha_j \ , \quad \gamma_{2j} \equiv \gamma_j^y \equiv -\beta_j \ . \tag{4}
$$

Assuming open boundary conditions the hamiltonian becomes a quadratic expression in fermion operators, *i.e.*

$$
\mathcal{H} = i \sum_{j=1}^{N-1} (J^x \gamma_{2j} \gamma_{2j+1} - J^y \gamma_{2j-1} \gamma_{2j+2}) + i\, b \sum_{j=1}^{N} \gamma_{2j-1} \gamma_{2j} \ . \tag{5}
$$

The effect of boundary conditions, discussed more extensively in chapter II, is not important if one is interested in correlations between *spins* in the bulk of the chain. However, after applying the Jordan-Wigner transformation, which is a *nonlocal* transformation, one must be careful in handling correlations between x- and y-components of spins. It is not allowed to replace the open fermion hamiltonian (5) simply by the so-called c-cyclic fermion hamiltonian. One usually constructs infinite block-Toeplitz determinants [37,38,96)] to overcome this difficulty. As in ref. 97, use will be made of the operator

$$
O_n(t) = e^{i\mathcal{H}t}\, e^{-i\mathcal{H}_n t} \ , \tag{6}
$$

where $\mathcal{H}$ is given in eq. (5), and $\mathcal{H}_n$ is the same as $\mathcal{H}$ apart from the terms $\gamma_k\gamma_l$, with $k \leqslant n$, $l > n$, which are reversed in sign. The time-dependent xx-correlations in the high-temperature limit,

$$\langle S_i^x(t)\ S_j^x \rangle \equiv \mathrm{Tr}\ (e^{i\mathcal{H}t}\ S_i^x\ e^{-i\mathcal{H}t}\ S_j^x\ ) / \mathrm{Tr}\ 1 \ , \tag{7}$$

can be rewritten as

$$\langle S_i^x(t)\ S_j^x \rangle = \tfrac{1}{4} \langle O_{2i-1}(t) \rangle \delta_{ij} \ , \tag{8}$$

using the property $\gamma_n(t)\ O_{n-1}(t) = O_n(t)\,\gamma_n$, $O_0(t) \equiv 1$. (9)
Note that the xx-correlations between different spins are zero since S_i^x and S_j^x contain respectively 2i-1 and 2j-1 different fermion operators, *c.f.* eq. (2), so that the trace must vanish. (Here it can be used that a time-dependent $\gamma(t)$ is a linear combination of the time-independent γ's.) This is connected with the more general property

$$\langle O_n(t)\,\gamma_i\,\gamma_j \rangle = 0, \quad i,j \leqslant n, \quad \text{or } i,j > n \ , \tag{10}$$

valid in the high-temperature limit. For the open chain (5), eq. (10) is a direct consequence of the reality of the trace and the canonical transformation $\gamma_k \to -\gamma_k$, $(k \leqslant n)$, $\gamma_k \to \gamma_k$, $(k > n)$. Using these properties and a Wick theorem, which will be derived to express 4-point functions $\langle O_n(t)\,\gamma_i\,\gamma_j\,\gamma_k\,\gamma_l\rangle$ in terms of 2-point functions, a closed set of differential equations for the spin correlations is found.

In chapter I this has been done for the homogeneous zero-field XY-model. The autocorrelation of the x-component of a spin is shown to be the product of a Gaussian and a periodic elliptic function, which are explicitly given. As a corollary similar results are found for the autocorrelation and its frequency-Fourier transform in the transverse Ising chain. The results imply a proof of the numerical result of ref. 89, where a single Gaussian is found for the special case of the homogeneous isotropic XY-model in zero field. It may be noted that this is only found for the case $S = \frac{1}{2}$. For the spin S isotropic zero-field XY-chain in the high-temperature limit, one easily derives, using the list of traces given in ref. 98,

$$\langle S_i^x(t)\ S_j^x \rangle = \tfrac{1}{4} Z\,\delta_{ij}\,(1 - Z\,J^2\,t^2 + \tfrac{1}{6} Z\,(4Z-1)\,J^4\,t^4\,) + O(t^6),$$

$$Z = \frac{4}{3} S(S+1) , \tag{11}$$

which can only give a single Gaussian if $S = \frac{1}{2}$, $Z = 1$.

In chapter II a general Wick theorem is proved, the influence of boundary conditions is investigated, and, in connection with this, it is proved that O(t) is an entire function with a power series in t which converges uniformly in the thermodynamical limit. Formal expressions for the correlations also valid for finite temperatures are given, which may be useful for finite chain calculations, together with a few terms of expansions in powers of $\beta = 1/kT$ and t respectivily. For the general inhomogeneous transverse Ising model and zero-field XY-model, equations of motion are derived, which are equivalent to those of Toda's exponential lattice [90].

In chapter III some results are given for the zz-correlations in the alternating XY-chain. The z-component of a spin is also a local operator in fermion language, *c.f.* eq. (2), so that a free-fermion picture and the ordinary Wick theorem can be used. The nonergodicity problems pointed out by Mazur[99] for the homogeneous XY-model, are shown to occur only for very special values of the interaction constants.

In chapter IV the general inhomogeneous anisotropic XY-model in a field is treated. The equations of motion of Toda's lattice are found for the two cases of chapter II and for the general inhomogeneous isotropic XY-model in a field. Also a Lagrangian is derived for the homogeneous anisotropic XY-model in a field, which describes the motion of a mass on a unit sphere in a harmonic potential.

Finally, in chapter V more explicit results are derived for the homogeneous XY-model and the alternating isotropic XY-model. The frequency-dependent behaviour is explicitly calculated in terms of sums of Gaussians multiplied with Jacobi-theta functions, which are defined through rapidly converging Fourier expansions.

References

1) L.J. de Jongh and A.R. Miedema, Adv.Phys. 23 (1974) 1.
2) M. Steiner, J. Villain, and C.G. Windsor, Adv.Phys. 25 (1976) 87.
3) A. Sur and I.J. Lowe, Phys.Rev. B11 (1975) 1980.
4) P.W. Kasteleyn, Fundamental Problems in Statistical Mechanics III, E.G.D. Cohen, ed., North-Holland/American Elsevier (Amsterdam 1975), p.103.
5) J.C. Bonner, J.Appl.Phys. 49 (1978) 1299.
6) H.W. Capel, L.W.J. den Ouden, and J.H.H. Perk, Physica 95A (1979) 371.
7) S.G. Brush, Rev.Mod.Phys. 39 (1967) 883.
8) E. Ising, Z.Physik 31 (1925) 253.
9) L. Onsager, Phys.Rev. 65 (1944) 117;
B. Kaufman, Phys.Rev. 76 (1949) 1232;
L. Onsager and B. Kaufman, Phys.Rev. 76 (1949) 1244;
C.N. Yang, Phys.Rev. 85 (1952) 808.
10) B.M. McCoy and T.T. Wu, The Two-Dimensional Ising Model, Harvard Univ. Press (Cambridge, Mass. 1973).
11) G.A.T. Allan and D.D. Betts, Can.J.Phys. 46 (1968) 15, 799.
12) E.J. van Dongen and H.W. Capel, Physica 84A (1976) 285;
A.K. Rajagopal and G.S. Grest, J.Math.Phys. 15 (1974) 583, 589;
D.R. Taylor, D.B. McColl, J.P. Harrison, R.J. Elliott, and L.L. Gonçalves, J.Phys. C10 (1977) L407.
13) C.N. Yang and C.P. Yang, Phys.Rev. 150 (1966) 321, 327; 151 (1966) 258.
14) J. des Cloizeaux and M. Gaudin, J.Math.Phys. 7 (1966) 1384.
15) J. des Cloizeaux and J.J. Pearson, Phys.Rev. 128 (1962) 2131;
N. Ishimura and H. Shiba, Progr. Theor. Phys. 57 (1977) 1862.
16) M.W. Puga, Phys.Rev.Lett. 42 (1979) 405;
M. Fowler and M.W. Puga, Phys.Rev. B18 (1978) 421.
17) M. Gaudin, Phys.Rev.Lett. 26 (1971) 1301.
18) J.D. Johnson and B.M. McCoy, Phys. Rev. A6 (1972) 1613;
J.D. Johnson, Phys.Rev. A9 (1974) 1743.
19) M. Takahashi and M. Suzuki, Phys.Lett. 41A (1972) 81; Progr.Theor.Phys. 48 (1972) 2187;
M. Takahashi, Progr.Theor.Phys. 50 (1973) 1519, 51 (1974) 1348.
20) R.J. Baxter, Ann.Phys. 70 (1972) 323.
21) J.D. Johnson, S. Krinsky, and B.M. McCoy, Phys.Rev. A8 (1973) 2526.
22) R.J. Baxter, J.Stat.Phys. 8 (1973) 25, 9 (1973) 145.
23) E. Lieb, T. Schultz, and D. Mattis, Ann.Phys. 16 (1961) 407.
24) S. Katsura, Phys.Rev. 127 (1962) 1508, 129 (1963) 2835.
25) Y. Nambu, Progr.Theor.Phys. 5 (1950) 1;
I. Syozi, Busseiron-Kenkyu 39 (1951) 55.
26) K. Meyer, Z.Naturforsch. 11a (1956) 865;
D. Frank, Z.Physik 146 (1956) 615;
I. Mannari, Progr.Theor.Phys. 19 (1958) 201;
S. Rodriguez, Phys.Rev. 116 (1959) 1474.
27) T.W. Ruijgrok and S. Rodriguez, Phys.Rev. 119 (1960) 596;
L.N. Bulaevskii, Sov.Phys.JETP 16 (1963) 685;
S. Katsura and S. Inawashiro, J.Math.Phys. 5 (1964) 1091;
H. Falk and Th.W. Ruijgrok, Phys.Rev. 139 (1965) A1203;
A.J. Silverstein and Z.G. Soos, J.Chem.Phys. 53 (1970) 326;
J.I. Krugler, C.G. Montgomery, and H.M. McConnell, J.Chem.Phys. 41 (1964) 2421.
28) E.J. van Dongen, H.W. Capel, and Th.J. Siskens, Physica 79A (1975) 617.
29) B.M. McCoy and T.T. Wu, Nuovo Cimento 56B (1968) 311.
30) B. Sutherland, J.Math.Phys. 11 (1970) 3183.

31) R.J. Baxter, Ann. Phys. 70 (1972) 193; 76 (1973) 1, 25, 48; Philos.Trans. R.Soc.Lond. A289 (1978) 315.
32) M. Suzuki, Progr.Theor.Phys. 46 (1971) 1337; Phys.Lett. 34A (1971) 338; S. Krinsky, Phys.Lett. 39A (1972) 169.
33) M. Suzuki, Progr.Theor.Phys. 56 (1976) 1454; M. Barma and B.S. Shastry, Phys.Rev. B18 (1978) 3351.
34) T.T. Wu, B.M. McCoy, C.A. Tracy, and E. Barouch, Phys.Rev. B13 (1976) 316; B.M. McCoy, C.A. Tracy, and T.T. Wu, Statistical Mechanics and Statistical Methods in Theory and Application, U. Landman, ed., Plenum Press (New York 1977) p.83.
35) B.M. McCoy, C.A. Tracy, and T.T. Wu, Phys.Rev.Lett. 38 (1977) 793; H. Au-Yang, Phys.Rev. B15 (1977) 2704; B16 (1977) 5016; R.Z. Bariev, Physica 83A (1976) 388.
36) D.B. Abraham, Phys.Lett. 61A (1977) 271; Commun.Math.Phys. 59 (1978) 17; 60 (1978) 181, 205; J.Stat.Phys. 19 (1978) 349; Stud.Appl.Math. 50 (1972) 71, 51 (1972) 179.
37) B.M. McCoy, E. Barouch, and D.B. Abraham, Phys.Rev. A4 (1971) 2331; J.D. Johnson and B.M. McCoy, Phys.Rev. A4 (1971) 2314.
38) H.G. Vaidya and C.A. Tracy, Physica 92A (1978) 1.
39) R.Z. Bariev, Phys.Lett. 68A (1978) 175.
40) W. Pesch and H.J. Mikeska, Z.Physik B30 (1978) 177.
41) B.M. McCoy and T.T. Wu, Phys.Lett. 72B (1977) 219; Phys.Rev. D18 (1978) 1243, 1253, 1259.
42) B. Simon, The $P(\phi)_2$ Euclidean (Quantum) Field Theory, Princeton Univ. Press (1974); Constructive Quantum Field Theory, G. Velo and A.S. Wightman, eds., Springer (Berlin 1973).
43) S.D. Drell, M. Weinstein, and S. Yankielowicz, Phys.Rev. D14 (1976) 487, 1627; D16 (1977) 1769.
44) M. Bander and C. Itzykson, Phys.Rev. D15 (1977) 463; J.B. Zuber and C. Itzykson, Phys.Rev. D15 (1977) 2875.
45) L. Susskind, Phys.Rev. D16 (1977) 3031; E. Fradkin and L. Susskind, Phys.Rev. D17 (1978) 2637.
46) K.G. Wilson, Phys.Rev. B4 (1971) 3174, 3184; *c.f.* also: Phase Transitions and Critical Phenómena, vol.6, C. Domb and M.S. Green, eds., Academic Press (London 1976).
47) D. Wilkinson, Phys.Rev. D17 (1978) 1629.
48) M. Sato, T. Miwa, and M. Jimbo, Proc.Japan Acad. 53A (1977) 6, 147, 153, 183, 219; 54A (1978) 1, 36.
49) E.H. Lieb and W. Liniger, Phys.Rev. 130 (1963) 1605, 1616; C.N. Yang and C.P. Yang, J.Math.Phys. 10 (1969) 1115; C.N. Yang, Phys.Rev.Lett. 19 (1967) 1312; C.K. Lai and C.N. Yang, Phys.Rev. A3 (1971) 393.
50) C.A. Tracy and H.G. Vaidya, Phys.Rev.Lett. 42 (1979) 3, and to be publ.
51) B. Sutherland, Phys.Rev. B12 (1975) 3795.
52) A. Luther and I. Peschel, Phys.Rev. B12 (1975) 3908; A. Luther, Phys.Rev. B14 (1976) 2153; B15 (1977) 403.
53) H.C. Fogedby, J.Phys. C11 (1978) 4767.
54) M.C. Cross and D.S. Fisher, Phys.Rev. B19 (1979) 402.
55) M. Fowler, Phys.Rev. B17 (1978) 2989.
56) N.W. Dalton and D.W. Wood, Proc.Phys.Soc. 90 (1967) 459; D.W. Wood and N.W. Dalton, J.Phys. C5 (1972) 1675; D.C. Jou and H.H. Chen, J.Phys. C6 (1973) 2713.
57) J.C. Bonner and M.E. Fisher, Phys.Rev. 135 (1964) A640; H.W.J. Blöte, Physica 79BC (1975) 427; 93BC (1978) 93; T. de Neef and J.P.A.M. Hijmans, J.Phys. A9 (1976) 105.

58) N.A. Lurie, D.L. Huber, and M. Blume, Phys.Rev. B9 (1974) 2171;
D.L. Huber, Phys.Rev. B10 (1974) 2955;
D.P. Landau and J.A. Tomchick, preprint (1978);
D.G. McFadden and R.A. Tahir-Kheli, Phys.Rev. B1 (1970) 3649, 3671;
T. Morita, K. Kobayashi, S. Katsura, and Y. Abe, Phys.Lett. 32A (1970) 367;
N. Nagao and H. Miyagi, Progr.Theor.Phys. 55 (1976) 21.
59) G. Müller and H. Beck, Physica 86-88BC (1977) 1107; J.Phys. C11 (1978) 483.
60) J.W. Bray, H.R. Hart Jr., L.V. Interrante, I.S. Jacobs, J.S. Kasper, G.D. Watkins, S.H. Wee, and J.C. Bonner, Phys.Rev.Lett. 35 (1975) 744;
AIP Conf.Proc. 29 (1975) 504;
I.S. Jacobs, J.W. Bray, H.R. Hart Jr., L.V. Interrante, J.S. Kasper, G.D. Watkins, D.E. Prober, and J.C. Bonner, Phys.Rev. B14 (1976) 3036.
61) Z.G. Soos, Ann.Rev.Phys.Chem. 25 (1974) 121.
62) B. Chesnut, J.Chem.Phys. 45 (1966) 4677;
E. Pytte, Phys.Rev. B10 (1974) 2039.
63) L.N. Bulaevskii, Sov.Phys.JETP 17 (1963) 684; Sov.Phys.Sol.State 11 (1969) 921;
R.M. Lynden-Bell and H.M. McConnell, J.Chem.Phys. 37 (1962) 794;
Z.G. Soos, J.Chem.Phys. 43 (1965) 1121; Phys.Rev. 149 (1966) 331;
D.B. Abraham and A.D. McLachlan, Mol.Phys. 12 (1967) 301, 319;
D.B. Abraham, J.Chem.Phys. 51 (1969) 3795;
A. Brooks Harris, Phys.Rev. B7 (1973) 3166;
J.C. Bonner, H.W.J. Blöte, J.W. Bray, and I.S. Jacobs, preprint (1978);
J.N. Fields, H.W.J. Blöte, and J.C. Bonner, preprint (1978).
64) W. Duffy Jr. and K.P. Barr, Phys.Rev. 165 (1968) 647.
65) P. Pincus, Sol.State Comm. 9 (1971) 1971;
G. Beni and P. Pincus, J.Chem.Phys. 57 (1972) 3531;
G. Beni, J.Chem.Phys. 58 (1973) 3200;
J.Y. Dubois and J.P. Carton, J.de Physique 35 (1974) 371.
66) K.A. Penson, A. Holz, and K.H. Benneman, Phys.Rev. B13 (1976) 433;
J.Chem.Phys. 65 (1976) 5024; Physica 86-88BC (1977) 1135;
A. Holz, K.A. Penson, and K.H. Benneman, Phys.Rev. B16 (1977) 3999.
67) L.N. Bulaevskii, Sov.Phys.Sol.State 13 (1972) 2778.
68) V.M. Kontorovich and V.M. Tsukernik, Sov.Phys.JETP 26 (1968) 687.
69) J.H.H. Perk, H.W. Capel, Th.J. Siskens, and M.J. Zuilhof, Physica 81A (1975) 319.
70) E. Pytte, Phys.Rev. B10 (1974) 4636;
J. Feder and E. Pytte, Phys.Rev. 168 (1968) 640.
71) F. Matsubara and S. Katsura, Progr.Theor.Phys. 49 (1973) 367;
R.O. Zaitsev, Sov.Phys.JETP 36 (1973) 789;
H. Braeter and J.M. Kowalski, Physica 87A (1977) 243; 89A (1977) 223.
72) B.M. McCoy, Phase Transitions and Critical Phenomena II, C.Domb and M.S. Green, eds., Academic Press (London 1972), p.161;
H. Hahn, J.Magn.Magn.Mat. 7 (1978) 209.
73) G. Theodorou, Phys.Rev. B16 (1977) 2264,2273.
74) Int.Conf.on Magn. (Amsterdam 1976), Physica 86-88BC (1977).
75) M.W. van Tol, Thesis Leiden (1972);
M.W. van Tol and N.J. Poulis, Physica 69 (1973) 341;
F.W. Klaaijssen, Thesis Leiden (1974);
F.W. Klaaijssen, H. den Adel, Z. Dokoupil, and W.J. Huiskamp, Physica 79BC (1975) 113;
F.W. Klaaijssen, Z. Dokoupil, and W.J. Huiskamp, Physica 79BC (1975) 547;
F.W. Klaaijssen, H.W.J. Blöte, and Z. Dokoupil, Physica 81BC (1976) 1.
76) J.A.J. Basten, Thesis Eindhoven (1979);

K. Kopinga, Phys.Rev. B16 (1977) 427;
P.B. Johnson, J.A. Rayne, and S.A. Friedberg, preprint (1978).
77) C. Dupas and J.P. Renard, Sol.State Comm. 20 (1976) 581;
J.P. Groen, T.O. Klaassen, and N.J. Poulis, Phys.Lett. 62A (1977) 453;
K. Takeda, J.C. Schouten, K. Kopinga, and W.J.M. de Jonge, Phys.Rev. B17 (1978) 1285;
J.P.A.M. Hijmans, K. Kopinga, F, Boersma, and W.J.M. de Jonge, Phys.Rev. Lett. 40 (1978) 1108;
W.J.M. de Jonge, J.P.A.M. Hijmans, F. Boersma, J.C. Schouten, and K. Kopinga, Phys.Rev. B17 (1978) 2922.
78) H.A. Algra, L.J. de Jongh, H.W.J. Blöte, W.J. Huiskamp, and R.L. Carlin, Physica 82BC (1976) 239;
H.A. Algra, Thesis Leiden (1977).
79) Q.A.G. van Vlimmeren, Thesis Eindhoven (1979).
80) L.S.J.M. Henkens, Thesis Leiden (1977);
K.M. Diederix, Thesis Leiden (1979).
81) K.M. Diederix, J.P. Groen, T.O. Klaassen, and N.J. Poulis, Phys.Rev.Lett. 41 (1978) 1520; Physica 96BC (1979) 41.
82) K. Amaya and N. Yamashita, J.Phys.Soc.Japan 42 (1977) 24;
K.M. Diederix, J.P. Groen, and N.J. Poulis, Physica 86-88BC (1977) 1151.
83) K.M. Diederix, J.P. Groen, L.S.J.M. Henkens, T.O. Klaassen, and N.J. Poulis, Physica 93BC (1978) 99; 94BC (1978) 9;
K.M. Diederix, H.W.J. Blöte, J.P. Groen, T.O. Klaassen, and N.J. Poulis, Phys.Rev. B19 (1979) 420.
84) J.P. Harrison, J.P. Hessler, and D.R. Taylor, Phys.Rev. B14 (1976) 2979;
J.T. Folinsbee, J.P. Harrison, D.B. McColl, and D.R. Taylor, J.Phys. C10 (1977) 743;
J.T. Folinsbee, Solid State Comm. 24 (1977) 499;
M.S. Nasser, Phys.Rev. B18 (1978) 1371;
M. Bevers, A.J. Sievers, J.P. Harrison, D.R. Taylor, and D.J. Thouless, Phys.Rev.Lett. 41 (1978) 987.
85) P.M. Richards, Rendiconti S.I.F. Enrico Fermi LIX (1976) 539;
F. Borsa, Rendiconti S.I.F. Enrico Fermi LIX (1976) 607.
86) F. Carboni and P.M. Richards, Phys.Rev. 177 (1969) 889.
87) Th. Niemeijer, Physica 36 (1967) 377; 39 (1968) 313;
S. Katsura, T. Horiguchi, and M. Suzuki, Physica 46 (1970) 67;
E. Barouch, Lectures in Theoretical Physics, vol. XIV B, W.E. Brittin, ed., Colorado Assoc. Univ. Press (Boulder, Colorado 1973), p.1;
P. Mazur and Th.J. Siskens, Physica 69 (1973) 259;
Th.J. Siskens, and H.W. Capel, Physica 79A (1975) 296.
88) J.F. Fernandez and H.A. Gersch, Phys.Rev. 172 (1968) 341.
89) A. Sur, D. Jasnow, and I.J. Lowe, Phys.Rev. B12 (1975) 3845.
90) M. Toda, Phys.Reports 18C (1975) 1.
91) B. Sutherland, Phys.Rev. A8 (1973) 2514;
G. Theodorou and T.M. Rice, Phys.Rev. B18 (1978) 2840.
92) B. Hu, Nuovo Cimento 38A (1977) 441.
93) J. Rae, J.Phys. A7 (1974) 1349; A8 (1975) 347, 357.
94) L. van Hemmen, Fortschr.Physik 26 (1978) 397.
95) R. Dekeyser and M.H. Lee, Phys.Rev. B19 (1979) 265.
96) U. Brandt and K. Jacoby, Z.Physik B25 (1976) 181; B26 (1977) 245.
97) H.W. Capel, E.J. van Dongen, and Th.J. Siskens, Physica 76 (1974) 445;
E.J. van Dongen, Thesis Leiden (1976).
98) G.S. Rushbrooke and P.J. Wood, Mol.Phys. 1 (1958) 257;
E. Ambler, J.C. Eisenstein, and J.F. Schooley, J.Math.Phys. 3 (1962) 118.
99) P. Mazur, Physica 43 (1969) 533.

SAMENVATTING

De berekening van macroscopische eigenschappen van de materie vanuit microscopische wetten, die het volledige dynamische gedrag van de bestanddelen vastleggen, is een uiterst gecompliceerd probleem. In de statistiche mechanica wordt daarom veelal gegrepen naar een sterk vereenvoudigd model, dat naar men hoopt dan de essentie van het verschijnsel, waarin men geïnteresseerd is, kan verklaren. In dit proefschrift wordt aandacht geschonken aan de dynamica van ééndimensionale systemen, opgebouwd uit lange ketens die elkaar onderling slechts zwak beïnvloeden. De ketensystemen vertonen hun ééndimensionaal gedrag vaak over een uitgestrekt temperatuursgebied, omdat pas voor zeer lage temperaturen een faseovergang optreedt, waar hoger-dimensionaal gedrag zichtbaar wordt. Ook zal er vaak tengevolge van koppelingen tussen het magnetische systeem en het onderliggende rooster een spin-Peierls instabiliteit kunnen optreden. Tengevolge hiervan zal rekening gehouden moeten worden met alternerende of nog meer inhomogene ketenstructuren.

Als model wordt in dit proefschrift het inhomogene spin $\frac{1}{2}$ XY-model bestudeerd. Exacte resultaten worden afgeleid voor de zogenaamde tijds- en frequentie-afhankelijke correlatiefuncties. In veel experimenten kan juist directe informatie verkregen worden voor zulke correlatiefuncties. Voor het ééndimensionale isotrope Heisenberg-model is er een fenomenologische beschrijving, die zegt dat voor hoge temperaturen en voor een zekere tijdschaal diffusief gedrag moet optreden, en een aantal exacte en benaderde resultaten geven aanleiding tot lange tijdsstaarten en singulariteiten in het frequentiegedrag. Hiertegenover staan numerieke resultaten van Sur, Jasnow en Lowe voor het veldloze ééndimensionale isotrope XY-model, die zeer sterk wijzen in de richting van een Gaussiaan voor de autocorrelatie van de x-component van de spin, voor alle tijden en in de hoge-temperatuurlimiet.

In hoofdstuk I wordt voor het veldloze anisotrope XY-model afgeleid dat in de hoge-temperatuurlimiet de xx-correlatie van één spin algemeen te schrijven is als het product van een Gaussiaan en een periodieke functie, die expliciet gegeven worden in termen van elliptische functies. Deze berekeningen impliceren voor het Ising-model met een magneetveld in de loodrechte richting, soortgelijke resultaten, zowel wat het tijds- als wat het frequentieafhankelijk gedrag betreft. Als een bijzonder geval is hiermee tevens een exact bewijs gegeven voor het numerieke resultaat van Sur et al.

De methode van het eerste hoofdstuk wordt verder uitgebouwd in hoofdstuk II. In deze methode wordt gebruik gemaakt van een operator O(t), die zowel de cyclische als de anticyclische fermion-hamiltonianen bevat. Een zeer algemene vorm van het Wicktheorema wordt bewezen. De invloed van randvoorwaarden is onderzocht, en in samenhang hiermee is bewezen dat O(t) een uniform convergente gehele functie van de tijd is. Algemene uitdrukkingen voor de correlaties worden afgeleid, geldig voor alle tijden en temperaturen en mogelijk bruikbaar voor eindige-ketenberekeningen. Verder wordt gebruik gemaakt van een eigenschap van de operator O(t), samenhangend met het feit dat in de hoge-temperatuurlimiet er geen tijdscorrelaties zijn tussen x- en y-componenten van spins op verschillende plaatsen. Voor de correlaties in het inhomogene Ising-model in een dwarsveld en voor het inhomogene XY-model in veld nul worden gesloten stelsels differentiaalvergelijkingen afgeleid, die van dezelfde vorm zijn als de bewegingsvergelijkingen van Toda voor het rooster met klassieke exponentiële interacties. Tot slot zijn een aantal termen gegeven van de hoge-temperatuurontwikkelingen en van de kortetijdontwikkelingen van de genoemde correlatie-functies.

In hoofdstuk III wordt voornamelijk gekeken naar correlaties tussen z-componenten van spins voor de alternerende XY-keten. Aangetoond wordt dat problemen van niet-ergodiciteit, ontdekt door Mazur aan de hand van het homogene XY-model, alleen kunnen optreden voor zeer speciale waarden van de interactieconstanten.

In hoofdstuk IV wordt, in de hoge-temperatuurlimiet, voor het algemene inhomogene anisotrope XY-model in een veld, een stelsel differentiaalvergelijkingen voor de correlaties tussen x- en y-componenten van spins afgeleid. Dit stelsel, algemener dan dat van Toda, wordt herschreven in termen van een Lagrangiaan voor een systeem van bolslingers gekoppeld via exponentiële, hoekafhankelijke, interacties. In drie speciale gevallen wordt het stelsel van Toda gevonden, nl. voor de twee gevallen van hoofdstuk II en voor het inhomogene isotrope XY-model in een veld. Voor het homogene anisotrope XY-model in een veld is het stelsel equivalent met een stelsel gevonden door Brandt en Jacoby, afgeleid via blok-Toeplitzdeterminanten.

Tot slot in hoofdstuk V worden meer expliciete resultaten afgeleid voor het homogene XY-model en voor het alternerende isotrope XY-model. Het frequentieafhankelijk gedrag kan expliciet berekend worden in termen van Gaussianen vermenigvuldigd met Jacobi-thetafuncties, die gedefinieerd zijn via snel convergente Fourierreeksen.

Hoofdstuk III is ontstaan in zeer nauwe samenwerking met Dr.Th.J. Siskens. Het manuscript ervan is getypt door Mevr. A. Kitselar, in het Instituut voor Theoretische Fysica van de Universiteit van Amsterdam.

De manuscripten van hoofdstukken I, II en IV zijn getypt door Mevr. S. Hélant Muller-Soegies.

CURRICULUM VITAE

Na in mei 1966 het eindexamen gymnasium β te hebben afgelegd aan het Vossius Gymnasium te Amsterdam, heb ik mij ingeschreven voor een studie in de natuurkunde aan de Universiteit van Amsterdam. Het candidaatsexamen natuurkunde en wiskunde met bijvak scheikunde legde ik af op 25 september 1968. Hierna heb ik een half jaar experimenteel werk gedaan onder leiding van Dr.W. Mandema in het Van der Waals-Laboratorium. Voorts heb ik tentamens afgelegd in de theoretische natuurkunde bij Prof.Dr.J. de Boer, Prof.Dr.S.R. de Groot, Prof.Dr.J. Hilgevoord, Prof.Dr.S.A.Wouthuysen en Dr.E.A. de Kerf; en in de wiskunde bij Prof.Dr.H.A. Lauwerier, Prof.Dr.E.M. de Jager, Prof.Dr. J.Th. Runnenburg, Prof.Dr.J. Popken en Dr.G. Laman. Vanaf oktober 1969 ben ik enige jaren als candidaatassistent verbonden geweest aan het Natuurkundig Practicum. Onder leiding van Dr.J. Hijmans heb ik een intern rapport geschreven over "de Stelling van Marcinkiewicz" en een scriptie over de "Bethe-Ansatz en ééndimensionale quantumsystemen". Het doctoraalexamen theoretische natuurkunde met bijvakken wiskunde en hoofdstukken uit de wiskunde legde ik af op 12 juni 1974.

Hierna heb ik in het Instituut-Lorentz van de Rijksuniversiteit Leiden onderzoek verricht aan alternerende XY-systemen, in samenwerking met Dr.Th.J. Siskens en Drs.M.J. Zuilhof, aan systemen met lange- en kortedrachtsinteracties, in nauwe samenwerking met Drs.L.W.J. den Ouden, en aan systemen met antisymmetrische exchange. Vanaf augustus 1975 was ik hiertoe in dienst van de Rijksuniversiteit Leiden, eerst in het kader van de T.A.P.-regeling, daarna van de universitaire beleidsruimte. Sinds februari 1977 ben ik in dienst van de Stichting F.O.M. als wetenschappelijk medewerker in het kader van de beleidsruimte en werkzaam in de werkgroep Vs-Th-L onder leiding van Prof.Dr.P.W. Kasteleyn en Dr.H.W. Capel.

Tijdens mijn studie heb ik een aantal conferenties en zomerscholen bezocht, nl. de Van der Waals Centennial Conference in Statistical Mechanics te Amsterdam in 1973, de IUPAP statistische mechanica-conferentie te Boedapest in 1975, de zomerschool over kritische verschijnselen en faseovergangen te Banff en de magnetismeconferentie te Amsterdam in 1976, de IUPAP statistische mechanica-conferentie te Haifa in 1977, de lage temperaturen-conferentie te Grenoble en de magnetismeconferentie te Cleveland in 1978. In het najaar van 1978 heb ik een studiereis gemaakt door de Verenigde Staten en Canada, daartoe in de gelegenheid gesteld door een reisbeurs toegekend door de Koninklijke/Shell.

Published part of Proefschrift

Chapter 1: Pages 19–50	H.W. Capel and J.H.H. Perk	Physica A **87** (1977) 211–242
Chapter 2: Pages 51–89	J.H.H. Perk and H.W. Capel	Physica A **89** (1977) 265–303
Chapter 3: Pages 90–111	J.H.H. Perk, H.W. Capel and Th.J. Siskens	Physica A **89** (1977) 304–325
Chapter 4: Pages 112-133	J.H.H. Perk and H.W. Capel	Physica A **92** (1978) 163–184
Chapter 5: Pages 134-156	J.H.H. Perk and H.W. Capel, Preprint of	Physica A **100** (1980) 1–23