

SUR LA ROTATION D'UN ÉLECTRON QUI CIRCULE AUTOUR D'UN NOYAU ¹⁾

§ 1. Dans ces dernières années plusieurs physiciens, d'abord M. A. H. COMPTON et ensuite M. M. GOUDSMIT et UHLENBECK, ont développé l'hypothèse que les électrons qui circulent dans les atomes sont animés en même temps d'une rotation autour d'un diamètre. Cette idée a été appliquée avec un succès remarquable à la théorie des lignes spectrales et le problème de l'influence réciproque des deux mouvements mérite donc bien un examen approfondi.

Malheureusement, si on aborde les calculs, on voit bientôt que la question est très compliquée. C'est pour cette raison que j'ai dû me borner à une première approximation; et c'est pour cela aussi, sans doute, que mon résultat diffère par un facteur numérique de celui qui a été obtenu par M. THOMAS. Comme ce physicien je me suis laissé guider par le principe de la relativité; si on ne voulait pas s'en servir le résultat deviendrait tout à fait différent.

§ 2. Rappelons d'abord la transformation fondamentale de la théorie de la relativité restreinte, la transformation de relativité, comme je l'appellerai. Elle peut être mise sous la forme suivante (la deuxième et la troisième équation étant remplacées par ...)

$$\left. \begin{aligned} x' &= x + \frac{a^2}{(a+1)c^2} v_x (xv_x + yv_y + zv_z) + av_x t \\ &\quad \dots \dots \dots \\ t' &= at + \frac{a}{c^2} (xv_x + yv_y + zv_z), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

où c , v_x , v_y , v_z et a sont des constantes. La première est la vitesse de la lumière; v_x , v_y , v_z sont les composantes de la vitesse v avec

¹⁾ Conférence faite au Congrès international de Physique, Como, septembre 1927.

laquelle l'origine des x, y, z se déplace dans le système x', y', z', t' et la dernière constante a la valeur

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)}}. \quad (2)$$

On voit facilement que, pour obtenir les formules inverses, celles qui expriment x, y, z, t en fonctions de x', y', z', t' , il suffit d'échanger l'un contre l'autre ces deux groupes de variables, écrivant en même temps $-v_x, -v_y, -v_z$ au lieu de v_x, v_y, v_z .

Il y a des formules de transformation correspondantes pour différentes grandeurs physiques, vitesses, accélérations etc., et ces formules font connaître aussi les expressions invariantes, c'est-à-dire celles dont les valeurs numériques ne changent pas par la transformation.

§ 3. Pour déterminer le mouvement de l'électron nous nous servons du principe de HAMILTON en prenant pour la fonction de LAGRANGE L une expression convenablement choisie. Le mouvement réel qu'il s'agit d'étudier sera donc comparé avec le mouvement varié qu'on en déduit en donnant aux positions des différents points de l'électron, et par conséquent à leur mouvement, des changements virtuels infiniment petits. Si toutes les variations sont nulles pour les instants t_1 et t_2 on a la formule

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W dt = 0, \quad (3)$$

dans laquelle δW est le travail virtuel des forces qui agissent sur le système, pour autant que ces forces ne sont pas déjà comprises dans la fonction de LAGRANGE.

L'équation peut nous faire connaître les forces qu'on doit faire agir pour produire un mouvement arbitrairement donné.

§ 4. La fonction de LAGRANGE se compose de deux parties L_1 et L_2 , qu'on peut distinguer comme la partie électromagnétique et la partie matérielle. Dans le calcul de L_1 nous considérerons la charge de l'électron comme distribuée sur un certain volume ou sur une surface, mais il conviendra de remplacer dans la pensée cette distribution par un assemblage de points chargés, le nombre de ces points étant excessivement grand, même dans un élément de volume ou de surface.

Fixant notre attention sur un de ces points dans la position P qu'il occupe à l'instant considéré t , nous avons d'abord à déterminer les deux potentiels retardés, le potentiel scalaire φ et le potentiel vectoriel A , aux composantes A_x, A_y, A_z , que les autres charges produisent au point P . A cet effet nous cherchons pour tout autre point chargé Q la position „effective” Q_e , c'est-à-dire la position qui satisfait à la condition qu'un mobile qui en part au moment où elle est atteinte et qui se meut en ligne droite avec la vitesse c , peut arriver en P à l'instant t . Si nous désignons par r_e la distance effective Q_eP , par v_Q la vitesse du point Q dans la position Q_e , par v_{Qr} la composante de cette vitesse dans la direction Q_eP et par e_Q la charge du point Q (comme e_P sera celle du point P), nous pouvons écrire pour les parties de φ , de A_x, \dots qui proviennent du point Q

$$\frac{e_Q}{4\pi r_e (1 - v_r/c)} \quad , \quad \frac{e_Q v_x}{4\pi c r_e (1 - v_r/c)} \quad , \quad \dots$$

Les sommes de ces expressions, étendues à tous les points chargés Q , nous donneront φ, A_x, \dots au point P et la fonction de LAGRANGE cherchée sera

$$-\frac{1}{2} \sum e_P \left[\varphi - \frac{1}{c} (v_{Px} A_x + \dots) \right],$$

si on calcule la somme, étendue à tous les points P , pour l'instant t qu'on a choisi, et si on entend par v_{Px}, \dots les composantes de la vitesse de P à ce même instant.

Posons

$$\Psi = \frac{1 - (v_{Px} v_{Qx} + \dots)/c^2}{r_e (1 - v_r/c)} \quad (4)$$

Alors, la fonction cherchée devient

$$-\sum \sum \frac{e_P e_Q}{8\pi} \Psi, \quad (5)$$

où, bien entendu, chaque combinaison de deux points chargés fournit deux termes pour la somme finale.

Le produit

$$\Psi dt \quad (6)$$

est invariant (§ 2).

§ 5. Les vitesses v seront très petites par rapport à celle de la lumière et peuvent souvent être négligées en première approximation. On a alors, au lieu de (5)

$$- \sum \frac{e_P e_Q}{4\pi r}, \quad (7)$$

où r est la distance des positions simultanées de P et de Q et où chaque combinaison PQ donne lieu à un seul terme.

Considérons, par exemple, l'action mutuelle entre un noyau N à charge e_N et un électron dont le centre se trouve à la distance r du noyau, les dimensions de l'électron étant très petites par rapport à r et celles du noyau entièrement négligeables. Si les circonstances sont telles que la charge e de l'électron peut être considérée comme concentrée en son centre, la fonction de LAGRANGE devient simplement

$$- \frac{e_N e}{4\pi r}. \quad (8)$$

Mais il y a des cas où la distribution de la charge de l'électron n'est pas équivalente à une charge au centre, mais donne lieu encore à un moment électrique p . On doit alors ajouter à (8) un terme correspondant à l'action entre e_N et ce moment. La formule (7) donne pour ce terme, si l'on désigne par x, y, z les coordonnées du centre de l'électron,

$$- \frac{e_N}{4\pi} \left[p_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) + \dots \right],$$

ou bien

$$p_x E_x + p_y E_y + p_z E_z, \quad (9)$$

si E est la force électrique dans le champ du noyau.

§ 6. Nous parlerons bientôt de la partie de la fonction de LAGRANGE qui provient de l'action entre l'électron et son propre champ électromagnétique. Mais examinons d'abord la partie matérielle L_2 de cette fonction.

Il paraît très difficile, sinon impossible, de dire quelque chose de ce L_2 sans faire intervenir des hypothèses spéciales sur la structure de l'électron et sur les forces intérieures qui tiennent en équilibre les actions électromagnétiques. Je supposerai donc, faute de

mieux, que l'électron est formé d'une substance solide douée des propriétés d'un corps élastique. Elle sera déformée sous l'action des forces électromagnétiques et c'est précisément l'énergie potentielle de cette déformation, prise avec le signe négatif, qui nous donnera la fonction L_2 .

Si la substance en question aurait une masse matérielle dans le sens ordinaire du mot, L_2 contiendrait encore un terme correspondant à l'énergie cinétique. Pour simplifier nous supposons que cette énergie est nulle ou négligeable. C'est, du reste, une restriction dont on pourrait facilement s'affranchir.

Evidemment, la nécessité de faire l'hypothèse spéciale que je viens d'énoncer diminue de beaucoup l'intérêt que peuvent avoir les considérations qu'on va lire, et on trouvera cet intérêt moindre encore si on se place au point de vue de la mécanique des quanta moderne. Tout au plus les formules „classiques" qui seront développées ici pourront servir d'introduction à l'application à notre problème de la mécanique ondulatoire ou de la mécanique des matrices.

§ 7. Pour adapter les formules de l'élasticité à la théorie de la relativité on doit d'abord trouver une définition relativiste des composantes de déformation qu'on désigne ordinairement par x_x, y_y, z_z (dilatations) et x_y, y_z, z_x (glissements). Voici la manière dont on peut procéder, dans laquelle, du reste, il n'y a rien de nouveau.

Définissons la longueur d'un élément de ligne ds dans l'espace R_4 à quatre dimensions x, y, z, t par la formule

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 \quad (10)$$

et disons que deux éléments, aux composantes dx, dy, dz, dt et $d'x, d'y, d'z, d't$, sont perpendiculaires entre eux si

$$dx d'x + dy d'y + dz d'z - c^2 dt d't = 0.$$

Considérons un corps dont les points se meuvent avec des vitesses qui sont des fonctions continues des coordonnées. Soient P et Q deux points infiniment voisins, L_P et L_Q leur lignes d'univers, A_P le point de L_P qui correspond au temps considéré t et A_Q le point de L_Q qui est déterminé par la condition que $A_P A_Q$ soit perpendiculaire à L_P . La longueur de $A_P A_Q$ calculée au moyen de la formule (10) sera la mesure de la distance l_{PQ} des deux points du corps au moment t . Cette définition conduit à la formule

$$l_{PQ}^2 = (x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 + (z_Q - z_P)^2 + \frac{\{(x_Q - x_P)v_x + (y_Q - y_P)v_y + (z_Q - z_P)v_z\}^2}{c^2 - v^2}, \quad (11)$$

dans laquelle les x, y, z représentent les coordonnées des deux points pris tous les deux à l'instant t , tandis que v_x, v_y, v_z sont les composantes de la vitesse v d'un des points, de P ou de Q .

Si R est un troisième point infiniment voisin de P et de Q , on peut calculer par des formules semblables à (11) les longueurs l_{PR} et l_{QR} , et dans les trois formules on peut entendre par v la vitesse du point P . Connaissant ainsi les côtés du triangle PQR , on peut en déduire par la formule trigonométrique ordinaire le cosinus de ce que nous appellerons l'angle ϑ entre PQ et PR . On trouve de cette manière

$$l_{PQ}l_{PR} \cos \vartheta = (x_Q - x_P)(x_R - x_P) + \dots + \frac{\{(x_Q - x_P)v_x + \dots\}\{(x_R - x_P)v_x + \dots\}}{c^2 - v^2} \quad (12)$$

§ 8. Les déformations x_x, \dots, x_y, \dots doivent être comptées à partir d'un état du corps qu'on peut considérer comme l'état „naturel” ou „initial”. Nous supposons que le corps est en repos dans cet état M_0 . Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées initiales; on trouve alors en vertu de l'équation (11) que la distance initiale entre les points P et Q est donnée par

$$l_{0PQ}^2 = (x_{0Q} - x_{0P})^2 + (y_{0Q} - y_{0P})^2 + (z_{0Q} - z_{0P})^2$$

et la formule (12) montre que deux lignes qui ont les directions de deux coordonnées différentes sont perpendiculaires entre elles.

Les coordonnées x_0, y_0, z_0 pourront servir pour caractériser un point déterminé de la substance de l'électron, et dans l'état actuel que nous avons à étudier les coordonnées x, y, z seront des fonctions de x_0, y_0, z_0 et de t .

Cela posé on arrive à la définition des x_x, \dots, x_y, \dots de la manière suivante.

a) Supposons que les coordonnées initiales de P sont x_0, y_0, z_0 et celles de Q sont $x_0 + dx_0, y_0, z_0$. On a alors

$$x_Q - x_P = \frac{\partial x}{\partial x_0} dx_0, \quad y_Q - y_P = \frac{\partial y}{\partial x_0} dx_0, \quad z_Q - z_P = \frac{\partial z}{\partial x_0} dx_0$$

et on peut calculer l_{PQ}^2 par la formule (11). D'autre part on a

$$l_{0PQ}^2 = dx_0^2.$$

Si

$$\frac{l_{PQ}^2}{l_{0PQ}^2} = 1 + \varepsilon$$

nous entendrons par la dilatation x_x dans la direction x_0 la grandeur $\frac{1}{2}\varepsilon$. On trouve

$$x_x = \frac{1}{2} \left[-1 + \left(\frac{\partial x}{\partial x_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_0} \right)^2 + \frac{1}{c^2 - v^2} \left(v_x \frac{\partial x}{\partial x_0} + v_y \frac{\partial y}{\partial x_0} + v_z \frac{\partial z}{\partial x_0} \right)^2 \right] \quad (13)$$

avec des formules correspondantes pour y_y et z_z .

b) Considérons trois points P, Q, R ayant les coordonnées

$$x_0, y_0, z_0; \quad x_0 + dx_0, y_0, z_0; \quad x_0, y_0 + dy_0, z_0$$

dans l'état initial. Dans cet état le cosinus de l'angle entre PQ et PR est zéro et dans l'état actuel ce cosinus a une petite valeur qui est donnée par l'équation (12) et qu'on peut prendre pour la mesure du glissement x_y ou y_x dans le plan $x_0 y_0$. On trouve

$$x_y = y_x = \frac{\partial x}{\partial x_0} \frac{\partial x}{\partial y_0} + \frac{\partial y}{\partial x_0} \frac{\partial y}{\partial y_0} + \frac{\partial z}{\partial x_0} \frac{\partial z}{\partial y_0} + \frac{1}{c^2 - v^2} \left(v_x \frac{\partial x}{\partial x_0} + v_y \frac{\partial y}{\partial x_0} + v_z \frac{\partial z}{\partial x_0} \right) \left(v_x \frac{\partial x}{\partial y_0} + v_y \frac{\partial y}{\partial y_0} + v_z \frac{\partial z}{\partial y_0} \right) \quad (14)$$

et des équations de la même forme pour y_z et z_x .

Remarquons que, dans le cas où les vitesses v sont nulles, ou négligeables par rapport à la vitesse de la lumière, on est ramené aux valeurs qu'on attribue à x_x, \dots, x_y, \dots dans la théorie ordinaire de l'élasticité.

§ 9. Nous emprunterons maintenant à cette dernière théorie l'expression pour l'énergie de déformation. Sa valeur par unité de volume sera donnée par

$$U = A(x_x^2 + y_y^2 + z_z^2) + \frac{1}{2}B(x_x + y_y + z_z)^2 + \frac{1}{2}A(x_y^2 + y_x^2 + z_x^2), \quad (15)$$

où A et B sont les modules d'élasticité. C'est la formule qui convient aux corps isotropes.

La partie matérielle de la fonction de LAGRANGE devient maintenant

$$L_2 = - \int U dS, \quad (16)$$

l'intégrale étant étendue à l'espace S occupé par l'électron.

On peut vérifier par des calculs directs que les expressions (11), (12), (13), (14) et par conséquent la valeur de U sont invariantes (§ 2).

Rappelons encore que, dans la théorie ordinaire de l'élasticité, les tensions intérieures du corps, X_x, \dots, X_y, \dots se déduisent immédiatement de l'expression pour U ;

$$X_x = \frac{\partial U}{\partial x_x} = 2Ax_x + B(x_x + y_y + z_z), \dots,$$

$$X_y = Y_x = \frac{\partial U}{\partial x_y} = Ax_y, \dots$$

§ 10. Nous distinguerons maintenant différents cas ou différents états de l'électron, commençant par le plus simple qu'on puisse imaginer et finissant par un état qui s'approche autant que possible de l'état dans lequel l'électron se trouve lorsque, tout en tournant autour d'un axe, il décrit une orbite. Nous distinguerons ces différents états par des indices 0, 1, ... et nous désignerons les coordonnées et le temps dans le premier cas par x_0, y_0, z_0, t_0 , dans le deuxième par x_1, y_1, z_1, t_1 , etc. S'il y a une relation, par exemple entre x_0, y_0, z_0, t_0 et x_1, y_1, z_1, t_1 , on doit penser à un même point de la substance de l'électron.

Les grandeurs relatives à l'état qui se rapproche autant que possible de l'état de mouvement réel, seront représentées par des symboles sans indices.

Nous supposons que, dans le cas M_0 , l'électron soit sans charge, qu'il se trouve en repos et qu'il ait la forme d'une sphère. Nous placerons l'origine des coordonnées au centre. C'est cet état M_0 que nous prendrons pour l'état initial dont il a été question au § 8.

§ 11. Figurons nous maintenant que la charge est communiquée

à l'électron, de telle manière qu'elle est fixée à la substance et qu'elle est distribuée symétriquement autour du centre (Cas M_1). Il se produira une dilatation, de sorte qu'on pourra écrire

$$x_1 = (1 + \sigma)x_0, \quad y_1 = (1 + \sigma)y_0, \quad z_1 = (1 + \sigma)z_0,$$

où σ est une fonction de la distance au centre

$$l = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}. \quad (17)$$

La densité de la charge sera également une fonction de cette distance, et quand elle est donnée on peut déterminer σ par les formules bien connues de l'élasticité. Si, par exemple, une sphère pleine de rayon R porte une charge superficielle e uniformément distribuée, la surface est assujettie à une tension normale

$$\frac{e^2}{32\pi^2 R^4},$$

qui produit une dilatation uniforme

$$\sigma = \frac{e^2}{32\pi^2 (2A + 3B) R^4}. \quad (18)$$

§ 12. Nous passons au cas suivant M_2 en communiquant à la sphère une rotation uniforme autour d'un diamètre de direction constante. Pour ne pas trop compliquer les calculs nous considérons la vitesse angulaire ω comme une grandeur infiniment petite, dont le carré peut être négligé. Cela nous permet de faire abstraction de l'aplatissement qui accompagnera la rotation. On reconnaît facilement que cette déformation qui est due aux tensions magnétiques, dont l'effet est plus ou moins analogue à celui d'une force centrifuge, est proportionnelle à ω^2 .

Nous introduisons maintenant les coordonnées x_2, y_2 et z_2 rapportées à des axes qui sont considérés comme immobiles, l'origine étant toujours au centre. Les axes des x_1, y_1, z_1 , qui ont des positions fixes dans la substance de l'électron, auront, dans le système x_2, y_2, z_2 , la vitesse de rotation ω , dont les composantes dans les directions x_2, y_2, z_2 seront représentées par $\omega_x, \omega_y, \omega_z$. Ces composantes auront des valeurs constantes, et les vitesses d'un point quelconque de l'électron seront données par

$$\omega_y z_2 - \omega_z y_2, \dots$$

Remarquons ici que la rotation qu'on a fait intervenir dans l'ap-

plication aux lignes spectrales n'est pas du tout infiniment lente. Il a fallu attribuer la valeur $h/2\pi$ au moment de la quantité de mouvement et cela exige, avec une grandeur plausible du rayon de l'électron, des vitesses équatoriales même supérieures à la vitesse de la lumière. Inutile d'ajouter que de telles vitesses sont incompatibles avec le principe de la relativité ¹⁾.

§ 13. Grâce au principe de la relativité on peut déterminer exactement ce que devient l'état de l'électron considéré au paragraphe précédent si on lui communique une vitesse de translation v constante. Il suffit pour cela d'appliquer les formules (1) après y avoir remplacé x, y, z, t par x_2, y_2, z_2, t_2 et x', y', z', t' par x, y, z, t . Les relations ainsi obtenues

$$\left. \begin{aligned} x &= x_2 + \frac{a^2}{(a+1)c^2} v_x(x_2 v_x + y_2 v_y + z_2 v_z) + a v_x t_2, \\ &\dots \dots \dots \\ t &= a t_2 + \frac{a}{c^2} (x_2 v_x + y_2 v_y + z_2 v_z) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

nous serviront à déterminer la configuration de l'électron dans le système x, y, z, t pour un temps déterminé t , si la configuration dans le système x_2, y_2, z_2, t_2 pour une valeur déterminée t_2 du temps t_2 est connue, les valeurs de t et de t_2 étant reliées entre elles par la relation

$$t = a t_2 \quad (20)$$

qui n'est autre chose que la dernière des équations (10) appliquée au centre.

¹⁾ Supposons que, dans un système x, y, z, t , l'électron tourne autour de l'axe des z , le centre étant en repos. Considérons un rayon qui à l'instant t coïncide avec l'axe des y ; un point P de ce rayon aura la vitesse

$$w_x = -\omega y$$

dans la direction x .

Appliquons maintenant les formules (1) avec $v_y = 0, v_z = 0$. Dans le nouveau système x', y', z', t' , la vitesse du point P sera

$$w'_x = \frac{-\omega y + v_x}{1 - v_x \omega y / c^2}.$$

Pour le centre cela devient v_x . Si l'on suppose que ωR est plus grand que c et si l'on donne à v_x une valeur comprise entre $c^2/\omega R$ et c , on voit que w'_x change de signe pour $y = v_x/\omega$ et pour $y = c^2/v_x \omega$, devenant zéro au premier point et infini au second. Il suffirait donc de communiquer à l'électron une vitesse de translation de la grandeur indiquée (inférieure à c) pour briser la continuité dans son intérieur.

Le temps t étant maintenu constant, on voit que, pour un point quelconque P de l'électron, t_2 différera de \underline{t}_2 et que les coordonnées x_2, y_2, z_2 à l'instant t_2 différeront des valeurs qu'elles ont à l'instant \underline{t}_2 , pour lesquelles nous écrirons $\underline{x}_2, \underline{y}_2, \underline{z}_2$. Les différences $x_2 - \underline{x}_2, y_2 - \underline{y}_2, z_2 - \underline{z}_2$ proviennent de la rotation, dans le cas M_2 , pendant l'intervalle de temps $t_2 - \underline{t}_2$, et comme les produits $\omega_x(t_2 - \underline{t}_2), \dots$ sont considérés comme infiniment petits, on peut poser

$$\left. \begin{aligned} x_2 - \underline{x}_2 &= (\omega_y \underline{z}_2 - \omega_z \underline{y}_2) (t_2 - \underline{t}_2), \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Si, des huit équations (19), (20) et (21), on élimine x_2, y_2, z_2, t_2 et \underline{t}_2 on trouve x, y, z exprimés en fonction de t et de $\underline{x}_2, \underline{y}_2, \underline{z}_2$. On obtient pour le centre

$$x_m = v_x t \quad , \quad y_m = v_y t \quad , \quad z_m = v_z t$$

et pour un point quelconque

$$\left. \begin{aligned} x - x_m &= \underline{x}_2 + \frac{1}{c^2} (\underline{x}_2 v_x + \underline{y}_2 v_y + \underline{z}_2 v_z) \times \\ &\times \left[-\frac{a}{a+1} v_x \left(1 + \frac{\Omega}{c^2} \right) + \underline{y}_2 \omega_z - \underline{z}_2 \omega_y \right], \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

où

$$\Omega = v_x (\underline{y}_2 \omega_z - \underline{z}_2 \omega_y) + \dots$$

§ 14. Nous nous servirons de ces formules pour calculer le moment électrique p de l'électron dont il a été question au § 5. Si e_P est la charge du point considéré P , la première composante de ce moment a la grandeur

$$\sum e_P (x - x_m),$$

ce qui, après substitution de la valeur (22), se réduit aux sommes

$$\sum e_P \underline{x}_e, \dots \quad ; \quad \sum e_P \underline{x}_e^2, \dots \quad ; \quad \sum e_P \underline{x}_e \underline{y}_e, \dots$$

Etant donnée la symétrie de la distribution des charges dans le cas M_2 , on voit que les trois premières et les trois dernières sommes s'annulent et que chacune des trois autres est égale au tiers de leur somme. Notons aussi que le terme en Ω disparaît parce qu'il

y entre un terme qu'on déduit du déterminant Ω en y remplaçant x_2, y_2, z_2 par v_x, v_y, v_z .

En fin de compte on trouve pour le moment électrique

$$p_x = P(v_y \omega_z - v_z \omega_y), \dots \quad (23)$$

où

$$P = \frac{1}{3c^2} \sum e_P l^2, \quad (24)$$

l étant la distance au centre dont la valeur est donnée par la formule (17).

§ 15. Ce n'est que dans le cas d'une translation rectiligne et uniforme que les formules (23) sont rigoureusement exactes. Cependant, on peut les admettre en première approximation quand on considère un électron qui décrit une orbite autour d'un noyau. Revenant à l'expression (9) on trouve alors une première partie de la fonction de LAGRANGE cherchée

$$L'_1 = -P \begin{vmatrix} v_x & v_y & v_z \\ E_x & E_y & E_z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix}. \quad (25)$$

Soient maintenant j , aux composantes j_x, j_y, j_z , l'accélération du centre de l'électron, e sa charge totale et m sa masse. On aura

$$eE = mj$$

et par conséquent

$$L'_1 = -\frac{mP}{e} \begin{vmatrix} v_x & v_y & v_z \\ j_x & j_y & j_z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix} \quad (26)$$

Je dois à M. A. D. FOKKER la remarque que, pour déterminer la fonction de LAGRANGE, on doit tenir compte des changements que la translation et la rotation de l'électron, si elles existent simultanément, produisent dans la distribution de la charge.

Du reste, dans les cas qu'on a eu à considérer, le terme que nous venons de calculer est très petit par rapport aux termes principaux dans la fonction de LAGRANGE, tels que $\frac{1}{2}mv^2$ et $-e_N e / 4\pi r$. Son influence sur la fréquence d'une raie spectrale est comparable aux effets dont il s'agit dans la théorie relativiste par laquelle M. SOMMERFELD a expliqué la structure fine des raies. C'est pour cela

qu'il n'est pas nécessaire de pousser l'approximation plus loin dans la détermination de L'_1 .

Si la charge de l'électron se trouve à la surface, l'expression (24) prend la valeur $eR^2/3c^2$. Le coefficient dans la formule (26) devient alors $-mR^2/3c^2$, ou, si on prend pour m la valeur bien connue de la masse électromagnétique, $-e^2R/18\pi c^4$.

§ 16. Nous allons examiner dans ce qui suit la partie L''_1 de la fonction de LAGRANGE qui provient de l'action entre l'électron et son propre champ électromagnétique et la partie L_2 (§ 9) qui est due à la déformation. Cela nous conduira à des termes de la même forme que (26) et du même ordre de grandeur.

Comme ce sont ces petites grandeurs qui nous intéressent spécialement, nous nous bornerons dans le résultat final aux termes dans lesquels il y a une composante de la vitesse du centre, multipliée par une composante de l'accélération et par une composante de ω et qui, du reste, ne contiennent que des facteurs constants.

Même avec cette simplification les calculs deviennent très laborieux, mais heureusement on peut les abrégier considérablement, parce qu'on peut montrer d'abord que les composantes de v , de j et de ω doivent nécessairement être combinées entre elles comme elles le sont dans le déterminant de la formule (26). Cela découle de certaines considérations sur la symétrie qu'il suffira d'indiquer brièvement.

a) La fonction de LAGRANGE doit avoir la même valeur pour l'électron e et pour un autre e' qui se meut de telle manière qu'il est à chaque instant l'image de e par rapport à un plan fixe. Si ce dernier est perpendiculaire à l'axe des z , l'expression $v_x j_x \omega_y$ aura des signes opposées pour e et pour e' ; il en sera de même pour $v_x j_y \omega_z$. De tels termes ne peuvent donc pas se présenter dans la fonction cherchée.

b) A cause de la symétrie de l'électron la fonction de LAGRANGE ne doit pas changer de forme par une rotation des axes des coordonnées. Or, par une telle rotation v_x et j_y peuvent devenir ce qu'étaient d'abord $-v_y$ et j_x , la composante ω_z ne changeant pas. Il s'ensuit que, si la fonction de LAGRANGE contient un terme $Av_x j_y \omega_z$, elle doit aussi contenir un terme $-Av_y j_x \omega_z$.

Après avoir ainsi démontré le théorème que je viens d'énoncer, on peut se borner au cas où, à l'instant considéré, il n'y a que les

composantes v_x, j_y, ω_z , toutes les autres étant nulles. Si, dans cette supposition, on calcule le coefficient du seul terme $A v_x j_y \omega_z$, on peut être sûr que, dans le cas général, on aura, avec ce même coefficient, le déterminant formé avec les neuf composantes de v, j et ω .

§ 17. Pour les calculs qui restent à faire il est tout d'abord nécessaire de se former une idée aussi exacte que possible de la configuration d'un électron dont le centre a un mouvement quelconque et qui, en même temps, tourne autour d'un diamètre. Supposons donc que les coordonnées x_m, y_m, z_m soient des fonctions données de t ; alors il en sera de même des composantes v_x, v_y, v_z de la vitesse du centre et de la grandeur a que nous définirons toujours par la formule (2). Prenons maintenant comme relation entre t et t_2 , au lieu de (20),

$$t_2 = \int_0^t \frac{dt}{a}, \quad (27)$$

ce qui implique qu'on a simultanément $t = 0$ et $t_2 = 0$, et que, entre les intervalles correspondants dt et dt_2 , il y a la relation

$$dy = a dt_2,$$

comme au § 13, mais maintenant avec un a variable.

Cela posé, nous obtiendrons le cas M , mentionné déjà au § 10, en supposant qu'à un instant déterminé t les coordonnées x, y, z d'un point de l'électron sont données par les équations (22) si on y prend pour $x_m, y_m, z_m, v_x, v_y, v_z$ et a leurs valeurs variables et pour x_2, y_2, z_2 les coordonnées dans le cas M_2 pour l'instant t_2 qui correspond à la valeur choisie pour t .

Notons que le cas M est ainsi parfaitement défini, mais que la transformation par laquelle on passe de M_2 à M n'est plus une transformation de relativité. Remarquons aussi que maintenant l'état imaginé M ne sera pas un état de mouvement libre comme il le serait en l'absence d'une accélération; il différera d'un tel état libre par des grandeurs qui seront nécessairement proportionnelles à l'accélération j . Cependant nous pouvons imaginer que ce mouvement M soit réalisé par l'application de certaines forces extérieures convenablement choisies. Nous pourrions déterminer ces forces, à l'aide du théorème de HAMILTON, et après cela nous pourrions trouver facilement les légères modifications dans le mouvement qu'il y aura si les forces en question n'existent pas.

§ 18. Soit $t = 0$ l'instant pour lequel nous désirons connaître la fonction de LAGRANGE et supposons qu'à ce moment le centre de l'électron ait une vitesse dans la direction des x et une accélération dans celle des y , la seule composante de la vitesse de rotation étant ω_x , qui est regardée comme constante (§ 12).

Désignons par x_{m0}, y_{m0}, z_{m0} les coordonnées du centre à l'instant $t = 0$, par v_{x0} et j_{y0} la vitesse et l'accélération qui viennent d'être nommées, et bornons nous à des temps voisins de $t = 0$, nous limitant, ce qui suffira pour notre but, à des termes en t^2 . On peut écrire alors

$$x_m = x_{m0} + v_{x0} t, \quad y_m = y_{m0} + \frac{1}{2} j_{y0} t^2, \quad z_m = z_{m0},$$

$$v_x = v_{x0}, \quad v_y = j_{y0} t, \quad v_z = 0$$

et

$$a = 1,$$

parce que nous négligeons

$$v^2 = v_{x0}^2 + j_{y0}^2 t^2,$$

cette expression ne contenant pas de terme avec $v_{x0} j_{y0}$ qu'il faudrait conserver (§ 16).

En vertu de la valeur de a on a

$$\underline{t}_2 = t,$$

et par conséquent, si on suppose que les axes des x_1, y_1, z_1 et des x_2, y_2, z_2 coïncident à l'instant $t_2 = 0$,

$$\underline{x}_2 = x_1 - \omega_x y_1 t_1, \quad \underline{y}_2 = y_1 + \omega_x x_1 t_1, \quad \underline{z}_2 = z_1.$$

Si, après avoir substitué toutes ces valeurs dans les équations (22), nous supprimons les indices 0, nous trouvons

$$\left. \begin{aligned} x - x_m &= (x_1 + \frac{1}{c^2} v_x \omega_x x_1 y_1) + \\ &+ (v_x - \omega_x y_1 - \frac{1}{2c^2} v_x j_v y_1 + \frac{1}{c^2} j_v \omega_x y_1^2) t - \frac{1}{2c^2} v_x j_v \omega_x x_1 t^2, \\ y - y_m &= (y_1 - \frac{1}{c^2} v_x \omega_x x_1^2) + \\ &+ (\omega_x x_1 - \frac{1}{2c^2} v_x j_v x_1 - \frac{1}{c^2} j_v \omega_x x_1 y_1) t + (\frac{1}{2} j_v + \frac{1}{2c^2} v_x j_v \omega_x y_1) t^2, \\ z - z_m &= z_1. \end{aligned} \right\} (28)$$

A partir d'ici les grandeurs x_m, y_m, z_m, v_x, j_v seront simplement des constantes. Nous négligerons constamment les carrés de v_x , de j_v et de ω_z comme nous l'avons déjà fait dans les formules que nous venons de déduire.

§ 19. Pour une valeur choisie du temps t les équations (28) nous donnent la position x, y, z d'un point quelconque caractérisée par des valeurs spéciales de x_1, y_1, z_1 , et on pourrait donc aborder directement le calcul de L_1'' et de L_2 . Cependant, il convient de simplifier encore un peu en introduisant un nouveau cas M_3 . On l'obtient par la transformation suivante, qui fait disparaître le terme $v_x t$:

$$\left. \begin{aligned} x_3 &= x - x_m - v_x t & , & & y_3 &= y - y_m \\ z_3 &= z - z_m & , & & t_3 &= t - \frac{v_x}{c^2} (x - x_m) \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Comme nous négligeons le carré de la constante v_x , il s'agit cette fois d'une transformation de relativité.

On trouve maintenant les équations

$$\left. \begin{aligned} x_3 &= (x_1 + \frac{1}{c^4} v_x j_v \omega_z x_1 y_1^2) + \\ &+ (-\omega_z y_1 - \frac{1}{2c^2} v_x j_v y_1 + \frac{1}{c^2} j_v \omega_z y_1^2) t_3 - \frac{1}{2c^2} v_x j_v \omega_z x_1 t_3^2, \\ y_3 &= (y_1 - \frac{1}{c^4} v_x j_v \omega_z x_1^2 y_1) + \\ &+ (\omega_z x_1 + \frac{1}{2c^2} v_x j_v x_1 - \frac{1}{c^2} j_v \omega_z x_1 y_1) t_3 + (\frac{1}{2} j_v - \frac{1}{2c^2} v_x j_v \omega_z y_1) t_3^2, \\ z_3 &= z_1, \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

qui sont pour le cas M_3 ce que les équations (28) sont pour le cas M .

Une différentiation par rapport à t_3 nous fournit les vitesses dans l'état M_3 . Nous les représenterons par le symbole w (la lettre v étant employée pour la vitesse du centre dans le cas M), sans ajouter un indice 3, parce que seules les vitesses appartenant à M_3 apparaîtront dans les formules.

C'est pour le cas M_3 que le calcul de L_1'' et de L_2 sera maintenant effectué. Après cela, en vertu de l'invariance de l'expression (6) et de U (§ 9), nous pourrons passer facilement à l'état M . Com-

me au § 14 tout se réduira à des sommes étendues à l'espace occupé par l'électron dans le cas M_1 .

§ 20. Pour déterminer L_1'' on peut procéder de la manière suivante.

a) Fixant l'attention sur un point déterminé P de l'électron et sur l'instant

$$t_3 = -\frac{1}{c^2} v_x x_{1P} \quad (31)$$

qui, pour ce point, correspond à $t = 0$, on détermine pour un autre point Q la position effective. Si on écrit

$$t_3 = -\frac{1}{c^2} v_x x_{1P} - \tau \quad (32)$$

pour l'instant auquel cette position est atteinte, on aura pour le calcul de τ l'équation

$$(x_{3Q} - x_{3P})^2 + (y_{3Q} - y_{3P})^2 + (z_{3Q} - z_{3P})^2 = c^2 \tau^2, \quad (33)$$

où les coordonnées de P doivent être prises pour l'instant (31) et celles de Q pour l'instant (32).

Pareillement, dans les formules suivantes, les vitesses w_P et w_Q seront prises pour ces instants respectivement.

b) Lorsqu'on a déterminé τ , on connaît par les formules (30) les composantes de w_P et de w_Q , ainsi que les différences des coordonnées. On peut alors calculer le dénominateur de l'expression (4), pour lequel on peut écrire

$$N = c\tau - \frac{1}{c} \left[(x_{3P} - x_{3Q})w_{xQ} + \dots \right].$$

c) On calcule également le numérateur

$$K = 1 - \frac{1}{c^2} (w_{xP} w_{xQ} + \dots),$$

ce qui donnera la valeur de

$$\Psi_3 = \frac{K}{N}.$$

d) Enfin, après avoir tiré des équations (29) la valeur de

$$\frac{dt_3}{dt}$$

pour le point P et l'instant (31), on aura

$$\Psi = \Psi_3 \frac{dt_3}{dt},$$

ce qu'on substituera dans l'expression (5).

§ 21. Voici les résultats de ces calculs:

$$\begin{aligned} \tau = & \frac{1}{c} z_1 + \frac{1}{2c^3} j_v z_1 (\gamma_{1Q} - \gamma_{1P}) + \frac{1}{c^2} \omega_z (x_{1Q} \gamma_{1P} - x_{1P} \gamma_{1Q}) + \\ & + \frac{1}{2c^4} v_z j_v (x_{1P} \gamma_{1Q} + x_{1Q} \gamma_{1P} - 2x_{1P} \gamma_{1P}) + \dots j_v \omega_z - \\ & - \frac{1}{2c^5} v_z j_v \omega_z z_1 (-x_{1P}^2 + 2x_{1P} x_{1Q} - \gamma_{1P} \gamma_{1Q}) + \\ & + \frac{1}{2c^5} v_z j_v \omega_z \frac{1}{z_1} \left[2(x_{1P}^2 + x_{1Q}^2) \gamma_{1P} \gamma_{1Q} - 2x_{1P} x_{1Q} (\gamma_{1P}^2 + \gamma_{1Q}^2) + (x_{1Q} \gamma_{1P} - x_{1P} \gamma_{1Q})^2 \right]. \end{aligned}$$

Le coefficient de $j_v \omega_z$ a été supprimé parce qu'il n'est pas nécessaire de le connaître; z_1 est la distance PQ dans le cas M_1 .

$$x_{3P} = x_{1P} + \frac{1}{c^2} v_z \omega_z x_{1P} \gamma_{1P},$$

$$y_{3P} = y_{1P} - \frac{1}{c^2} v_z \omega_z x_{1P}^2,$$

$$\begin{aligned} x_{3Q} = & x_{1Q} + \frac{1}{c} \omega_z z_1 \gamma_{1Q} + \frac{1}{2c^3} v_z j_v z_1 \gamma_{1Q} + \frac{1}{c^2} v_z \omega_z x_{1P} \gamma_{1Q} - \\ & - \frac{1}{2c^2} j_v \omega_z z_1 \gamma_{1Q} (\gamma_{1Q} + \gamma_{1P}) - \frac{1}{2c^4} v_z j_v \omega_z z_1^2 x_{1Q} + \\ & + \frac{1}{c^4} v_z j_v \omega_z \gamma_{1Q} (x_{1Q} - x_{1P}) (\gamma_{1Q} + \gamma_{1P}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{3Q} = & y_{1Q} + \frac{1}{2c^2} j_v z_1^2 - \frac{1}{c} \omega_z z_1 x_{1Q} + \frac{1}{2c^3} v_z j_v z_1 (2x_{1P} - x_{1Q}) + \\ & + \frac{1}{2c^3} j_v \omega_z z_1 (x_{1Q} \gamma_{1Q} + 3x_{1Q} \gamma_{1P} - 2x_{1P} \gamma_{1P}) - \\ & - \frac{1}{2c^4} v_z j_v \omega_z z_1^2 \gamma_{1Q} - \frac{1}{c^2} v_z \omega_z x_{1P} x_{1Q} + \\ & + \frac{1}{c^4} v_z j_v \omega_z (-x_{1P}^2 \gamma_{1Q} - x_{1Q}^2 \gamma_{1P} - x_{1Q}^2 \gamma_{1Q} + x_{1P} x_{1Q} \gamma_{1Q} + 2x_{1P} x_{1Q} \gamma_{1P}). \end{aligned}$$

Ces valeurs peuvent être vérifiées par substitution directe dans l'équation (33).

Les vitesses deviennent

$$\left. \begin{aligned} w_{xP} &= -\omega_z \gamma_{1P} - \frac{1}{2c^2} v_x j_v \gamma_{1P} + \frac{1}{c^2} j_v \omega_z \gamma_{1P}^2, \\ w_{yP} &= \omega_z x_{1P} - \frac{1}{2c^2} v_x j_v x_{1P} - \frac{1}{c^2} j_v \omega_z x_{1P} \gamma_{1P}, \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} w_{xQ} &= -\omega_z \gamma_{1Q} - \frac{1}{2c^2} v_x j_v \gamma_{1Q} + \frac{1}{c^2} j_v \omega_z \gamma_{1Q}^2 + \frac{1}{c^3} v_x j_v \omega_z z_1 x_{1Q}, \\ w_{yQ} &= -\frac{1}{c} j_v z_1 + \omega_z x_{1Q} + \frac{1}{2c^2} v_x j_v (x_{1Q} - 2x_{1P}) - \\ &\quad - \frac{1}{c^2} j_v \omega_z (x_{1Q} \gamma_{1Q} + x_{1Q} \gamma_{1P} - x_{1P} \gamma_{1Q}) + \frac{1}{c^3} v_x j_v \omega_z z_1 \gamma_{1Q}. \end{aligned}$$

On trouve ensuite

$$\begin{aligned} N &= z_1 - \frac{1}{2c^2} j_v z_1 (\gamma_{1Q} - \gamma_{1P}) + \dots j_v \omega_z + \\ &\quad + \frac{1}{2c^4} v_x j_v \omega_z z_1 (-x_{1P}^2 + 2x_{1P} x_{1Q} - \gamma_{1P} \gamma_{1Q}) + \\ &\quad + \frac{1}{2c^4} v_x j_v \omega_z \frac{1}{r_1} \left[2(x_{1P}^2 + x_{1Q}^2) \gamma_{1P} \gamma_{1Q} - 2x_{1P} x_{1Q} (\gamma_{1P}^2 + \gamma_{1Q}^2) \right. \\ &\quad \left. + (x_{1Q} \gamma_{1P} - x_{1P} \gamma_{1Q})^2 \right], \end{aligned}$$

$$K = 1 + \dots j_v \omega_z + \frac{1}{c^4} v_x j_v \omega_z (x_{1P}^2 - \gamma_{1P} \gamma_{1Q}),$$

$$\frac{dt_3}{dt} = 1 + \frac{1}{c^2} v_x \omega_z \gamma_{1P} - \frac{1}{c^4} v_x j_v \omega_z \gamma_{1P}^2,$$

et enfin

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{1}{r_1} + \dots j_v + \dots j_v \omega_z + \frac{1}{2c^4} v_x j_v \omega_z \frac{1}{r_1} (\dots - 3x_{1P} x_{1Q}) - \\ &\quad - \frac{1}{2c^4} v_x j_v \omega_z \frac{1}{r_3} \left[\dots + (x_{1Q} \gamma_{1P} - x_{1P} \gamma_{1Q})^2 \right]. \end{aligned}$$

§ 22. Si la valeur trouvée pour Ψ est substituée dans l'expres-

sion (5), on obtient d'abord un terme qui contribue à l'une des parties principales de la fonction de LAGRANGE. Les autres termes, qui nous intéressent maintenant, se simplifient considérablement en vertu de la symétrie dans la distribution de la charge. En effet, une somme de la forme $\Sigma \Sigma e_P e_Q f$, dans laquelle f est une fonction des coordonnées x_{1P}, \dots, z_{1Q} , restera la même si on échange les x contre les y , et par conséquent tous les termes que cette intervention ferait changer de signe doivent disparaître. Tels sont tous les termes dans l'expression pour Ψ dont nous avons supprimé les coefficients. En ce qui concerne les deux premiers on pouvait savoir d'avance qu'il en serait ainsi, parce que des considérations telles qu'on les trouve au § 16 font prévoir que dans le résultat il ne peut pas y avoir des termes avec j_y seul ou avec $j_y \omega_z$. C'est pourquoi certains coefficients n'ont pas été calculés.

En fin de compte on trouve, tenant compte de ce qui a été dit au § 16,

$$L_1^{\sigma} = G \begin{vmatrix} v_x & v_y & v_z \\ j_x & j_y & j_z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix},$$

où

$$G = \frac{1}{16\pi c^4} \Sigma \Sigma e_P e_Q \left[\frac{3x_{1P}x_{1Q}}{r_1} + \frac{(x_{1Q}y_{1P} - x_{1P}y_{1Q})^2}{r_1^3} \right].$$

Pour le cas d'une charge superficielle cela devient

$$G = \frac{5e^2 R}{144\pi c^4}.$$

§ 23. Dans le calcul de la partie L_2 de la fonction de LAGRANGE qui provient de la déformation de l'électron, nous nous bornerons au cas qui a été considéré à la fin du § 11. Le coefficient σ a donc la valeur constante (18) et les coordonnées x_1, y_1, z_1 (§ 11) ne se distinguent de x_0, y_0, z_0 que par le facteur constant $1 + \sigma$. Par conséquent, les dérivées $\partial x_3 / \partial x_0, \dots$ qui interviennent dans l'expression de l'énergie potentielle U , pour le cas M_3 , se déduisent directement des dérivées $\partial x_3 / \partial x_1, \dots$ qu'on tire des formules (30) et pour lesquelles, pour autant qu'elles ne s'annulent pas, nous écrirons

$$\frac{\partial x_3}{\partial x_1} = 1 + \mu_{xx}, \quad \frac{\partial y_3}{\partial x_1} = \mu_{yx},$$

$$\frac{\partial x_3}{\partial y_1} = \mu_{xy}, \quad \frac{\partial y_3}{\partial y_1} = 1 + \mu_{yy}, \quad \frac{\partial z_3}{\partial z_1} = 1,$$

de sorte que

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x_3}{\partial x_0} &= (1 + \sigma)(1 + \mu_{xx}), \dots \\ \frac{\partial x_3}{\partial y_0} &= (1 + \sigma)\mu_{xy}, \dots \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Ce sont ces valeurs qu'on doit maintenant substituer dans les formules (13), (14) et (15). Or, les grandeurs σ et μ (c'est-à-dire μ_{xx} , μ_{xy} , ...) seront traitées comme des infiniment petits et dans l'énergie potentielle U nous négligerons tous les termes qui, par rapport à ces grandeurs, sont d'un ordre supérieur au deuxième. Cela veut dire (vu que le terme 1 disparaîtra dans les expressions pour x_z , y_z , z_z) que, dans les dérivées (35) et dans leurs carrés et leurs produits on peut se contenter des termes qui sont linéaires en σ et en μ .

Nous avons donc à substituer

$$\frac{\partial x_3}{\partial x_0} = 1 + \sigma + \mu_{xx}, \quad \frac{\partial y_3}{\partial x_0} = \mu_{yx},$$

$$\frac{\partial x_3}{\partial y_0} = \mu_{xy}, \quad \frac{\partial y_3}{\partial y_0} = 1 + \sigma + \mu_{yy},$$

$$\frac{\partial z_3}{\partial z_0} = 1 + \sigma.$$

Les trois expressions

$$w_x \frac{\partial x_3}{\partial x_0} + w_y \frac{\partial y_3}{\partial x_0} + w_z \frac{\partial z_3}{\partial x_0}, \dots$$

qui figurent dans les équations (13) et (14) pourront être remplacées par

$$w_x, \quad w_y, \quad w_z$$

et comme $w_z = 0$, leurs carrés et leurs produits ne contiendront que les grandeurs

$$w_x^2, \quad w_y^2, \quad w_x w_y$$

pour lesquelles, en vertu des formules (34), on peut écrire

$$\frac{1}{c^2} v_x j_y \omega_z y_1^2, \quad -\frac{1}{c^2} v_x j_y \omega_z x_1^2, \quad 0.$$

Quant au dénominateur $c^2 - w^2$, on peut lui substituer c^2 parce que, de nouveau en vertu de (34), w^2 ne contient pas de terme en $v_x j_y \omega_z$.

§ 24. Ces considérations nous conduisent aux valeurs suivantes:

$$x_x = \sigma + \mu_{xx} + \frac{1}{2c^4} v_x j_y \omega_z y_1^2,$$

$$y_y = \sigma + \mu_{yy} - \frac{1}{2c^4} v_x j_y \omega_z x_1^2,$$

$$z_z = \sigma,$$

$$x_y = \mu_{xy} + \mu_{yx}, \quad y_x = 0, \quad z_x = 0.$$

Il vient donc, après substitution de

$$\mu_{xx} = \frac{1}{c^4} v_x j_y \omega_z y_1^2, \quad \mu_{yy} = 0,$$

qu'on déduit de (30),

$$U = \frac{1}{2c^4} v_x j_y \omega_z (2A + 3B) \sigma (3y_1^2 - x_1^2).$$

C'est l'énergie potentielle par unité de volume, non seulement dans le cas M_3 pour lequel elle a été calculée, mais aussi pour le cas M . Comme les équations (28) montrent que, pour le moment considéré $t = 0$, le rapport entre deux éléments correspondants dS et dS_1 ne diffère de l'unité que par un terme qui contient $v_x \omega_z$, dS peut être remplacé par dS_1 dans l'intégrale (16). De cette manière on trouve comme résultat final, si l'on introduit la valeur (18) de σ

$$L_{\mathbf{H}} = H \begin{vmatrix} v_x & v_y & v_z \\ j_x & j_y & j_z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix}$$

avec le coefficient

$$H = -\frac{e^2 R}{120\pi c^4}.$$

Il est curieux de remarquer comment les modules d'élasticité ont disparu du résultat, de sorte que la valeur de L est devenue indépendante des propriétés spéciales de la substance de la sphère chargée; on peut, par exemple, la supposer aussi „dure” qu'on le désire. Cependant, il est très probable que d'autres hypothèses sur la structure de l'électron amèneraient des résultats différents.

§ 25. Il nous reste à examiner comment l'influence des termes L'_1 , L''_1 et L_2 se fait sentir dans le mouvement de l'électron. Nous nous occuperons seulement de la rotation; ainsi, en appliquant le principe de HAMILTON, nous ne donnerons aucun déplacement virtuel au centre. Rien ne sera changé aux éléments des deuxièmes lignes dans les déterminants (25) et (26) ni à leurs rapports, de sorte que nous pouvons maintenant employer (26) au lieu de (25) (ce qui ne serait pas permis, s'il s'agissait du mouvement du centre). Les trois fonctions peuvent ensuite être réunies en une seule pour laquelle nous écrivons

$$L = I \begin{vmatrix} v_x & v_y & v_z \\ \dot{j}_x & \dot{j}_y & \dot{j}_z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix}. \quad (36)$$

Nous avons déjà fait remarquer que l'état M que nous avons considéré dans ce qui précède n'est pas un état de mouvement libre; pour le réaliser nous devons appliquer aux points de l'électron certaines forces extérieures F que le théorème de HAMILTON peut nous faire connaître. Imaginons maintenant qu'on supprime ces forces, ou qu'on introduise un système de forces égales et opposées — F ; on obtiendra alors l'état M' qui existe en réalité.

Or, au § 17, nous avons établi une correspondance entre les configurations successives dans les deux cas M et M_2 , correspondance qui est exprimée par les équations (27) et (22). Comme nous avons posé $a = 1$, la première de ces formules nous dit qu'il y a correspondance entre les états qui existent simultanément dans les deux cas. Les équations (22), dans lesquelles nous écrivons maintenant x_2, y_2, z_2 , nous font connaître la relation entre les configurations correspondantes, les coefficients dans ces formules étant des fonctions données du temps.

Nous servant toujours de ces formules nous pouvons concevoir un état M'_2 qui correspond à l'état M' et il est clair que notre pro-

blème sera résolu si nous parvenons à déterminer ce mouvement M'_2 . Si, par exemple, il est caractérisé par une précession de l'axe de rotation, nous aurons dans le cas réel M' cette même précession légèrement modifiée conformément aux formules (22).

Comme on passe de M à M' si l'on fait agir les forces $-F$, de même un système de forces $-F_2$, qu'on peut appeler les forces correspondantes, changera l'état M_2 en M'_2 .

Nous devons maintenant imaginer des déplacements virtuels. Ici encore, on peut mettre en comparaison les deux cas. Pour toute configuration variée de M_2 il y en aura une de M , et pour tout déplacement virtuel de M_2 il y aura un déplacement correspondant de M .

Les équations (22) sont telles que les différences entre les grandeurs correspondantes x et x_2, \dots sont très petites par rapport aux valeurs que ces grandeurs peuvent avoir; cela est dû aux facteurs comme $v_x, \dots, \omega_x, \dots$ qui entrent dans les coefficients. On peut en conclure qu'en général deux grandeurs qui se correspondent sont, dans le même sens, peu différentes; il en sera ainsi, par exemple, du travail de forces correspondantes pour des déplacements correspondants. Le travail virtuel dans le cas M , que nous déduirons de la fonction (36) sera trouvé être proportionnel à v , à j et à ω , et dans la différence entre ce travail et le travail correspondant pour le cas M_2 , il y aura encore de nouveaux facteurs comme $v_x, \dots, \omega_x, \dots$. Les travaux virtuels correspondants peuvent donc être considérés comme égaux.

Bien que l'expression (36) ait été déduite dans la supposition spéciale d'une vitesse de rotation constante, nous l'appliquerons aussi au cas général d'une vitesse variable. Cela sera permis pourvu que les changements de ω soient suffisamment lents.

§ 26. Prenons maintenant comme déplacements virtuels dans le système M_2 une rotation infiniment petite aux composantes $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$; ces grandeurs seront des fonctions quelconques du temps qui s'annulent aux limites t_1 et t_2 (§ 3). Nous avons alors des déplacements virtuels correspondants dans le système M et le mouvement varié de ce système correspondra à celui de M_2 qui n'est autre chose qu'une rotation avec des vitesses variables; par conséquent la formule (35) s'applique aussi bien au mouvement varié qu'au mouvement réel.

On trouve par de simples considérations cinématiques

$$\delta\omega_x = \frac{d\varepsilon_x}{dt} + \omega_z\varepsilon_y - \omega_y\varepsilon_z, \dots$$

ce qui nous donne

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial\omega_x} \frac{d\varepsilon_x}{dt} + \dots + \left(\omega_y \frac{\partial L}{\partial\omega_x} - \omega_z \frac{\partial L}{\partial\omega_y} \right) \varepsilon_x + \dots$$

et, en vertu de l'équation (3),

$$-\delta W = \left\{ -\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial\omega_x} \right) + \omega_y \frac{\partial L}{\partial\omega_x} - \omega_z \frac{\partial L}{\partial\omega_y} \right\} \varepsilon_x + \dots$$

Cette expression $-\delta W$ est, dans le système M , le travail virtuel des forces que nous avons appelées $-F$; elle représente donc aussi le travail virtuel des forces $-F_2$ pour la rotation virtuelle ε . On peut en conclure que ces forces $-F_2$ donnent lieu à un couple aux composantes

$$C_x = -\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial\omega_x} \right) + \omega_y \frac{\partial L}{\partial\omega_x} - \omega_z \frac{\partial L}{\partial\omega_y},$$

.

Il ne nous reste qu'à déterminer l'influence de ce couple; nous parviendrons ainsi à connaître le mouvement M'_2 .

Les dérivées de L qui entrent dans les dernières formules ont les valeurs

$$\frac{\partial L}{\partial\omega_x} = I(v_y j_z - v_z j_y), \dots$$

En vertu de la loi des aires elles seraient constantes et par conséquent les premiers termes de C_x, \dots s'annuleraient si le mouvement dans l'orbite ne fût pas dérangé par le mouvement de rotation.

Les autres termes de C_x, \dots représentent un couple dont l'axe est normal à celui de ω . Ce couple laisse donc constante la vitesse de rotation, mais donne lieu à une précession de l'axe de rotation. Cet axe se déplace avec une vitesse angulaire dont, si Q est le moment d'inertie, les composantes sont données par

$$-\frac{I}{Q} (v_y j_z - v_z j_y), \dots$$

L'axe de rotation tourne donc à chaque instant autour d'un axe qui est perpendiculaire au plan de l'orbite.

§ 27. Je terminerai cette étude par quelques remarques.

a) Le mouvement de l'axe de rotation que nous venons de déterminer est accompagné d'une précession semblable du plan de l'orbite, qu'on déduit également de la fonction de LAGRANGE trouvée.

b) L'équation de HAMILTON peut nous faire connaître non seulement le couple des forces, mais les forces individuelles mêmes qui le produisent. Seulement, on doit considérer pour cela des déplacements virtuels quelconques et les calculs deviendraient extrêmement compliqués.

En réduisant tout au simple cas M_2 (sans autre mouvement que la rotation), dans lequel on peut se servir de la mécanique ordinaire, nous pouvions être sûrs que la connaissance du couple résultant suffirait pour notre but; cela nous permettait de nous borner à une rotation comme déplacement virtuel.

c) Il a été nécessaire d'appliquer la formule (36) à des cas où la vitesse de rotation n'est pas constante. En effet, même si ω serait constant dans le mouvement réel, il ne pourrait pas l'être pour le mouvement varié, parce que ϵ qui doit s'annuler aux limites t_1 et t_2 doit être variable. Il est fort probable que, si la rotation n'est pas constante, il y aura des termes avec ω_x , etc. dans la fonction de LAGRANGE, comme, du reste, elle peut contenir aussi, à la rigueur, des termes avec les dérivées de j_x, \dots par rapport au temps. Cela donnerait lieu à de nouveaux termes dans les équations finales, mais on peut prévoir que leur influence sera très minime dans les cas qu'on a eu à étudier. Si, par exemple, à côté d'un des termes avec ω_x , il y en avait un autre dans lequel ce facteur serait remplacé par ω_x , cette dernière grandeur devrait nécessairement être multipliée par un certain temps T qui joue un rôle dans le problème, tel que la période de révolution de l'électron ou même le temps que la lumière met à parcourir une dimension du système. Tant que le changement de ω_x dans cet intervalle T reste très petit, par rapport à ω_x même, le terme en ω_x pourra être négligé.