

**Natuurkunde.** — De Heer H. A. LORENTZ biedt eene mededeeling aan mede namens den Heer J. DROSTE: „*De beweging van een stelsel lichamen onder den invloed van hunne onderlinge aantrekking, behandeld volgens de theorie van EINSTEIN.*” I.

(Aangeboden in de vergadering van 27 Januari 1917).

§ 1. De tweede van ons heeft voor eenigen tijd doen zien<sup>1)</sup> hoe het gravitatieveld van lichamen met gegeven beweging, nauwkeurig tot in grootheden van de tweede orde, met behulp der door EINSTEIN opgestelde veldvergelijkingen bepaald kan worden. Daarmede werd de mogelijkheid gegeven, de beweging van een „stoffelijk punt” in dat veld te onderzoeken, n.l. van een lichaam, zoo klein, dat van het veld dat het zelf teweegbrengt, kan worden afgezien.

Wij zullen ons thans bezig houden met de beweging van een stelsel lichamen van willekeurige grootte onder elkaars wederkeerige aantrekking. Ook hierbij zullen wij tot in grootheden van de tweede orde gaan, maar om de berekeningen niet al te ingewikkeld te maken, zullen wij eenige vereenvoudigende onderstellingen invoeren. Wij nemen aan dat de afmetingen der lichamen klein zijn in vergelijking met de onderlinge afstanden, en dat dus de „vloedwerkingen” niet in aanmerking komen. Verder dat de beweging van elk lichaam geacht kan worden, een translatie te zijn, en eindelijk dat de lichamen uit onsamendrukbare vloeistof bestaan. Deze laatste onderstelling voeren wij in ten einde tot geheel bepaalde uitkomsten te geraken. Men mag echter verwachten, hoewel het zonder nader onderzoek niet zeker is, dat de eindvergelijkingen voor lichamen van anderen aard denzelfden vorm zullen hebben. Dank zij de genoemde vereenvoudigingen blijkt het mogelijk, de bewegingsvergelijkingen in den kanonischen vorm te brengen, met een functie van LAGRANGE, die alleen van de oogenblikkelijke onderlinge afstanden en de snelheden afhangt.

De drie ruimtcoördinaten  $x_1, x_2, x_3$  kunnen bij de inleidende beschouwingen onbepaald worden gelaten, maar worden daarna ondersteld (§ 5), rechthoekige cartesische coördinaten te zijn.

<sup>1)</sup> J. DROSTE, Het zwaartekrachtsveld van een of meer lichamen volgens de theorie van EINSTEIN. Diss. Leiden, 1916. Ook: Het veld van  $n$  bewegende centra in EINSTEIN's theorie der zwaartekracht, dit Zittingsverslag, 25 (1916), p. 460. Deze verhandelingen zullen als A en B worden aangehaald.

§ 2. Wij zullen vooreerst, in aansluiting aan een paar vroegere mededeelingen <sup>1)</sup> en gebruik makende van het daarin op den voorgrond gestelde variatiebeginsel, de algemeene bewegingsvergelijkingen, de spannings-energiecomponenten en de veldvergelijkingen bespreken.

Wij schrijven weer  $\varrho$  voor de „dichtheid”,  $v_a$  voor de componenten der snelheid ( $v_4 = 1$ ) en wij stellen <sup>2)</sup>

$$w_a = c\varrho v_a, \dots \dots \dots (1)$$

$$u_a = \sum (b_{ab} w_b), \dots \dots \dots (2)$$

$$P = \sqrt{\sum (a) u_a w_a} \dots \dots \dots (3)$$

Als functie van LAGRANGE nemen wij <sup>3)</sup>

$$L = -\sqrt{-g} \varphi \left( \frac{P}{\sqrt{-g}} \right), \dots \dots \dots (4)$$

waarin  $\varphi$  een functie is, die van den aard der vloeistof afhangt. Is  $dS$  een in  $x_1, x_2, x_3, x_4$ -maat uitgedrukt element der vierdimensionale veldfiguur, dan is de principale functie der vloeistof

$$\int L dS$$

en de bewegingsvergelijkingen kunnen worden afgeleid uit de voorwaarde dat, onder nader aan te geven beperkingen,

$$\delta \int L dS + \int \sum (a) K_a \delta x_a dS = 0. \dots \dots \dots (5)$$

is. Hierin stellen de grootheden  $\delta x_a$  virtueele verplaatsingen van de punten der wereldlijnen voor en  $K_a$  de componenten van zekere uitwendige krachten, die voorloopig ondersteld worden op de vloeistof te werken. Bij verg. (5) is het de bedoeling dat de grootheden  $g_{ab}$  niet gevarieerd worden.

Wij zullen aannemen dat slechts van één der lichamen de beweging gevarieerd wordt. De wereldlijnen van de punten daarvan beslaan een „buisvormig” gebied, begrensd door een drie-dimensionale uitgebreidheid  $\sigma$ , waarin de wereldlijnen van de punten van het vloeistoffoppervlak liggen. Van dat gebied beschouwen wij nu

<sup>1)</sup> H. A. LORENTZ, Het beginsel van HAMILTON in EINSTEIN's theorie der zwaartekracht, dit Zittingsverslag, 23 (1915), p. 1073, in het vervolg aangehaald als C.

H. A. LORENTZ, Over EINSTEIN's theorie der zwaartekracht III, dit Zittingsverslag, 25 (1916), p. 468. Aangehaald als D.

<sup>2)</sup> De notaties onderscheiden zich van die van C in zooverre dat de snelheid van het licht in een veld zonder gravitatie niet meer  $= 1$  is gesteld, maar door  $c$  is voorgesteld.

<sup>3)</sup> In tegenstelling met D, § 43 is hier het negatieve teeken ingevoerd; dien-tengevolge wordt de functie  $\varphi$  zelf positief.

het deel  $S$  tusschen twee doorsneden  $\Sigma$  en  $\Sigma'$ , welke doorsneden beantwoorden aan bepaalde waarden van den tijd  $x_4$ . Om de gedachten te bepalen nemen wij aan dat  $\delta x_4$  alleen van  $x_4$  maar niet van  $x_1, x_2, x_3$  afhangt, terwijl  $\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3$  doorlopende functiën van  $x_1, x_2, x_3, x_4$  zijn. Aan  $\Sigma$  en  $\Sigma'$  zullen alle variaties verdwijnen, maar niet aan het oppervlak  $\sigma$ ; hier kunnen zij zelfs tot een verplaatsing van dit laatste naar binnen of naar buiten aanleiding geven.

§ 3. Wij verstaan nu onder  $\delta L$  de variatie van  $L$  in een vast punt der veldfiguur en vatten den eersten term in (5) zoo op, dat voor en na de variatie  $\int L dS$  moet genomen worden over het gebied tusschen  $\Sigma$  en  $\Sigma'$ , dat telkens door de wereldlijnen wordt ingenomen. Gaan wij dan te werk alsof  $x_1, x_2, x_3, x_4$  rechthoekige coördinaten zijn, en verstaan wij onder  $q_1, \dots, q_4$  de richtingsconstanten van de aan  $\sigma$  naar buiten getrokken normaal, dan is

$$\delta \int L dS = \int \delta L dS + \int L \Sigma (a) q_a \delta x_a d\sigma \quad \dots \quad (6)$$

Wij hebben nu (verg. C, § 5), als wij

$$\chi_{ab} = w_b \delta x_a - w_a \delta x_b$$

stellen,

$$\delta w_a = \Sigma (b) \frac{\partial \chi_{ab}}{\partial x_b}, \quad \delta P = \Sigma (ab) \frac{u_a}{P} \frac{\partial \chi_{ab}}{\partial x_b},$$

$$\delta L = -\varphi' \left( \frac{P}{\sqrt{-g}} \right) \delta P = -\Sigma (ab) \frac{u_a}{P} \varphi' \left( \frac{P}{\sqrt{-g}} \right) \frac{\partial \chi_{ab}}{\partial x_b},$$

of wel

$$\begin{aligned} \delta L = & -\Sigma (ab) \frac{\partial}{\partial x_b} \left[ \frac{u_a}{P} \varphi' \left( \frac{P}{\sqrt{-g}} \right) (w_b \delta x_a - w_a \delta x_b) \right] + \\ & + \Sigma (ab) (w_b \delta x_a - w_a \delta x_b) \frac{\partial}{\partial x_b} \left[ \frac{u_a}{P} \varphi' \left( \frac{P}{\sqrt{-g}} \right) \right]. \quad \dots \quad (7) \end{aligned}$$

De eerste term hiervan geeft bij substitutie in (6) een integraal over het oppervlak  $\sigma$ . Verwisselen wij verder in de termen met  $w_a \delta x_b$  de indices  $a$  en  $b$ , en nemen wij in aanmerking dat aan het oppervlak  $\Sigma (b) q_b w_b = 0$  is <sup>1)</sup>, terwijl blijkens (3)  $\Sigma (b) u_b w_b$  door  $P^2$  kan worden vervangen, dan vinden wij ten slotte uit (5)

<sup>1)</sup> Uit de omstandigheid dat de wereldlijnen der punten van het oppervlak in de uitgebreidheid  $\sigma$  liggen, volgt  $\Sigma (b) q_b v_b = 0$ , en dus wegens (1)  $\Sigma (b) q_b w_b = 0$ .

$$\int \left\{ P\varphi' \left( \frac{P}{\sqrt{-g}} \right) - \sqrt{-g} \varphi \left( \frac{P}{\sqrt{-g}} \right) \right\} \Sigma (a) q_a \delta x_a d\sigma + \\ + \int \Sigma (ab) \left\{ \frac{\partial}{\partial x_b} \left[ \frac{u_a}{P} \varphi' \left( \frac{P}{\sqrt{-g}} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial x_a} \left[ \frac{u_b}{P} \varphi' \left( \frac{P}{\sqrt{-g}} \right) \right] \right\} w_b \delta x_a dS + \\ + \int \Sigma (a) K_a \delta x_a dS = 0.$$

Hieruit vindt men voor het oppervlak der vloeistof de voorwaarde <sup>1)</sup>

$$\sqrt{-g} \varphi \left( \frac{P}{\sqrt{-g}} \right) - P \varphi' \left( \frac{P}{\sqrt{-g}} \right) = 0 \dots \dots (8)$$

en voor het inwendige

$$\Sigma (b) \left\{ \frac{\partial}{\partial x_b} \left[ \frac{u_a}{P} \varphi' \left( \frac{P}{\sqrt{-g}} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial x_a} \left[ \frac{u_b}{P} \varphi' \left( \frac{P}{\sqrt{-g}} \right) \right] \right\} w_b + K_a = 0 \dots (9)$$

§ 4. Wegens deze laatste betrekking kan men uit (7) afleiden

$$dL + \Sigma (a) K_a \delta x_a = - \Sigma (ab) \frac{\partial}{\partial x_b} \left[ \frac{u_a}{P} \varphi' \left( \frac{P}{\sqrt{-g}} \right) (w_b \delta x_a - w_a \delta x_b) \right]$$

en hieruit vindt men de impuls-energievergelijkingen, door (verg. C, § 6) te onderstellen dat slechts één der coördinaten, stel  $x_c$ , een virtueele verandering ondergaat, en dat deze verandering  $\delta x_c$  onafhankelijk van de coördinaten is. De uitkomst is

$$K_c + \left( \frac{\partial L}{\partial x_c} \right)_w = - \Sigma (a) \frac{\partial \mathfrak{E}_c^a}{\partial x_a}, \dots \dots (10)$$

als

$$\mathfrak{E}_c^a = \delta_c^a \left[ \sqrt{-g} \varphi \left( \frac{P}{\sqrt{-g}} \right) - P \varphi' \left( \frac{P}{\sqrt{-g}} \right) \right] + \frac{u_c w_a}{P} \varphi' \left( \frac{P}{\sqrt{-g}} \right) (11)$$

is <sup>2)</sup> De index  $w$  wijst aan dat  $L$  als een functie der grootheden  $w_a$  en  $g_{ab}$  moet worden uitgedrukt, en bij het differentieëren naar  $x_c$  alleen met de veranderlijkheid der  $g_{ab}$ 's rekening moet worden gehouden.

Uit (10) blijkt dat de grootheden  $\mathfrak{E}_c^a$  de spannings-energiecomponenten der vloeistof zijn. <sup>3)</sup> Zijn er, zooals wij verder onderstellen, geen uitwendige krachten, dan gaat de vergelijking over in

<sup>1)</sup> Deze betrekking geldt in elk coördinatenstelsel; de afleiding is in werkelijkheid onafhankelijk van de keus daarvan. Trouwens, daar  $\frac{P}{\sqrt{-g}}$  scalair is, geldt de voorwaarde in elk coördinatenstelsel, zoodra dat in één stelsel het geval is.

<sup>2)</sup> De factor  $\delta_c^a$  heeft de waarde 1 voor  $a=c$  en de waarde 0 voor  $a \neq c$ .

<sup>3)</sup> Tot toelichting kan de volgende beschouwing dienen, waarbij rechthoekige coördinaten ondersteld worden. De grootheden  $\mathfrak{I}_4^1$ ,  $\mathfrak{I}_4^2$  en  $\mathfrak{I}_4^3$  stellen de componenten van den energiestroom voor en men kan voor den energiestroom per vlakteenheid door een stilstaand vlakkelement waarvan de normaal de richtings-

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x_c}\right)_w = - \sum (a) \frac{\partial \mathfrak{L}_c^a}{\partial x_a} \dots \dots \dots (12)$$

§ 5. Wij zullen van deze vergelijking gebruik maken om te vinden wat wij de bewegingsvergelijkingen van het lichaam in zijn geheel kunnen noemen. Te dien einde verstaan wij onder  $c$  een der waarden 1, 2, 3 en leiden uit (12) af ( $t$  in plaats van  $x_c$  schrijvende)

$$-\frac{\partial \mathfrak{L}_c^4}{\partial t} = \sum (a = 1, 2, 3) \frac{\partial \mathfrak{L}_c^a}{\partial x_a} + \left(\frac{\partial L}{\partial x_c}\right)_w \dots \dots \dots (13)$$

Zij  $d\tau$  een volume-element der vloeistof,  $d\omega$  een oppervlakte-element, en laat  $q_1, q_2, q_3$  de richtingsconstanten der naar buiten getrokken normaal zijn. De drie uitdrukkingen

$$-\int \mathfrak{L}_c^4 d\tau \quad (c = 1, 2, 3)$$

stellen de componenten der hoeveelheid van beweging van het lichaam voor en wij willen de verandering daarvan van oogenblik tot oogenblik volgen. Wij bedenken daarbij dat, als het lichaam zich beweegt, die verandering niet alleen voortvloeit uit de door  $\frac{\partial \mathfrak{L}_c^4}{\partial t}$  bepaalde verandering, telkens in een vast punt der ruimte, maar ook hieruit dat het grensvlak zich verplaatst. Men vindt gemakkelijk

$$-\frac{d}{dt} \int \mathfrak{L}_c^4 d\tau = - \int \frac{\partial \mathfrak{L}_c^4}{\partial t} d\tau - \int \mathfrak{L}_c^4 \sum (a = 1, 2, 3) q_a v_a d\omega$$

en dus, als men (13) gebruikt en de integraties zooveel mogelijk uitvoert,

$$-\frac{d}{dt} \int \mathfrak{L}_c^4 d\tau = \int \left(\frac{\partial L}{\partial x_c}\right)_w d\tau + \int \sum (a = 1, 2, 3) (\mathfrak{L}_c^a - v_a \mathfrak{L}_c^4) q_a d\omega.$$

Uit (8) en (11) volgt dat de laatste integraal nul is (verg. de vorige noot) en wij hebben dus

$$-\frac{d}{dt} \int \mathfrak{L}_c^4 d\tau = \int \left(\frac{\partial L}{\partial x_c}\right)_w d\tau, \dots \dots \dots (14)$$

constanten  $q_1, q_2, q_3$  heeft, schrijven  $q_1 \mathfrak{L}_4^1 + q_2 \mathfrak{L}_4^2 + q_3 \mathfrak{L}_4^3$ . Ligt het vlakke-element op zeker oogenblik in het oppervlak der vloeistof, dan moet deze grootheid gelijk zijn aan de energie der hoeveelheid vloeistof die bij de beweging met de snelheid  $v_1, v_2, v_3$  per tijdseenheid door het vlakke-element heen gaat. Dus

$$q_1 \mathfrak{L}_4^1 + q_2 \mathfrak{L}_4^2 + q_3 \mathfrak{L}_4^3 = (q_1 v_1 + q_2 v_2 + q_3 v_3) \mathfrak{L}_4^4.$$

Aan deze vergelijking is werkelijk voldaan als aan het oppervlak de voorwaarde (8) vervuld is. Blijkens (11) heeft men dan

$$\mathfrak{L}_4^1 : \mathfrak{L}_4^2 : \mathfrak{L}_4^3 : \mathfrak{L}_4^4 = w_1 : w_2 : w_3 : w_4 = v_1 : v_2 : v_3 : 1.$$

Iets dergelijks als hier van de energie gezegd is, geldt van elke component der hoeveelheid van beweging.

een vergelijking die ons leert hoe door den invloed van het gravitatieveld de hoeveelheid van beweging van het lichaam verandert.

§ 6. Wij kunnen nu de bijzondere voorwaarde vinden, waaraan een „onsamendrukbare” vloeistof voldoet. Beschouwen wij daartoe eerst het geval van een stilstaande massa. Voor deze hebben blijkens (11) de normale spanningscomponenten  $\mathfrak{Z}_1^1, \mathfrak{Z}_2^2, \mathfrak{Z}_3^3$  een zelfde waarde, en wel is, als wij die door  $-p$  voorstellen,

$$p = -\sqrt{-g} \varphi \left( \frac{P}{\sqrt{-g}} \right) + P \varphi' \left( \frac{P}{\sqrt{-g}} \right) \dots (15)$$

Daar thans

$$P = c \varrho \sqrt{g_{44}} \dots (16)$$

is, hebben wij hiermede het verband tusschen de dichtheid  $\varrho$  en den „druk”  $p$  gevonden. Is deze laatste nul, dan zal de dichtheid een waarde aannemen, die men vindt uit

$$\frac{P}{\sqrt{-g}} = \mu, \dots (17)$$

als men de grootheid  $\mu$  bepaalt door de vergelijking

$$\varphi(\mu) - \mu \varphi'(\mu) = 0 \dots (18)$$

Ondergaat dan verder de dichtheid eene kleine toeneming, dan moet, zoo de vloeistof onsamendrukbaar zal kunnen heeten, de druk in hooge mate stijgen. Nu is volgens (15), en (16)

$$\frac{\partial p}{\partial \varrho} = c \sqrt{g_{44}} \frac{P}{\sqrt{-g}} \varphi'' \left( \frac{P}{\sqrt{-g}} \right) = c \sqrt{g_{44}} \mu \varphi''(\mu)$$

en het gezochte kenmerk is dus, dat voor de door (18) bepaalde waarde van  $\mu$  het tweede differentiaalquotient  $\varphi''(\mu)$  een groote positieve waarde heeft.

§ 7. Bepalen wij nu, ook als de vloeistof zich beweegt,  $p$  door (15), dan kunnen wij voor de spannings-energiecomponenten (11) schrijven

$$\mathfrak{Z}_c^a = -\sigma_c^a p + \frac{u_c w_a}{P^2} \left[ p + \sqrt{-g} \varphi \left( \frac{P}{\sqrt{-g}} \right) \right].$$

Door de voorwaarde dat zij slechts eindige waarden kunnen hebben is ook nu wegens de hooge waarde van  $\varphi''(\mu)$  elke noemenswaardige afwijking van de betrekking (17) uitgesloten. Wij mogen ook in den laatsten term van  $\mathfrak{Z}_c^a$  voor  $\frac{P}{\sqrt{-g}}$  de waarde  $\mu$  nemen, en wel omdat  $\varphi(\mu)$  en, blijkens (18) ook  $\varphi'(\mu)$  eindig geacht kunnen worden, en dus de functie  $\varphi$  volstrekt niet, zooals  $\varphi'$ , voor kleine veranderingen van het argument bijzonder gevoelig is.

Stellen wij ter bekorting

$$\varphi(\mu) = s, \dots \dots \dots (19)$$

dan is dus

$$\mathfrak{E}_c^a = -\delta_c^a p + \frac{u_c v_a}{P^2} (p + \sqrt{-g} \cdot s) \dots \dots (20)$$

Men moet hierbij niet uit het oog verliezen dat, in verband met de zeer kleine afwijkingen die  $\frac{P}{\sqrt{-g}}$  van de waarde  $\mu$  kan vertoonen, de grootheid  $p$  zeer goed aanmerkelijke waarden kan aannemen.

Ook moet er op gewezen worden dat, al is de vloeistof onsamen-drukbaar in dien zin dat de dichtheid door verhooging van druk niet merkbaar kan veranderen, toch de dichtheid  $\rho$  van de snelheid en de gravitatiepotentialen  $g_{ab}$  afhangt. Deze afhankelijkheid wordt bepaald door (17), waarvoor men ook kan schrijven

$$c \rho \sqrt{\Sigma (ab) g_{ab} v_a v_b} = \sqrt{-g} \cdot \mu \dots \dots (21)$$

en waarin voor een gegeven vloeistof  $\mu$  een bepaalde grootte heeft.

Heeft men, bij het gebruik van rechthoekige coördinaten, met de waarden

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1, g_{44} = c^2, g_{ab} = 0 \text{ voor } a \neq b \dots (22)$$

te doen, dan wordt

$$\rho = \frac{\mu}{\sqrt{c^2 - v^2}}, \dots \dots \dots (23)$$

In de hierdoor aangewezen toeneming der dichtheid bij vergrooting der snelheid herkent men den invloed van de contractie in de bewegingsrichting.

Wij zouden uit de grondvergelijkingen der theorie kunnen afleiden, dat bij de in § 1 genoemde onderstellingen de te beschouwen vloeistofmassa's alleen door deze contractie van den bolvorm afwijken. Ter bekorting zullen wij dit echter zonder bewijs aannemen. Wij stellen ons dus voor dat elke massa een afgeplatte omwentelings-ellipsoïde is. Den straal van den aequator  $R$  noemende, hebben wij voor de halve as loodrecht daarop, die de richting der snelheid  $v$  heeft,  $R \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ . Wij merken hierbij op dat voor een bepaald lichaam,  $R$  niet constant is. De grootte ervan verandert onder den invloed der gravitatiewerkingen en zal later bepaald worden uit de overweging dat voor elk lichaam de door  $\int \rho d\tau$  bepaalde hoeveelheid vloeistof een gegeven onveranderlijke grootte heeft.

Met het oog op latere berekeningen zullen wij hier ook een uitdrukking voor het in (12) en (14) voorkomende differentiaalquotient

$\left(\frac{\partial L}{\partial x_c}\right)_w$  doen kennen. Uit

$$P^2 = \Sigma (ab) g_{ab} w_a w_b$$

volgt

$$\left(\frac{\partial(P^2)}{\partial x_c}\right)_w = \Sigma (ab) \frac{\partial g_{ab}}{\partial x_c} w_a w_b$$

en uit (4)

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x_c}\right)_w = \frac{p}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x_c} - \left(\frac{s}{2\mu^2 \sqrt{-g}} - \frac{p}{2\mu^2 g}\right) \varrho^2 c^2 \Sigma (ab) \frac{\partial g_{ab}}{\partial x_c} v_a v_b \quad (24)$$

Bij de afleiding hiervan is  $\varphi' \left(\frac{P}{\sqrt{-g}}\right)$  door de uit (15) volgende waarde,  $\varphi \left(\frac{P}{\sqrt{-g}}\right)$  door  $s$  en op grond van (17)  $P^2$  door  $-\mu^2 g$  vervangen.

§ 8. Wij kunnen thans tot de bepaling van het gravitatieveld met behulp van de veldvergelijkingen overgaan.

Door toepassing van de betrekking

$$T_{ij} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \Sigma (a) g_{ia} \xi_j$$

vindt men uit (20)

$$T_{ij} = -g_{ij} \frac{p}{\sqrt{-g}} + (p + \sqrt{-g} \cdot s) \frac{u_i u_j}{\mu^2 \sqrt{(-g)^3}}$$

en vervolgens, als men ook van de uit (2) volgende formule

$$\Sigma (j) g^{ij} u_j = w_i$$

en van (3) gebruik maakt,

$$T = \Sigma (ij) g^{ij} T_{ij} = -3 \frac{p}{\sqrt{-g}} + s,$$

waaruit eindelijk volgt

$$T_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} T = - \left(\frac{1}{2} g_{ij} + \frac{u_i u_j}{\mu^2 g}\right) s + \left(\frac{1}{2} g_{ij} - \frac{u_i u_j}{\mu^2 g}\right) \frac{p}{\sqrt{-g}} \quad (25)$$

Hiermede is het tweede lid der veldvergelijkingen, die men kan schrijven in den vorm

$$2G_{ij} = -2\kappa (T_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} T) \quad \dots \dots \dots (26)$$

bekend.

Ter vereenvoudiging zullen wij aannemen 1°. dat de termen met  $\kappa$  en die met  $v$  zeer klein zijn in vergelijking met die, welke noch

$\kappa$  noch  $v$  bevatten en 2°. dat de termen met  $v^2$  en die met  $\kappa$  van dezelfde orde van grootte, wij zullen zeggen van de *eerste* orde zijn. In deze onderstellingen<sup>1)</sup>, waaraan b.v. in het geval van het zonnestelsel voldaan wordt, kunnen de veldvergelijkingen door achtereenvolgende benaderingen worden opgelost; de waarden van  $g_{ab}$  worden verkregen door aan de waarden (22) die bij afwezigheid van een gravitatieveld zouden gelden, termen van opklimmende orde toe te voegen.

De ontwikkeling van het eerste lid  $2 G_{ij}$  kunnen wij aan A, pp. 50—57, of B, pp. 460—464 ontleenen en wij merken nog op dat wegens onze onderstellingen een factor  $v_1, v_2$  of  $v_3$  en eveneens een differentiatie naar den tijd de orde van een term met  $1/2$  verhoogt. Verder dat  $s$  een eindige waarde heeft, maar dat  $p$  van de eerste orde is. Immers, deze grootheid is 0 aan het oppervlak van een vloeistofmassa en kan in het binnenste alleen onder den invloed der gravitatie zelf een andere waarde aannemen.

§ 9. Beperkt men zich tot grootheden van de eerste orde, dan kan aan de vergelijkingen voldaan worden door<sup>2)</sup>

$$\left. \begin{aligned} g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1 + \chi, \quad g_{44} = c^2(1 + \chi) \\ g_{ab} = 0 \quad \text{voor } a \neq b, \end{aligned} \right\} \dots (27)$$

als  $\chi$  bepaald wordt door de vergelijking

$$\Delta \chi = 0$$

buiten de vloeistofmassa's en

$$\Delta \chi = \kappa s. \dots \dots \dots (28)$$

in het binnenste van elk daarvan.

Deze formules beantwoorden aan de theorie van NEWTON en wij kunnen gevoegelijk  $\chi$  den Newtoniaanschen potentiaal noemen. Wanneer wij in het bijzonder een der lichamen beschouwen, kunnen wij  $\chi$  splitsen in den eigen potentiaal  $\chi_e$  daarvan, en de bijdrage  $\chi'$  van al de andere massa's,

$$\chi = \chi_e + \chi'.$$

Soms zullen wij ook schrijven

<sup>1)</sup> De bedoeling is dat de voorkomende snelheden  $v$  zeer klein in vergelijking met de lichtsnelheid zullen zijn. De onderstelling omtrent  $\kappa$  komt hierop neer dat hetzelfde zal gelden van zekere fictieve snelheden  $v'$ , nl. van die met welke een stoffelijk punt in of buiten een der vloeistofmassa's, als alle andere verwijderd waren, een cirkel om het middelpunt zou kunnen beschrijven. De tweede onderstelling wil zeggen dat de werkelijk voorkomende snelheden  $v$  van dezelfde orde van grootte zijn als de snelheden  $v'$ .

<sup>2)</sup> Verg. A form. (75) of B, form. (5). Daar wij de lichtsnelheid  $c$  hebben ingevoerd, zouden wij moeten stellen  $\beta_{44} = c^2\beta$ . De grootheid  $\chi$  is nu wat in A en B  $\kappa\beta$  genoemd werd.

$$\chi = \Sigma \psi, \dots \dots \dots (29)$$

waarbij de bedoeling is dat elk lichaam een term voor de som oplevert.

Bij de bepaling van den potentiaal  $\chi$  stellen wij ons voor dat de lichamen *ballen* met de stralen  $R$  zijn. Daaruit volgt dat binnen een vloeistofmassa

$$\chi_e = -\frac{1}{2} \kappa s (R^2 - \frac{1}{3} r^2). \dots \dots \dots (30)$$

is, als  $r$  den afstand tot het middelpunt voorstelt.

§ 10. Wij moeten nu in twee opzichten de benadering verder drijven. Wij moeten n.l.  $g_{14}, g_{24}, g_{34}$ , welke grootheden van de orde  $1\frac{1}{2}$  blijken te zijn, nauwkeurig tot in die orde berekenen en in  $g_{44}$  de termen van de tweede orde in aanmerking nemen. Om het eerste te doen nemen wij in (26)  $j=4, i=4$ . Wij behoeven dan in het door (25) bepaalde tweede lid slechts den term

$$2\kappa \frac{u_i u_4}{\mu^2 g} s$$

te behouden, waarvoor men mag schrijven

$$2\kappa v_i s,$$

daar men (verg. (2), (1), (23) en (22)) kan stellen

$$u_i = -c \varrho v_i, \quad u_4 = c^3 \varrho, \quad \varrho = \frac{\mu}{c}, \quad g = -c^2.$$

Wij hebben dus de differentiaalvergelijkingen <sup>1)</sup>

$$\Sigma (l = 1, 2, 3) \left( \frac{\partial^2 g_{4l}}{\partial x_l \partial x_i} - \frac{\partial^2 g_{i4}}{\partial x_l^2} \right) - 2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_4 \partial x_i} = 2\kappa v_i s, \dots (31)$$

waaraan <sup>2)</sup> wegens (28) en (29) voldaan wordt door

$$g_{i4} = -2 \Sigma v_i \psi, \dots \dots \dots (32)$$

als  $v_i$  een component der snelheid is van het lichaam waarbij  $\psi$  behoort. Tusschen de grootheden  $g_{i4}$  en  $\chi$  bestaat de betrekking

$$\Sigma (i = 1, 2, 3) \frac{\partial g_{i4}}{\partial x_i} = 2 \frac{\partial \chi}{\partial x_4} \dots \dots \dots (33)$$

§ 11. Om vervolgens  $g_{44}$  nauwkeurig tot in de tweede orde te berekenen moeten wij het tweede lid der vergelijking

$$2G_{44} = 2\kappa \left( \frac{1}{2} g_{44} + \frac{u_4^2}{\mu^2 g} \right) s - 2\kappa \left( \frac{1}{2} g_{44} - \frac{u_4^2}{\mu^2 g} \right) \frac{p}{\sqrt{-g}} \dots (34)$$

<sup>1)</sup> In de uitdrukking die men in A, p. 57 en B, p. 464 vindt, hebben wij  $\kappa^{3/2} \sigma_{4l}$ ,  $\kappa^{3/2} \sigma_{i4}$  en  $\kappa \beta$  resp. door  $g_{4l}$ ,  $g_{i4}$  en  $\chi$  vervangen.

<sup>2)</sup> Verg. A, p. 61, of B, p. 465.

nauwkeurig tot in die orde kennen. Nu is, tot in termen van de eerste orde, ten gevolge van (27),

$$g = -c^2(1 - 2\chi)$$

en volgens (21)

$$q = \frac{\mu}{c} \left( 1 - \frac{3}{2}\chi + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} \right) \dots \dots \dots (35)$$

Verder kan men  $u_4$  door  $g_{44} w_4 = c^3 q (1 + \chi)$  vervangen. Men heeft dus, daar  $p$  van de eerste orde is,

$$2G_{44} = -\kappa c^2 s \left( 1 + 2\frac{v^2}{c^2} + \chi \right) - 3\kappa c p. \dots \dots (36)$$

Om nu voor het inwendige van een der lichamen  $p$  tot in de eerste orde te berekenen kunnen wij, daar wij van de vloedwerkingen afzien, en dus de naburige lichamen geen spanningen in de beschouwde massa teweegbrengen, ons voorstellen dat deze alleen aanwezig is en, in rust verkeerende, den vorm van een bol met den straal  $R$  heeft. Met het oog op den gewenschten graad van benadering kunnen wij, daar de differentiaalquotienten der grootheden  $g_{ab}$  van de eerste orde zijn, in (24) de termen met  $p$  weglaten en in de andere

$$\sqrt{-g} = c, \quad q = \frac{\mu}{c}, \quad \frac{\partial g_{44}}{\partial x_c} = c^2 \frac{\partial \chi_e}{\partial x_c}$$

stellen. Uit de evenwichtsvoorwaarde (12) volgt dus

$$\frac{\partial p}{\partial x_c} = -\frac{1}{2} c s \frac{\partial \chi_e}{\partial x_c}, \quad c = 1, 2, 3$$

$$p = -\frac{1}{2} c s \chi_e + C,$$

of, wegens (30), als wij de integratieconstante zoo bepalen dat aan het oppervlak van den bol  $p = 0$  is,

$$p = \frac{1}{12} \kappa c s^2 (R^2 - r^2) \dots \dots \dots (37)$$

§ 12. Stellen wij het deel van  $g_{44}$  dat van de tweede orde is, voor door  $\kappa^2 \gamma_{44}$ , zoodat de volledige waarde is

$$g_{44} = c^2(1 + \chi) + \kappa^2 \gamma_{44}, \dots \dots \dots (38)$$

dan kan men volgens A, pp. 52 en 57, of B, pp. 462 en 464 voor het eerste lid van (36) schrijven <sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} & -c^2 \Delta \chi - \kappa^2 \Delta \gamma_{44} - 3 \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_4^2} + 2 \sum (l = 1, 2, 3) \frac{\partial^2 g_{4l}}{\partial x_4 \partial x_l} - \\ & - c^2 \sum (l = 1, 2, 3) \frac{\partial}{\partial x_l} \left( \chi \frac{\partial \chi}{\partial x_l} \right) + 2 c^2 \sum (l = 1, 2, 3) \left( \frac{\partial \chi}{\partial x_l} \right)^2. \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Wij hebben hier  $\kappa \beta_{44}$  vervangen door  $c^2 \chi$ ,  $\kappa \beta$  door  $\chi$  en  $\kappa^{3/2} \sigma_{4l}$  door  $g_{4l}$ , terwijl in de laatste twee termen de factor  $c^2$  moet geschreven worden, omdat wij de lichtsnelheid niet meer = 1 stellen.

Den vierden term kunnen wij blijkens (33) door  $\frac{\partial^2 \chi}{\partial x_4^2}$  vervangen. Substitueeren wij vervolgens in (36) de waarde (37) en laten wij de termen van de eerste orde, die elkaar wegens (28) opheffen weg, dan komt er

$$-\kappa^2 \Delta \gamma_{44} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_4^2} - c^2 \sum (l=1, 2, 3) \frac{\partial}{\partial x_l} \left( \chi \frac{\partial \chi}{\partial x_l} \right) + 2c^2 \sum (l=1, 2, 3) \left( \frac{\partial \chi}{\partial x_l} \right)^2 =$$

$$= -\kappa c^2 s \left( 2 \frac{v^2}{c^2} + \chi \right) - \frac{1}{4} \kappa^2 c^2 s^2 (R^2 - r^2).$$

Door hier de waarden

$$\sum \left( \frac{\partial \chi}{\partial x_l} \right)^2 = \sum \frac{\partial}{\partial x_l} \left( \chi \frac{\partial \chi}{\partial x_l} \right) - \chi \Delta \chi = \sum \frac{\partial}{\partial x_l} \left( \chi \frac{\partial \chi}{\partial x_l} \right) - \kappa s \chi$$

en

$$\sum \frac{\partial}{\partial x_l} \left( \chi \frac{\partial \chi}{\partial x_l} \right) = \frac{1}{2} \Delta (\chi^2)$$

te substitueeren, vervolgens den term met  $\chi$  uit het eerste lid naar het tweede over te brengen en in dit laatste

$$\chi = \chi_e + \chi' = -\frac{1}{2} \kappa s (R^2 - \frac{1}{3} r^2) + \chi'$$

in te voeren, vinden wij voor  $\gamma_{44}$  de differentiaalvergelijking

$$-\kappa^2 \Delta \gamma_{44} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_4^2} + \frac{1}{2} c^2 \Delta (\chi^2) = -2\kappa v^2 s + \kappa c^2 s \chi' - \frac{1}{4} \kappa^2 c^2 s^2 (3R^2 - \frac{5}{3} r^2) \quad (39)$$

De vergelijking die in de ruimte buiten de vloeistofmassa's geldt, vindt men hieruit als men het tweede lid door 0 vervangt.