LES FORMULES FONDAMENTALES

DE L'ÉLECTRODYNAMIQUE,

PAR

H. A. LORENTZ.

---

§ 1. Dans sa „Théorie générale des forces pondéromotrices" [1]), M. Korteweg a cherché la loi la plus générale qui puisse être admise pour l'action électrodynamique de deux éléments de courants. Quelques hypothèses, si naturelles qu'elles semblent à l'abri de toute objection, conduisent d'abord, pour cette action, à des expressions contenant un certain nombre de fonctions inconnues. Celles-ci sont ensuite déterminées, autant que possible, par la considération des cas où l'action électrodynamique est entièrement connue.

J'ai trouvé qu'on peut arriver à ces mêmes résultats par une autre voie, qui n'implique pas l'introduction de plus de fonctions inconnues qu'il n'en reste subsister dans l'expression finale. Cette méthode, que je vais développer, le cède à celle de M. Korteweg en ce qu'elle a besoin, comme point de départ, d'une loi particulière pour l'action des éléments de cou-

---

[1]) Korteweg, *Algemeene theorie der ponderomotorische krachten*, dans *Natuurk. Verh. der Akad. v. Wet.*, t. XX, et, plus tard, sous une forme simplifiée, due aux remarques de M. van der Waals, dans *Journal für Mathematik*, t. XL.

rants; mais elle présente, au moins pour des éléments incomplets, l'avantage d'être plus simple. Pour les éléments complets, elle a l'inconvénient d'en faire reposer la considération sur celle des éléments incomplets, tandis que M. Korteweg traite les deux cas indépendamment l'un de l'autre.

Naturellement, il doit être fait usage de l'action entièrement connue d'un courant fermé sur un élément (incomplet) d'un autre courant. J'ai donc, dans les premiers §§, indiqué comment on peut avec certitude déduire cette action des observations, sans recourir à une formule représentant l'action mutuelle de deux éléments. Je donne ensuite, à partir du § 8, le développement des expressions générales pour cette dernière action.

§ 2. Les mesures les plus exactes, que nous possédions sur les phénomènes électrodynamiques, ont appris que l'action mutuelle de deux circuits linéaires fermés, qui se comportent comme des corps solides de forme invariable, et qui ne peuvent par conséquent éprouver que des déplacements et des rotations, est exactement égale à celle de deux couches magnétiques doubles. Pour obtenir celles-ci, figurons-nous pour chaque circuit une surface limitée dont il forme le contour, puis une seconde surface située partout à une distance infiniment petite de la première, et distribuons sur ces surfaces respectivement du magnétisme nord et du magnétisme sud, de telle sorte qu'à chaque quantité de magnétisme nord sur l'une corresponde une quantité égale de magnétisme sud sur l'autre, et que le produit de la densité superficielle par la distance des deux surfaces (le moment de la couche double) soit partout égal à l'intensité du courant, exprimée en unités électromagnétiques. Le magnétisme nord devra être appliqué à ce côté de la couche d'où la direction du courant paraît opposée à celle des aiguilles d'une montre. Une pareille direction de rotation sera appelée positive, celle des aiguilles d'une montre, négative. En général, nous dirons que la direction d'une rotation et celle d'une droite perpendiculaire à son plan concordent, lorsque la droite est dirigée vers le côté d'où la rotation est vue positive. Par cette règle sera déterminée, par exemple, la direction de l'axe d'un couple. Enfin, nous emploierons toujours un système d'axes de coordonnées où la direction de OZ correspond à celle d'une rotation de OX vers OY (par un angle droit.)

Nous désignerons, dans la suite, les deux circuits par s et s', les deux couches doubles par S et S', les éléments de ces lignes et de ces surfaces par ds, etc. Les normales élevées sur S et S', du côté positif, seront n et n'. Comme nous admettons d'ailleurs que toutes les actions sont proportionnelles aux intensités des courants, nous pouvons nous borner au cas où ces intensités, et par conséquent les moments des couches doubles, sont $= 1$.

§ 3. L'action réciproque de deux aimants est, comme on sait, entièrement déterminée par leur potentiel mutuel; pour deux courants fermés, il doit donc aussi exister une semblable fonction, dont la diminution à chaque déplacement ou rotation des conducteurs (l'intensité du courant étant maintenue constante) représente le travail des forces électrodynamiques.

Si φ est la fonction potentielle magnétique résultant du courant qui parcourt s' (ou de la couche double S'), le potentiel mutuel des deux courants est

$$P = \int \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS, \quad \dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

expression qui doit être étendue sur toute la couche double S. Au moyen de quelques transformations on peut en déduire:

$$P = -\int\int \frac{\cos \varepsilon}{r} ds\, ds', \quad \dots\dots\dots \quad (2)$$

ou ε désigne l'angle entre les éléments ds et ds' situés à la distance r l'un de l'autre, et où l'intégration doit être étendue le long des deux conducteurs.

Pour le but que nous avons en vue, la forme (1) est toutefois celle qui convient le mieux. On peut y attacher une signification simple. En indiquant par F_n la composante, suivant la direction n, de la force magnétique (provenant du courant en s'), on peut écrire au lieu de (1):

$$P = -\int F_n \, d\,S \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Si, dans le champ magnétique dépendant du courant en s', par tous les points d'une ligne fermée on mène des lignes de force, la surface tubulaire formée par celles-ci possédera la propriété que pour toutes ses sections l'intégrale $\int F_n \, d\,S$ aura la même valeur. On peut diviser l'espace en un grand nombre de tubes de ce genre, de telle sorte que, pour chacune de leurs sections, l'intégrale ait la valeur 1. L'équation (3) montre que P est alors le nombre, pris en signe contraire, de ceux de ces *tubes de force*, provenant de s', qui passent par S ou sont embrassés par s. Dans la supputation de ce nombre, les tubes de force doivent être portés en compte comme positifs ou comme négatifs, suivant que (pris dans la direction de la force magnétique) ils vont vers le côté positif ou négatif de S.

De ce qui vient d'être dit, il suit encore que, à chaque déplacement ou rotation du circuit s, le travail des forces électrodynamiques, qui agissent sur lui, est égal au nombre des tubes de force que s traverse dans son mouvement. On trouve ce nombre en faisant la somme algébrique des nombres des tubes de force coupés par les différents éléments de s. Lorsqu'un élément $A\,B$ (parcouru par le courant dans la direction de A vers B) est déplacé vers $A'\,B'$, le nombre des tubes de force qu'il coupe doit être pris positif ou négatif, selon que la force magnétique a la direction qui correspond à la rotation $B\,A\,A'\,B$, ou la direction opposée.

§ 4. Le premier pas à faire maintenant, pour la décomposition ultérieure de l'action électrodynamique, c'est de partager en éléments l'un des deux courants, par exemple s, et de chercher les forces qu'un semblable élément éprouve du courant en

s'. Pour arriver à la connaissance de ces forces, on peut faire usage de toutes les expériences qui ont pour objet l'action électrodynamique sur les parties d'un circuit, lorsque celles-ci sont mobiles les unes par rapport aux autres. Une seule de ces expériences est toutefois suffisante, à savoir celle d'Ampère, répétée plus tard par von Ettinghausen, par laquelle il a été prouvé qu'un arc de cercle parcouru par un courant, et qui peut tourner autour de son axe, n'est jamais mis en mouvement par un circuit fermé quelconque placé dans son voisinage.

Lorsqu'un élément ds est soumis à l'influence du courant s', toutes les forces qui agissent sur lui pourront toujours être transportées en un même point, pour lequel nous choisissons le milieu de ds; on obtiendra ainsi une force résultante et un couple. Or, le résultat de l'expérience d'Ampère et de von Ettinghausen subsistant pour tous les conducteurs en forme d'arc de cercle, il doit s'appliquer aussi aux éléments de courant, puisqu'on peut considérer ceux-ci comme de petits arcs circulaires. Toute droite, située dans le plan qui passe perpendiculairement par le milieu de l'élément, peut alors être prise pour l'axe de l'arc de cercle; autour d'aucune de ces droites, l'élément ne peut donc acquérir de rotation par l'action de circuits fermés. Il suit de là que la force résultante susmentionnée doit être perpendiculaire à l'élément et que l'axe du couple doit avoir la direction de cet élément.

§ 5. Pour déterminer d'abord la force, nous introduirons l'hypothèse que l'élément ds peut être remplacé par ses composantes dx, dy, dz. La première ne peut éprouver qu'une force parallèle au plan yz; les composantes de cette force, parallèles à l'axe des y et à l'axe des z, étant respectivement désignées par $k_z\,dx$ et $k'_y\,dx$, k_z et k'_y ne peuvent être que des fonctions des coordonnées x, y, z du point où l'élément est situé, fonctions qui doivent avoir des valeurs déterminées, dès que la forme et la position du courant s' sont données. De la même manière dy éprouve les forces $k_x\,dy$ et $k'_z\,dy$, dans la direction de l'axe des z et de l'axe des x; dz, les forces

$k_y\,dz$ et $k'_x\,dz$, dirigées parallèlement à l'axe des x et à l'axe des y. La force totale, qui agit sur ds, doit donc avoir les composantes

$$X = k'_z\,dy + k_y\,dz, \qquad Y = k'_x\,dz + k_z\,dx,$$
$$Z = k'_y\,dx + k_x\,dy.$$

Or, pour que cette force soit perpendiculaire à ds, il faut qu'on ait

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0$$

ou

$$(k'_x + k_x)\,dy\,dz + (k'_y + k_y)\,dz\,dx + (k'_z + k_z)\,dx\,dy = 0.$$

Mais cela n'est possible, pour toutes les positions de l'élément, que si

$$k_x = -k'_x, \quad k_y = -k'_y, \quad k_z = -k'_z,$$

de sorte qu'il vient :

$$X = k'_z\,dy - k'_y\,dz, \quad Y = k'_x\,dz - k'_z\,dx,$$
$$Z = k'_y\,dx - k'_x\,dy \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

En chaque point de l'espace on peut construire une droite terminée ϱ dont k'_x, k'_y, k'_z sont les composantes. Les équations (4) montrent alors que la force, éprouvée par ds, est perpendiculaire au plan mené par ds et ϱ, et égale à l'aire du parallélogramme ayant ces deux lignes pour côtés. La direction de la force correspond à la rotation de ds vers ϱ.

§ 6. Nous ferons voir maintenant que la droite ϱ représente la force magnétique résultant du courant s' et dont les composantes peuvent être représentées par K_x, K_y, K_z.

Considérons, à cet effet, un rectangle infiniment petit, dont les côtés dx, dy sont parallèles aux axes des x et des y, et admettons que son contour soit parcouru dans le sens positif par un courant. Pour la force qui agit sur lui dans la direction de l'axe des x, on trouve alors facilement

$$\frac{\partial k'_z}{\partial x} d\,x\,d\,y.$$

D'autre part, cette action est entièrement connue par ce qui a été dit au § 3. Si l'on imprime au rectangle un déplacement infiniment petit ε dans la direction de l'axe des x, le travail des forces électrodynamiques est

$$\varepsilon \frac{\partial K_z}{\partial x} d\,x\,d\,y.$$

On doit donc avoir

$$\frac{\partial k'_z}{\partial x} = \frac{\partial K_z}{\partial x}.$$

De la même manière, on prouve que

$$\frac{\partial k'_z}{\partial y} = \frac{\partial K_z}{\partial y},$$

de sorte que $k'_z - K_z$ ne peut être qu'une fonction de z. Si l'on fait attention, toutefois, que pour x ou $y = \infty$ toute action magnétique et électrodynamique doit disparaître, il devient évident que partout on doit avoir $k'_z - K_z = 0$. De même, on trouve $k'_x = K_x$ et $k'_y = K_y$.

Par là il est bien démontré que dans le théorème du § précédent on doit entendre par ϱ la force magnétique.

§ 7. Il s'agit encore de savoir si, en outre de la force déterminée par ce théorème, $d\,s$ peut éprouver l'action d'un couple de la nature indiquée au § 4. Pour répondre à cette question, remarquons que, dans une rotation du rectangle considéré au § précédent, les *forces* trouvées accomplissent à elles seules un travail égal au nombre des tubes de force coupés, égal par conséquent à la valeur que l'observation fournit pour le travail électrodynamique total. Les couples, s'ils existent, ne doivent donc, même en cas de rotation, accomplir aucun travail.

Le moment du couple qui agit sur un élément $d\,x$ étant désigné par $L\,d\,x$, où L est une fonction de x, y, z, il suit de la condition qui vient d'être trouvée, si on l'applique à une rotation du rectangle $d\,x\;d\,y$ autour de l'axe des x:

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0 \,.$$

On trouve de même:

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 0 \,,$$

et comme L doit en tout cas disparaître à une distance infinie, on a partout:

$$L = 0 \,.$$

Ce résultat étant indépendant de la direction attribuée à l'axe des x, il n'existe jamais de couple et le théorème du § 5 détermine l'action totale exercée par s' sur l'élément $d\,s$.

Il résulte encore de ce théorème, que, dans le cas où les parties d'un circuit peuvent exécuter des mouvements quelconques les unes par rapport aux autres, il existe entre les tubes de force et le travail électrodynamique la même relation que dans le cas de déplacements et rotations d'un circuit de forme invariable. Ce résultat a été confirmé, entre autres, par des expériences de Boltzmann [1]), de von Ettinghausen [2]) et de Niemöller [3]).

§ 8. Après avoir partagé en éléments le circuit s, il faut exécuter la même division pour s', afin d'apprendre à connaître l'action que $d\,s$ éprouve de la part d'un élément $d\,s'$. Pour trouver l'expression la plus générale de cette action partielle-

---

[1]) *Wiener Sitz. Ber.* t. 60. p. 69.

[2]) *Ibid.*, t. 77, p. 109.

[3]) Wiedemann's *Annalen*, t. 5, p. 433.

ment indéterminée, nous ferons d'abord une hypothèse particulière, après quoi nous chercherons quelles autres forces, outre celles trouvées par ce moyen, peuvent encore être admises. Il est indifférent, pour cette recherche, que nous partions de telle loi particulière d'action ou de telle autre, attendu que toutes ces lois n'en seront pas moins comprises dans le résultat final.

Nous choisissons donc l'hypothèse qui, après les développements précédents, paraît la plus naturelle. Elle consiste à diviser l'action magnétique exercée par s' en parties émanant des différents éléments $d\,s'$ et à admettre que l'action électrodynamique et l'action magnétique d'un pareil élément sont liées entre elles suivant la règle du § 5. On sait qu'on peut rendre compte de l'action magnétique d'un courant fermé, si l'on admet que la force magnétique, exercée par l'élément $d\,s'$ en un point P situé à la distance r, a une direction perpendiculaire au plan $(P, d\,s')$ et correspondant à la rotation de $d\,s'$ vers r, et une intensité déterminée par :

$$\frac{\sin\,(r, d\,s').\ d\,s'}{r^2}.$$

En conséquence, nous posons pour les composantes de la force magnétique exercée par $d\,s'$ sur le point (x, y, z), quand $d\,s'$ lui-même est placé au point (x', y', z'),

$$\frac{z-z'}{r^3}\,d\,y' - \frac{y-y'}{r^3}\,d\,z', \text{ etc.,}$$

et pour les composantes de l'action électrodynamique de $d\,s'$ sur $d\,s$:

$$\left[\frac{y-y'}{r^3}\,d\,x' - \frac{x-x'}{r^3}\,dy'\right] d\,y - \left[\frac{x-x'}{r^3}\,d\,z' - \frac{z-z'}{r^3}\,dx'\right] d\,z, \text{ etc.,}$$

ou, après quelques réductions :

$$-\left[\frac{x-x'}{r^3}\cos\varepsilon + \frac{d\,x'}{d\,s'}\,\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{d\,s}\right] d\,s\,d\,s', \text{ etc. . . . . . . } \quad (5)$$

Il est facile de voir que ces expressions correspondent à la loi de Grassmann.

§ 9. Quelle que soit l'action entre les deux éléments de courant, on pourra toujours se la représenter comme composée des forces données par (5) et de quelque autre action, qui peut consister en forces et en couples. Pour déterminer cette „action secondaire", nous n'avons que la condition qu'elle s'évanouit dès que s' est fermé, puisque les forces (5), à elles seules, rendent entièrement compte de l'action d'un pareil courant.

En vertu de cette condition, l'action secondaire exercée par un élément $d\,s'$ peut être déduite de celle d'un courant qui vient d'une distance infinie et se termine en un point P', ayant pour coordonnées x', y', z'. D'abord, dès que l'élément $d\,s$ est donné, cette action ne peut dépendre que du lieu de P', vu que, pour deux courants qui viennent d'une distance infinie et s'arrêtent tous les deux en ce point, elle doit être la même. En effet, si l'on renverse la direction d'un de ces courants, ils forment ensemble un courant qui peut être regardé comme fermé et qui n'exerce par conséquent aucune action secondaire. Ensuite, aussitôt que l'action secondaire en question est connue comme fonction de x', y', z', il suffit de différentier celle-ci par rapport à s' pour obtenir l'action secondaire d'un élément quelconque $d\,s'$, placé en P'. Car un pareil élément $P'\ Q'$ peut être regardé comme la différence de deux courants venant tous les deux d'une distance infinie et terminés, l'un en P', l'autre en Q'.

§ 10. Pour déterminer l'action secondaire que l'élément $d\,s$ au point P $(x,\ y,\ z)$ éprouve de la part du courant terminé en P', nous pouvons nous représenter celui-ci dirigé suivant le prolongement de la droite $P\,P'$. Nous admettrons, en outre, que toutes les forces agissant sur $d\,s$ sont transportées en son milieu, et nous déterminerons la force résultante et le couple, ainsi obtenus, par l'hypothèse qu'entre les images spéculaires (par rapport à quelque plan fixe) de deux courants électriques agissent les images des forces. Si l'on décompose alors $d\,s$ en deux composantes $(d\,s)_1$ et $(d\,s)_2$, respectivement dirigées suivant $P\,P'$ et suivant une perpendiculaire à cette droite, il suit de notre hypothèse que sur chacune de ces dernières ne peut agir qu'une force secondaire dans sa propre direction. Ces forces seront proportionelles à la longueur de $(d\,s)_1$ et de $(d\,s)_2$ et ne pourront dépendre, du reste, que de la distance $P\,P' = r$, de sorte que nous pouvons les représenter respectivement par $R\,(d\,s)_1$ et $R_1\,(d\,s)_2$, R et R_1 étant des fonctions inconnues de r. Nous prenons celles-ci positives lorsque les forces ont les directions de $(d\,s)_1$ et de $(d\,s)_2$.

Il est toujours permis de poser $R = R_1 + R_2$, R_2 étant une nouvelle fonction inconnue. Après ce dédoublement, les deux forces $R_1\,(d\,s)_1$ et $R_1\,(d\,s)_2$, qui agissent sur $(d\,s)_1$ et $(d\,s)_2$, peuvent être composées en une force $R_1\,d\,s$ dirigée suivant $d\,s$; il existe alors, en outre, la force $R_2\,(d\,s)_1$ dans la direction de $(d\,s)_1$.

Pour les composantes de la force secondaire cherchée, qui agit sur $d\,s$, on obtient ainsi:

$$\left(R_1 \frac{d\,x}{d\,s} + R_2 \frac{\partial\,r}{\partial\,s} \frac{x - x'}{r}\right) d\,s, \text{ etc.}$$

§ 11. Dans la recherche du couple résultant de l'action du courant terminé en P' sur $d\,s$, on peut également faire usage de l'hypothèse des images spéculaires; seulement, il ne faut pas oublier que lorsqu'on prend l'image d'un couple, son axe n'est pas l'image de l'axe primitif, mais a une direction opposée à celle de cette image. On trouve alors facilement que sur la composante $(d\,s)_1$ il ne peut pas agir de couple, et que sur $(d\,s)_2$ il ne peut agir qu'un couple ayant son axe perpendiculaire au plan $(P', d\,s)$. Le moment de ce couple s'obtient en multipliant $(d\,s)_2$ par une fonction inconnue de r; nous appellerons celle-ci K, et regarderons comme positive la rotation de $d\,s$ vers r. Les composantes du couple deviennent alors:

$$\frac{K}{r}\left[(y - y')\frac{d\,z}{d\,s} - (z - z')\frac{d\,y}{d\,s}\right] d\,s, \text{ etc.}$$

§ 12. Les résultats des deux §§ précédents donnent, à l'aide d'une différentiation par rapport à s', l'action secondaire de $d\,s'$ sur $d\,s$, et en ajoutant à celle-ci l'action que nous avons appris à connaître au § 8, on trouve pour la force totale, que $d\,s$ éprouve de la part de $d\,s'$, les composantes :

$$\left[-\frac{x-x'}{r^3}\cos\varepsilon - \frac{d\,x'}{d\,s'}\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{d\,s} + \frac{\partial}{\partial s'}\left(R_1\frac{d\,x}{d\,s} + R_2\frac{\partial\,r}{\partial\,s}\frac{x-x'}{r}\right)\right] ds\,ds',$$
etc.

Ces expressions deviennent encore un peu plus simples si au lieu de R_2 on introduit la fonction R_3, à l'aide de la relation

$$\frac{R_2}{r} = \frac{d\,R_3}{d\,r},$$

ou de

$$R_3 = -\int_r^\infty \frac{R_2}{r}\,d\,r.$$

Les composantes de la force deviennent alors

$$\left[\left(-\frac{\cos\varepsilon}{r^3} + \frac{\partial^2 R_3}{\partial s\,\partial s'}\right)(x-x') + \frac{\partial R_1}{\partial\,s'}\frac{dx}{ds} - \frac{\partial\left(\frac{1}{r}+R_3\right)}{\partial\,s}\frac{dx'}{ds'}\right] ds\,ds', \text{etc.} \quad (6)$$

Le couple qui agit sur $d\,s$ a pour composantes

$$\frac{\partial}{\partial\,s'}\left\{\frac{K}{r}\left[(y-y')\frac{d\,z}{d\,s} - (z-z')\frac{d\,y}{d\,s}\right]\right\} d\,s\,d\,s', \text{ etc. } \quad . \; . \; . \; (7)$$

§ 13. Ces expressions, avec les trois fonctions inconnues R_1, R_3, K, déterminent l'action la plus générale qui puisse être admise entre les deux éléments de courants. Elles reçoivent encore une simplification si l'on introduit la condition que l'action et la réaction seront égales et opposées. Par l'échange des lettres pourvues d'accent et de celles qui en sont dépourvues, (6) et (7) donnent les expressions relatives à l'action exercée par ds sur ds'. Veut-on alors, en premier lieu, que les forces agissant sur les deux éléments soient égales et opposées, on doit avoir, comme on le trouve immédiatement,

$$R_1 = \frac{1}{r} + R_3 \,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

relation qui transforme (6) en

$$\left[\left(-\frac{\cos\varepsilon}{r^3} + \frac{\partial^2\left(-\frac{1}{r}+R_1\right)}{\partial s\,\partial s'}\right)(x-x') + \frac{\partial R_1}{\partial s'}\frac{dx}{ds} - \frac{\partial R_1}{\partial s} - \frac{dx'}{ds'}\right] ds\,ds' . (8)$$

Une seconde condition concerne les couples. Pour que l'action soit égale à la réaction, il faut que le système des deux éléments, quand ils sont liés invariablement l'un à l'autre, ne puisse prendre aucune rotation par l'effet des forces intérieures; le transport de toutes les forces en un même point ne doit donc donner lieu à aucun couple. Si l'on choisit pour ce point le milieu de ds et qu'on fasse usage pour les forces des expressions (8), on trouve pour les composantes du couple

$$\frac{\partial}{\partial s'}\left\{\frac{K}{r}\left[(y-y')\frac{dz}{ds} - (z-z')\frac{dy}{ds}\right]\right\} + \frac{\partial}{\partial s}\left\{\frac{K}{r}\left[(y'-y)\frac{dz'}{ds'} - (z'-z)\frac{dy'}{ds'}\right]\right\} +$$
$$+ \left(\frac{\partial R_1}{\partial s'}\frac{dy}{ds} - \frac{\partial R_1}{\partial s}\frac{dy'}{ds'}\right)(z'-z) - \left(\frac{\partial R_1}{\partial s'}\frac{dz}{ds} - \frac{\partial R_1}{\partial s}\frac{dz'}{ds'}\right)(y'-y),$$

ou :

$$\frac{\partial\left(R_1 + \frac{K}{r}\right)}{\partial s'}\left[\frac{dz}{ds}(y-y') - \frac{dy}{ds}(z-z')\right] + \frac{\partial\left(R_1+\frac{K}{r}\right)}{\partial s}\left[\frac{dz'}{ds'}(y'-y) - \frac{dy'}{ds'}(z'-z)\right] \text{ etc.}$$

Pour que le couple soit toujours 0, il faut qu'on ait:

$$K = -R_1\, r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\beta)$$

L'égalité de l'action et de la réaction réduit donc les fonctions inconnues à une seule, R_1.

§ 14. Les résultats que nous venons d'obtenir concordent de tout point avec ceux auxquels M. Korteweg est arrivé pour des éléments de courant „incomplets." Pour l'action de pareils éléments, il introduit sept fonctions inconnues, entre lesquelles, lorsque l'égalité de l'action et de la réaction n'est pas admise, il trouve quatre relations, de sorte que, tout comme dans nos formules, il reste trois fonctions inconnues, indépendantes les unes des autres. Or il n'est pas difficile, en appliquant (6) et (7) à des cas particuliers, d'exprimer les fonctions de M. Korteweg en R_1, R_3 et K; on trouve ainsi

$$B = -\frac{d R_1}{d r} - \frac{d R_3}{d r} - r \frac{d^2 R_3}{d r^2},$$

$$C = \frac{1}{r^2} + \frac{d R_3}{d r}, \ldots$$

$$(D) = \frac{K}{r},$$

$$E = -\frac{d R_1}{d r},$$

$$(F) = \frac{K}{r} + r \frac{d}{d r}\left(\frac{K}{r}\right),$$

$$G = \frac{1}{r^2} - \frac{d R_3}{d r},$$

$$(H) = -\frac{K}{r},$$

valeurs qui satisfont réellement aux relations qui doivent exister entre B, C, etc. [1]).

§ 15. D'après (6), la force qui agit sur l'élément $d s$ peut être regardée comme composée de trois forces, dont la première est une attraction

---

[1]) Il faut, pour cela, poser dans les formules de M. Korteweg $A = 1$, vu que dans nos équations tout est exprimé en unités électromagnétiques.

$$\left[\frac{\cos \varepsilon}{r^2} - r\,\frac{\partial^2 R_3}{\partial s\, ds'}\right] ds\, ds',$$

tandis que la seconde et la troisième ont respectivement les directions de ds et ds' et sont données par

$$\frac{\partial R_1}{\partial s'}\, ds\, ds'$$

et

$$-\frac{\partial\left(\frac{1}{r}+R_3\right)}{\partial s}\, ds\, ds'.$$

Si l'on pose $R_1 = 0$ et $R_3 = -\frac{1}{r}$, il ne reste que l'attraction, dont la valeur devient

$$\left[-\frac{2}{r}\frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'} + \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}\right] ds\, ds'.$$

On a alors retrouvé, si l'on pose encore $K = 0$, la loi d'Ampère.

Comme on le sait, M. Stefan a établi une théorie qui embrasse celles d'Ampère et de Grassman. Cette théorie n'admet pas de couples, et suppose que toutes les actions électrodynamiques sont en raison inverse du carré de la distance. Cela revient à poser $R_1 = \frac{\alpha}{r}$, $R_3 = \frac{\beta}{r}$, $K = 0$.

Il est à peine besoin de dire que, au lieu de la loi de Grassmann, on aurait pu prendre tout aussi bien, comme point de départ de la théorie générale, la loi d'Ampère ou quelque autre. La recherche de l'action secondaire serait restée tout à fait la même.

§ 16. Quand on se pose la question de savoir si les fonctions R_1, R_3, K, dans (6) et (7), peuvent être déterminées de telle sorte que pour l'action mutuelle de deux éléments de courants il existe un potentiel, on trouve que cela n'est pas possible, ainsi qu'on pouvait d'ailleurs le prévoir en tenant compte des expériences bien connues sur la rotation électrodynamique. Pourtant, si l'on envisage la question d'une manière un peu différente, l'établissement d'un potentiel devient possible. A cet effet, on distinguera, comme le fait M. Korteweg, des éléments de courant *complets* et *incomplets*. Un élément de la première espèce forme un tout limité; l'électricité en mouvement y tombe au repos à l'une des extrémités, tandis qu'à l'autre extrémité l'électricité se met en mouvement. Dans un élément incomplet, au contraire, l'électricité entre à l'une des extrémités et sort à l'autre. Un courant fermé pourra être considéré, à volonté, comme formé d'éléments complets dont les terminaisons de courants se neutralisent réciproquement, ou comme composé d'éléments incomplets; une portion mobile d'un pareil courant ne pourra toutefois être regardée que comme une somme d'éléments incomplets, puisqu'il ne s'y trouve pas de terminaisons de courants.

Il suit de là que dans les développements des § § précédents l'élément actif $d\,s'$ peut aussi bien être complet qu'incomplet, mais que $d\,s$ peut seulement être incomplet, vu qu'on a fait usage de l'expérience d'Ampère et de von Ettinghausen. Dès que l'élément qui éprouve l'action est complet, il y a lieu d'admettre des actions non comprises dans (6) et (7). Aussi M. Korteweg ne trouve-t-il, dans ce cas, que deux relations entre les sept fonctions inconnues, de sorte que cinq de ces fonctions restent indéterminées; il montre que celles-ci peuvent alors être choisies de façon qu'il existe un potentiel.

§ 17. Si l'on a adopté la méthode des § § 9—12, on pourra maintenant raisonner de la manière suivante. L'action que l'élément $d\,s'$ (qu'on peut se figurer complet ou incomplet) exerce sur l'élément incomplet $d\,s$, sera donnée par (6) et (7). Si $d\,s$ devient complet, il ne pourra s'ajouter à cette action que des forces agissant sur les extrémités de $d\,s$; ces forces sont donc les seules que nous ayons encore à considérer.

D'abord, de l'hypothèse que le renversement du courant entraîne aussi le renversement de l'action électrodynamique, on peut déduire que les forces agissant, au même point du même élément, d'abord sur une origine puis sur une terminaison de courant, sont égales et opposées. Nous n'avons donc à nous occuper que des forces agissant sur des *terminaisons* de courants.

En introduisant ensuite l'hypothèse que l'action éprouvée par un courant non fermé, à terminaisons, approche de zéro quand la longueur diminue indéfiniment, et cela quelque forte que soit la courbure du conducteur, on peut démontrer que l'action de $d\,s'$ sur une terminaison de courant, placée au point P, doit être indépendante de la direction du courant auquel cette terminaison appartient, et par conséquent ne peut dépendre que de la place de P par rapport à $d\,s'$.

Or, si l'on décompose cet élément en une composante $(d\,s')_1$ suivant la ligne de jonction $P'\,P$ et une composante $(d\,s')_2$ perpendiculaire à la première, il suit de l'hypothèse des images spéculaires, que chacune de ces composantes ne peut exercer, sur la terminaison de courant située en P, qu'une force dans sa propre direction.

On pourra représenter ces forces respectivement par $T\,(d\,s')_1$ et $T_1\,(d\,s')_2$, T et T_1 étant des fonctions inconnues de r. Si l'on introduit en outre la nouvelle fonction $T - T_1 = T_2$, l'action peut aussi être conçue comme formée d'une force $T_1\,d\,s'$ dans la direction de $d\,s'$ et d'une force $T_2\,(d\,s')_1$ dans la direction de $(d\,s')_1$. Les composantes de la force totale deviennent donc

$$\left(T_1\frac{d\,x'}{d\,s'} + T_2\frac{\partial r}{\partial s'}\cdot\frac{x' - x}{r}\right)d\,s', \text{ etc.}$$

Les forces qui agissent sur les deux extrémités de $d\,s$ étant alors transportées au milieu de cet élément, il en résulte une force

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(T_1\frac{d\,x'}{d\,s'} + T_2\frac{\partial r}{\partial s'}\cdot\frac{x' - x}{r}\right)ds\,ds', \text{ etc.}$$

et un couple

$$\left\{\left(T_1 \frac{dz'}{ds'} + T_2 \frac{\partial r}{\partial s'} \cdot \frac{z'-z}{r}\right)\frac{dy}{ds} - \left(T_1 \frac{dy'}{ds'} + T_2 \frac{\partial r}{\partial s'} \cdot \frac{y'-y}{r}\right)\frac{dz}{ds}\right\} ds\, ds',$$

etc.

En ajoutant enfin ces expressions à (6) et (7), on obtient les valeurs les plus générales qui puissent être admises pour les composantes de la force et du couple, quand ds est un élément complet. Les résultats sont de nouveau conformes à ceux de M. Korteweg, de sorte que, après son étude approfondie, il nous paraît superflu de montrer encore que les fonctions R_1, R_3, K, T_1 et T_2 peuvent être choisies de manière qu'il existe maintenant un potentiel.