SUR UN THÉORÈME GÉNÉRAL DE L'OPTIQUE [1])

La „Dioptrique" de HUYGENS [2]) contient une proposition remarquable qu'il avait trouvée en 1653 et qui peut être regardée comme le précurseur du théorème fondamental [3]), bien connu de tous les physiciens, auquel LAGRANGE a été conduit dans le cours de ses recherches sur la théorie des instruments optiques [4]). De nombreuses considérations plus modernes sur la marche des rayons lumineux dans un milieu quelconque sont intimement liées à ces résultats, et il sera peut-être intéressant d'indiquer comment ces considérations peuvent être étendues au cas général des corps biréfringents.

§ 1. Imaginons un milieu transparent qui a en chaque point les propriétés d'un cristal biaxe, et dont la nature change continûment d'un point à un autre. Soit ds une ligne infiniment petite quelconque. Cette ligne peut être regardée comme un élément d'un rayon de lumière, ou plutôt comme un élément de *deux* rayons, pour chacun desquels il y a une direction déterminée des vibrations, et une direction déterminée d'un élément superficiel $d\sigma$ qui appartient à une surface d'onde et qui est conjugué avec l'élément ds. Si l'on connaît les constantes optiques on peut aussi indiquer pour chacun des deux cas la vitesse de propagation de l'onde et la vitesse du rayon. Nous représenterons la première par u et la seconde par v.

Dans ce qui suit nous nous bornerons à une seule direction de vibration; nous dirons donc que cette direction, celle de l'élément d'onde $d\sigma$ et les valeurs de u et de v sont entièrement déterminées

---

[1]) Archives du Musée Teyler **2**, 1, 1914.
Cet article a déjà été publié, sous une forme un peu différente, dans les Annali di Matematica Pura ed Applicata, **20**. 185, 1913.

[2]) HUYGENS, Oeuvres Complètes, T. **13**, p. 198.

[3]) Sur une loi générale d'optique. Mémoires de l'Acad. royale pour l'année 1803. Classe de mathématique, p. 3. (Berlin, 1805).

[4]) Sur la théorie des lunettes. Nouveaux mémoires de l'Acad. royale pour l'année 1778. Classe de mathématique, p.162. (Berlin, 1780).

quand on a choisi l'élément de rayon ds. Bien entendu, si l'on considère une ligne quelconque s et si l'on regarde les éléments dans lesquels elle peut être divisée comme des éléments de rayon, le choix de la direction de vibration en chaque point devra être fait de telle manière qu'elle change continûment le long de la ligne. Il devra également y avoir continuité quand on passe d'une ligne à une autre qui en est infiniment voisine.

Après avoir fait le choix dont nous venons de parler, on peut calculer pour chaque ligne l'intégrale

$$\int \frac{ds}{v} \tag{1}$$

La valeur qu'on trouve pour cette expression ne changera pas quand on intervertit la direction de l'intégration. En effet, pour un élément de rayon donné, la vitesse v est indépendante de la direction dans laquelle il est parcouru par la lumière. Ajoutons qu'il en est de même de la direction de vibration, de celle de l'élément d'onde conjugué avec ds et de la vitesse d'onde u.

§ 2. La construction bien connue de HUYGENS peut servir à déterminer les lignes, courbées dans un milieu non homogène, que suivent les rayons lumineux, et nous fait connaître en même temps les positions successives d'une onde. En général, et c'est à ce cas que nous nous bornerons, il n'y a qu'un seul rayon entre deux points donnés P_1 et P_2 et ce rayon est déterminé par la règle que l'intégrale (1) devient un minimum. Ce minimum, pour lequel nous écrirons

$$T = \int_{P_1}^{P_2} \frac{ds}{v},$$

sera une fonction des coordonnées de P_1 et de P_2; c'est le temps que la lumière met à se propager d'un de ces points à l'autre.

Concevons que des rayons émanent d'un point fixe P_1 dans toutes les directions et choisissons sur chaque rayon un point P_2 tel que le temps T ait pour tous ces points une même valeur déterminée. Les points P_2 se trouveront alors sur une surface σ qui n'est autre chose que la position qu'une onde partie du point P_1 atteindra dans l'intervalle T, chaque élément $d\sigma$ étant conjugué avec le dernier élément ds du rayon qui y aboutit.

La normale d'onde qui appartient au dernier élément du rayon P_1P_2 est la ligne P_2N_2, et la ligne correspondante P_2N_2' pour le rayon Q_1P_2 fera avec P_2N_2 un angle infiniment petit φ. Donc, puisque l'axe P_2X_2 est perpendiculaire à P_2N_2, on aura $\cos\vartheta_2 = 0$ et, si l'on désigne par ω l'angle entre les plans $P_2N_2N_2'$ et $P_2N_2X_2$

$$\cos\vartheta_2' = \sin\varphi\cos\omega,$$

expression qu'on peut remplacer par $\varphi\cos\omega$, ou encore par l'angle ψ_2 que fait avec P_2N_2 la projection de P_2N_2' sur le plan $P_2N_2X_2$. Quant au signe algébrique de ce dernier angle, on regardera comme positive une rotation d'un angle droit de la ligne P_2N_2 vers P_2X_2.

On peut maintenant écrire pour le second membre de l'équation (4)

$$\frac{\psi_2}{u_2' h_1}$$

et il est permis de remplacer ici u_2' par u_2, attendu que la différence de ces deux vitesses est infiniment petite et que le numérateur ψ_2 l'est également. On a donc, en vertu des équations (3) et (4),

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_1\,\partial x_2}(x_1 = 0,\ x_2 = 0) = -\frac{\psi_2}{u_2 h_1}.$$

Or, dans le raisonnement qui précède, on peut échanger entre eux les points P_1 et P_2, ce qu'on exprimera par la permutation des indices 1 et 2. Il en résulte

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_2\,\partial x_1}(x_1 = 0,\ x_2 = 0) = -\frac{\psi_1}{u_1 h_2}$$

et en fin de compte

$$\frac{\psi_2}{u_2 h_1} = \frac{\psi_1}{u_1 h_2}. \tag{5}$$

§ 5. En tenant compte de ce qu'un rayon peut être parcouru dans les deux directions opposées, on peut exprimer de la manière suivante le résultat que nous venons d'obtenir.

Soient P_1 et P_2 deux points arbitrairement choisis, P_1P_2 le rayon lumineux qui va du premier au second, P_1N_1 la normale d'onde et u_1 la vitesse d'onde telles qu'elles sont au point de départ de ce rayon, P_1N_1 étant tirée dans la direction de la propagation. Désignons pareillement par P_2N_2 et u_2 la normale d'onde et la vitesse d'onde pour le point de départ P_2 du rayon inverse P_2P_1. Soient enfin V_1 et V_2 des plans quelconques passant respectivement par P_1N_1, P_2N_2, et P_1X_1, P_2X_2 deux axes situés dans ces plans, dont le premier est perpendiculaire à P_1N_1 et le second à P_2N_2. Alors, si on prend sur le premier axe un point Q_1 infiniment voisin de $P_1 (P_1Q_1 = h_1)$ et sur le second un point Q_2, infiniment voisin de $P_2 (P_2Q_2 = h_2)$, on peut considérer les rayons qui se propagent, l'un de P_1 à Q_2, l'autre de P_2 à Q_1, et les normales d'onde P_1N_1' et P_2N_2' propres aux premiers éléments de ces rayons. En général ces normales sortiront des plans V_1 et V_2. Si on les y projette et si l'on désigne par ψ_1 l'angle infiniment petit que la projection de P_1N_1' sur V_1 fait avec P_1N_1, et par ψ_2 l'angle entre P_2N_2 et la projection de P_2N_2' sur le plan V_2, les deux expressions qu'on voit dans la formule (5) auront la même grandeur et le même signe algébrique. Quant aux signes, ils seront déterminés pour h_1 et h_2 par le choix des directions positives P_1X_1 et P_2X_2 et pour ψ_1 et ψ_2 parce que les rotations de P_1N_1 vers P_1X_1 et de P_2N_2 vers P_2X_2 sont considérées comme positives.

N'oublions pas d'ajouter que le théorème est vrai, non seulement pour un système où il n'y a aucune discontinuité, mais aussi pour le cas où un certain nombre de milieux transparents sont séparés les uns des autres par des surfaces de discontinuité, chacun de ces milieux pouvant du reste présenter un changement graduel, d'un point à un autre, des propriétés optiques. Un artifice mathématique dont il n'est pas nécessaire de parler nous permet d'arriver à cette extension, par laquelle les rayons de lumière deviennent des lignes brisées dont les segments peuvent être rectilignes ou courbés selon les circonstances.

§ 6. En partant de la formule (5) on retrouve facilement des théorèmes bien connus.

Imaginons un système de milieux isotropes et homogènes qui sont séparés par un certain nombre de surfaces sphériques centrées. Prenons pour P_1 et P_2 deux points sur l'axe du système. Le rayon P_1P_2 coïncide alors avec la portion de l'axe comprise entre ces points, et on peut faire en sorte que les points Q_1, Q_2

et tous les rayons dont il est question dans le théorème se trouvent dans un même plan passant par l'axe. De plus, les normales d'onde coïncideront avec les rayons lumineux et les vitesses u_1 et u_2 seront inversement proportionnelles aux indices de réfraction n_1 et n_2 des milieux où se trouvent les points P_1 et P_2. Les lignes P_1Q_1 et P_2Q_2, que nous supposerons avoir la même direction, peuvent être considérées comme deux „objets" perpendiculaires à l'axe et l'on voit facilement qu'alors ψ_1 n'est autre chose que l'angle sous lequel l'objet P_2Q_2 est vu du point P_1, et que pareillement ψ_2 est la grandeur apparente de l'objet P_1Q_1 vu du point P_2. La formule (5) devient maintenant

$$n_2h_2\psi_2 = n_1h_1\psi_1,$$

ce qui nous donne

$$h_2\psi_2 = h_1\psi_1$$

dans le cas $n_1 = n_2$, et

$$\psi_2 = \psi_1$$

si nous supposons en outre $h_1 = h_2$.

La dernière égalité exprime le théorème qui a été trouvé par Huygens.

§ 7. Revenons au cas général et menons par P_1 un plan W_1 perpendiculaire à $P_1 N_1$ et par P_2 un plan W_2 perpendiculaire à P_2N_2. Portons sur P_1N_1 un segment égal à l'unité de longueur et soit W_1' un plan passant par l'extrémité de ce segment et parallèle au plan W_1.

Cela posé, si Q_2 est un point quelconque de W_2 infiniment voisin de P_2, on peut considérer le rayon $P_1 Q_2$ et la normale d'onde P_1N_1' appartenant au premier élément de ce rayon. Soit R le point d'intersection de cette normale avec le plan W_1' et considérons la relation entre les positions de Q_2 et de R.

A cet effet nous choisissons dans le plan W_1 deux axes de coordonnées P_1X_1 et P_1X_1' perpendiculaires entre eux, et nous déterminons la position du point R par ses coordonnées x_1 et x_1' par rapport à ces axes, ou plutôt par rapport aux axes qu'on obtient en projetant P_1X_1 et P_1X_1' sur le plan W_1'. Quant au point Q_2, sa position pourra être déterminée par ses coordonnées x_2, x_2' par rapport à deux axes P_2X_2 et P_2X_2' perpendiculaires entre eux et situés dans le plan W_2.

Evidemment les coordonnées x_1, x'_1 seront des fonctions de x_2, x'_2 et comme toutes ces variables sont infiniment petites et s'annulent en même temps, il faut que la relation cherchée puisse être exprimée par deux équations de la forme

$$x_1 = a_{12}x_2 + a_{12'}x'_2, \quad x'_1 = a_{1'2}x_2 + a_{1'2'}x'_2.$$

Si maintenant le point Q_2 prend toutes les positions comprises dans une portion infiniment petite $d\sigma_2$ du plan W_2, le point R prendra toutes les positions qui se trouvent dans une portion correspondante $d\omega_1$ du plan W'_1, et on aura

$$d\omega_1 = D_{12}d\sigma_2, \tag{6}$$

si l'on désigne par D_{12} la valeur absolue du déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{12'} \\ a_{1'2} & a_{1'2'} \end{vmatrix}.$$

Remarquons que $d\omega_1$ est la mesure de l'ouverture du cône qui contient les normales d'onde appartenant aux premiers éléments des rayons qui partent du point P_1 et qui sont reçus par l'élément superficiel $d\sigma_2$ situé au point P_2.

D'une manière tout-à-fait analogue on peut considérer un faisceau de rayons infiniment mince qui émane du point P_2 et qui découpe dans le plan W_1 un élément $d\sigma_1$ situé au point P_1. Les normales d'onde propres aux rayons de ce faisceau à leur point de départ rempliront un certain cône à ouverture $d\omega_2$ et on aura la relation analogue à (6)

$$d\omega_2 = D_{21}\, d\sigma_1, \tag{7}$$

où D_{21} est la valeur absolue du déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{21'} \\ a_{2'1} & a_{2'1'} \end{vmatrix}.$$

Or, en faisant attention à la signification des coefficients a_{12}, $a_{12'}$, etc., on déduit facilement de l'équation (5) que

$$\frac{a_{I\,II}}{u_1} = \frac{a_{II\,I}}{u_2},$$

si l'on entend par I un des indices 1, 1' et par II un des indices 2, 2'. Par conséquent

$$\frac{D_{12}}{u_1^2} = \frac{D_{21}}{u_2^2}$$

et, en vertu des formules (6) et (7),

$$\frac{d\omega_1 d\sigma_1}{u_1^2} = \frac{d\omega_2 d\sigma_2}{u_2^2}. \tag{8}$$

Notons encore que $d\sigma_1$, $d\sigma_2$ sont les sections des faisceaux considérés par des plans (W_1, W_2) normaux aux normales d'onde. Il serait facile d'introduire en leur lieu les sections par des plans qui sont normaux aux rayons ou qui ont une direction quelconque.

Pour le cas de milieux isotropes l'équation (8) nous ramène à un théorème qui a été énoncé pour la première fois par M. STRAUBEL [1]).

---

[1]) Physik. Zeitschrift, 4, 114, 1903.