Natuurkunde. — De Heer H. A. LORENTZ biedt eene mededeeling aan mede namens den Heer J. DROSTE: „*De beweging van een stelsel lichamen onder den invloed van hunne onderlinge aantrekking, behandeld volgens de theorie van* EINSTEIN." II.

§ 13. Wij gaan nu γ_{44} berekenen in een punt binnen het lichaam, welks bewegingsvergelijkingen wij willen leeren kennen. Dit lichaam noemen wij A, de overige lichamen A_1, A_2, enz. De snelheidscomponenten van A zijn ξ, η, ζ, van A_i algemeen ξ_i, η_i, ζ_i. De tijd x_4 heete voortaan t.

Daar

$$\Delta \int \frac{\varkappa s r \, d\tau}{4\pi} = 2 \int \frac{\varkappa s \, d\tau}{4\pi r} = -2\chi$$

is, wordt

$$-2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = \Delta \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \frac{\varkappa s r \, d\tau}{4\pi}$$

en wij vinden zoodoende uit (39)

$$\varkappa^2 \gamma_{44} = \tfrac{1}{2} c^2 \chi^2 - \tfrac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \frac{\varkappa s r \, d\tau}{4\pi} - \tfrac{1}{4} \varkappa^2 c^2 \int \frac{s^2 [3R^2 - \frac{5}{3}(x^2 + y^2 + z^2)] \, d\tau}{4\pi r}$$

$$- 2\varkappa \int \frac{v^2 s \, d\tau}{4\pi r} + \varkappa c^2 \int \frac{s \chi' \, d\tau}{4\pi r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

Hierbij moeten de integralen worden uitgestrekt over elk der lichamen, die daarbij als bolvormig mogen worden opgevat; x, y, z beteekenen rechthoekige coördinaten, die nul zijn in het middelpunt van het lichaam waarover moet worden geïntegreerd.

De waarde van γ_{44}, die wij uit (40) zullen berekenen, zal moeten dienen voor de berekening van $\left(\frac{\partial L}{\partial x_c}\right)_w$ in (14). In § 18 zullen wij zien dat γ_{44} tot deze grootheid de bijdrage

$$- \tfrac{1}{2} \frac{\varkappa^2 s}{c} \frac{\partial \gamma_{44}}{\partial x_c}$$

levert, waaruit wij kunnen besluiten dat, wegens de integratie, die in (14) over A moet geschieden, in (40) de termen die even functies van x, y en z zijn, mogen worden weggelaten.

Berekenen wij nu in (40) eerst de integralen die over het beschouwde lichaam A zelf worden uitgestrekt. Uit hetgeen juist werd opgemerkt volgt dat de bijdragen van den derden en den vierden term mogen worden weggelaten. Wat den tweeden term betreft vindt men gemakkelijk

$$-\tfrac{1}{2}\varkappa s\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\tfrac{1}{4}R^4+\tfrac{1}{6}R^2r^2-\tfrac{1}{60}r^4\right).$$

De grootheid R die hierin optreedt is veranderlijk (zie § 7), maar van hare verandering mogen wij afzien, daar wij zoodoende slechts grootheden van de derde orde verwaarloozen. Wat r betreft, deze grootheid is eene functie van den tijd, omdat zij den afstand voorstelt van het middelpunt van het zich met de snelheid (ξ, η, ζ) bewegende lichaam tot een onbewegelijk punt, dat op het beschouwde oogenblik ten opzichte van dat middelpunt de coördinaten x, y, z heeft. Daaruit volgt

$$\frac{\partial r}{\partial t}=-\frac{x\xi+y\eta+z\zeta}{r},$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}=\frac{v^2}{r}-\frac{(x\xi+y\eta+z\zeta)^2}{r^3}-\frac{x\dot{\xi}+y\dot{\eta}+z\dot{\zeta}}{r}.$$

De tweede term van (40) blijkt dus hoofdzakelijk termen op te leveren, die even functies van x, y en z zijn en dus mogen worden weggelaten. Er blijft alleen over

$$\varkappa s\left(\tfrac{1}{6}R^2-\tfrac{1}{30}r^2\right)(x\dot{\xi}+y\dot{\eta}+z\dot{\zeta}).$$

In den vijfden term van (40) stellen wij

$$\chi'=\chi'_0+\Sigma\,(c=1,2,3)\,x_c\left(\frac{\partial\chi'}{\partial x_c}\right)_0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

waarin de index o er aan moet herinneren, dat de waarde in het middelpunt bedoeld is; x_c zijn de coördinaten t.o.z. van dat middelpunt. Wij mogen nu weer χ'_0 weglaten en vinden dan dat tot den vijfden term van (40) het lichaam A de bijdrage

$$\varkappa c^2 s\left(\tfrac{1}{6}R^2-\tfrac{1}{10}r^2\right)\Sigma\,(c=1,2,3)\,x_c\left(\frac{\partial\chi'}{\partial x_c}\right)_0 \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

oplevert.

Voor den eersten term in (40) schrijven wij

$$\tfrac{1}{2}c^2\left(\chi_e^2+2\chi_e\chi'+\chi'^2\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

en mogen hierin $\frac{1}{2}c^2\chi_e^2$ weglaten. In den tweeden term van (43) gebruiken wij de substitutie (41), waarbij wij den term $c^2\chi_e\chi'_0$ mogen weglaten, en vinden zoo, wegens (30),

$$-\tfrac{1}{2}\varkappa c^2 s\left(R^2-\tfrac{1}{3}r^2\right)\Sigma\,(c=1,2,3)\,x_c\left(\frac{\partial\chi'}{\partial x_c}\right)_0.$$

In het tweede lid van (40) leveren dus de eerste term en de integralen over A de bijdrage

$$\varkappa s\left(\tfrac{1}{6}R^2-\tfrac{1}{30}r^2\right)(x\dot{\xi}+y\dot{\eta}+z\dot{\zeta})+\tfrac{1}{2}c^2\chi'^2+$$

$$+\varkappa c^2 s\left(-\tfrac{1}{3}R^2+\tfrac{1}{15}r^2\right)\Sigma\,(c=1,2,3)\,x_c\left(\frac{\partial\chi'}{\partial x_c}\right)_0.$$

§ 14. Ten einde nu verder de integralen in (40) over de lichamen A_1, A_2, enz. in beknopten vorm voor te stellen, stellen wij voor het lichaam A_i

$$\tfrac{1}{3}\varkappa\, s_i R_{0i}{}^3=a_i\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

waarin R_{0i} de constante grootheid voorstelt, die bepaald is door de voorwaarde

$$\tfrac{4}{3}\pi R_{0i}{}^3\frac{\mu_i}{c}=\int\limits_{(i)}\varrho\, d\tau \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

Van deze grootheid R_{0i} wijkt R_i slechts in termen van de eerste orde af en wij mogen in alle termen van de tweede orde R_i door R_{0i} en op overeenkomstige wijze voor het lichaam A ook R door R_0 vervangen. Noemen wij nog r_i den afstand der middelpunten van A_i en A, dan wordt

$$-\tfrac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int\frac{\varkappa s r\, d\tau}{4\pi}=-\tfrac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Sigma a_i r_i)=-\tfrac{1}{2}\,\Sigma\, a_i\frac{\partial^2 r_i}{\partial t^2},$$

waarbij elk lichaam A_1, A_2, enz. eene bijdrage tot de som levert.

Voor de overige integralen van (40) vinden wij, daar wegens (28) en (44) tot in termen van de eerste orde

$$\chi'=-\Sigma\frac{a_i}{r_i} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

is,

$$-\tfrac{3}{2}c^2\,\Sigma\frac{a_i{}^2}{R_i r_i}-2\,\Sigma\frac{a_i}{r_i}v_i{}^2+c^2\,\Sigma\frac{a_i}{r_i}\chi_i'.$$

Alle termen samengenomen, vinden wij

$$\frac{\varkappa^2}{c^2}\overline{\gamma}_{44}=\frac{\varkappa s}{c^2}\left(\tfrac{1}{6}R_0{}^2-\tfrac{1}{30}r^2\right)(x\dot{\xi}+y\dot{\eta}+z\dot{\zeta})+\tfrac{1}{2}\chi'^2+$$

$$+\varkappa s\left(-\tfrac{1}{3}R_0{}^2+\tfrac{1}{15}r^2\right)\Sigma\,(c=1,2,3)\,x_c\left(\frac{\partial\chi'}{\partial x_c}\right)_0-$$

$$-\tfrac{1}{2}\,\Sigma\frac{a_i}{c^2}\frac{\partial^2 r_i}{\partial t^2}-\tfrac{3}{2}\,\Sigma\frac{a_i{}^2}{R_{0i}r_i}-2\,\Sigma\frac{a_i}{r_i}\frac{v_i{}^2}{c^2}+\Sigma\frac{a_i}{r_i}\chi_i'\,, \quad . \quad ; \quad (47)$$

waarin de streep boven γ_{44} er aan herinneren moet, dat termen die later wegvallen, reeds nu zijn weggelaten.

§ 15. Wij moeten nu $\mathfrak{T}_c{}^4$ berekenen. Uit (20), (1), (2) en (3) volgt

$$\mathfrak{T}_c{}^4=(p+\sqrt{-g}\,.\,s)\,\Sigma\,(a)\,g_{ca}\,v_a:\Sigma\,(ab)\,g_{ab}\,v_a\,v_b$$

en hieruit, wegens (37), (27) en (32),

$$\mathfrak{T}_c^4 = s\left[-\frac{v_c}{c} + 3\chi\frac{v_c}{c} - 2\,\Sigma\,\psi\frac{v_c}{c} - \frac{v^2 v_c}{c^3} - \tfrac{1}{12}\varkappa s(R^2-r^2)\frac{v_c}{c}\right], \quad (48)$$

nauwkeurig tot in termen van de orde $1\frac{1}{2}$.

§ 16. Berekenen wij thans de stralen der bollen. Indien wij (45) voor het lichaam A opschrijven en het tweede lid berekenen met behulp van (35), daarbij in het oog houdend, dat de integratie moet geschieden over eene ellipsoïde met de halve assen R, R en $R\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, dan vinden wij, daar wegens (30)

$$\chi = \chi' - \tfrac{1}{2}\varkappa s(R^2 - \tfrac{1}{3}r^2)$$

is,

$$R^3 = R_0^3(1 - \tfrac{3}{5}\varkappa s R_0^2 + \tfrac{3}{2}\chi').$$

Hierin is R_0^2 inplaats van R^2 gezet, hetgeen blijkbaar geoorloofd is.

§ 17. Wij moeten nu de gevonden uitkomsten in (14) substitueeren en beginnen daartoe met de berekening van $\int \mathfrak{T}_c^4\, d\tau$. Om opeenhooping van indices te vermijden, kiezen wij den index $c = 1$, waardoor wegens (48)

$$-\mathfrak{T}_1^4 = s\left[\frac{\xi}{c} - 3\chi\frac{\xi}{c} + \frac{v^2\xi}{c^3} + 2\,\Sigma\,\psi\frac{\xi}{c} + \tfrac{1}{12}\varkappa s\frac{\xi}{c}(R^2-r^2)\right]$$

wordt. Wij vervangen nu in den tweeden term χ door $\chi_e + \chi'$ of, volgens (30) en (46), door

$$-\tfrac{1}{2}\varkappa s(R^2 - \tfrac{1}{3}r^2) - \Sigma\frac{\alpha_i}{r_i};$$

in den vierden term nemen wij voor $\psi\,\xi$ achtereenvolgens

$$\chi_e\,\xi, \quad -\frac{\alpha_1\xi_1}{r_1}, \quad -\frac{\alpha_2\xi_2}{r_2}, \quad \text{enz.}$$

Wij vinden zoo voor de gemiddelde waarde van $-\mathfrak{T}_1^4$ over den bol R

$$s\left(\frac{\xi}{c} + \frac{v^2\xi}{c^3} + 3\frac{\xi}{c}\,\Sigma\frac{\alpha_i}{r_i} + \tfrac{13}{30}\varkappa s R_0^2\frac{\xi}{c} - 2\,\Sigma\frac{\alpha_i\xi_i}{c\,r_i}\right),$$

waarin nog R door R_0 is vervangen. Om de integraal van $-\mathfrak{T}_1^4$ over de ellipsoïde te verkrijgen, moet deze uitdrukking met

$$\tfrac{4}{3}\pi R^3\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \tfrac{4}{3}\pi R_0^3(1 - \tfrac{3}{5}\varkappa s R_0^2 + \tfrac{3}{2}\chi')\left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right)$$

worden vermenigvuldigd. In verband met (46) wordt de uitkomst, nauwkeurig tot in termen van de orde $1\frac{1}{2}$,

$$-\int \mathfrak{T}_1^4\, d\tau = \tfrac{4}{3}\pi R_0^3 s\left(\frac{\xi}{c} + \tfrac{3}{2}\frac{\xi}{c}\,\Sigma\frac{\alpha_i}{r_i} - \frac{\alpha\xi}{2R_0 c} + \frac{v^2\xi}{2c^3} - 2\,\Sigma\frac{\alpha_i\xi_i}{c\,r_i}\right), \quad (49)$$

waarin wij ook voor A, overeenkomstig (44), een grootheid

$$a = \tfrac{1}{3} \varkappa\, s\, R_0^3$$

hebben ingevoerd.

§ 18. Wij gaan nu $\left(\frac{\partial L}{\partial x_c}\right)_w$ berekenen. Uit (4) volgt, in verband met (15),

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x_c}\right)_w = -\frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x_c} \varphi\left(\frac{P}{\sqrt{-g}}\right) + \frac{P}{\sqrt{-g}} \varphi'\left(\frac{P}{\sqrt{-g}}\right) \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x_c} -$$

$$- \varphi'\left(\frac{P}{\sqrt{-g}}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial x_c}\right)_w = \frac{p}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x_c} - \varphi'\left(\frac{P}{\sqrt{-g}}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial x_c}\right)_w \quad . \quad . \quad (50)$$

In den eersten term moeten beide factoren berekend worden tot in termen van de eerste orde. Wegens (37) en omdat

$$\sqrt{-g} = c\,(1-\chi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

is, wordt de eerste term van (50)

$$-\tfrac{1}{12} \varkappa\, c\, s^2 (R^2 - r^2) \frac{\partial \chi}{\partial x_c}.$$

In den tweeden term van (50) kunnen wij wegens (15)

$$\varphi'\left(\frac{P}{\sqrt{-g}}\right) = \frac{p}{P} + \frac{\sqrt{-g}}{P} \varphi\left(\frac{P}{\sqrt{-g}}\right)$$

substitueeren en vinden dan

$$\varphi'\left(\frac{P}{\sqrt{-g}}\right) = \tfrac{1}{12} \frac{\varkappa\, s^2}{\mu}(R^2 - r^2) + \frac{s}{\mu},$$

nauwkeurig tot in termen van de eerste orde.

Verder is

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x_c}\right)_w = \frac{1}{2P}\left(\frac{\partial (P^2)}{\partial x_c}\right)_w$$

en hierin mogen wij

$$\frac{1}{2P} = \frac{1+\chi}{2c\,\mu}$$

nemen, zoodat wegens (3), (2) en (1)

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x_c}\right)_w = \frac{1+\chi}{2\,\mu} c\varrho^2\, \Sigma\,(ab) \frac{\partial g_{ab}}{\partial x_c} v_a v_b$$

wordt. Voor $a \neq 4$, $b \neq 4$ komt in het tweede lid, wegens (35) en (27)

$$\frac{\mu}{2c} \frac{\partial \chi}{\partial x_c} v^2;$$

voor $a = 4$, $b \neq 4$ en $a \neq 4$, $b = 4$

$$\frac{\mu}{c} \Sigma\,(a = 1, 2, 3)\, v_a \frac{\partial g_{a4}}{\partial x_c}.$$

Voor $a = b = 4$ vinden wij, wegens (35) en (38),

$$\tfrac{1}{2}\,\mu c\left(\frac{\partial\chi}{\partial x_c} - 2\,\chi\,\frac{\partial\chi}{\partial x_c} - \frac{v^2}{c^2}\frac{\partial\chi}{\partial x_c} + \frac{\varkappa^2}{c^2}\frac{\partial\gamma_{44}}{\partial x_c}\right).$$

Substitueeren wij dit alles in (50), dan vinden wij

$$-\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial x_c}\right)_w = cs\left[\tfrac{1}{2}\frac{\partial\chi}{\partial x_c} - \chi\frac{\partial\chi}{\partial x_c} - \frac{\partial\chi}{\partial x_c}\frac{r^2}{c^2} + \tfrac{1}{5}\,\varkappa s\,(R^2 - r^2)\frac{\partial\chi}{\partial x_c} + \right.$$

$$\left. + \Sigma\,(a = 1, 2, 3)\,\frac{r_a}{c^2}\frac{\partial g_{a4}}{\partial x_c} + \tfrac{1}{2}\frac{\varkappa^2}{c^2}\frac{\partial\gamma_{44}}{\partial x_c}\right] \quad . \quad . \quad (52)$$

In de eerste vier termen vervangen wij nu χ door $\chi_e + \chi'$. Tot den 1^{sten}, 3^{den} en 4^{den} term levert dan χ_e eene bijdrage die oneven in x_c is en dus mag worden weggelaten met het oog op de integratie over A. De tweede term wordt

$$-\chi_e\frac{\partial\chi_e}{\partial x_c} - \chi_e\frac{\partial\chi'}{\partial x_c} - \chi'\frac{\partial\chi_e}{\partial x_c} - \chi'\frac{\partial\chi'}{\partial x_c}.$$

Hierin geeft de eerste term 0; in den tweeden kan men $\dfrac{\partial\chi'}{\partial x_c}$ door de waarde $\left(\dfrac{\partial\chi'}{\partial x_c}\right)_0$ in het middelpunt vervangen; voor den derden kan men schrijven

$$-\chi'_0\frac{\partial\chi_e}{\partial x_c} - \left(\frac{\partial\chi'}{\partial x_c}\right)_0 x_c\frac{\partial\chi_e}{\partial x_c}$$

en dan mag men hierin den eersten term weglaten; en voor den vierden term kan men schrijven

$$-\chi'_0\left(\frac{\partial\chi'}{\partial x_c}\right)_0.$$

Door dit alles gaat (52) over in

$$-\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial x_c}\right)_w = cs\left[\tfrac{1}{2}\frac{\partial\chi'}{\partial x_c} - \chi_e\frac{\partial\chi}{\partial x_c} - x_c\frac{\partial\chi'}{\partial x_c}\frac{\partial\chi_e}{\partial x_c} - \chi'\frac{\partial\chi'}{\partial x_c} + \frac{r^2}{c^2}\frac{\partial\chi'}{\partial x_c} + \right.$$

$$\left. + \tfrac{1}{5}\,\varkappa s(R_0^2 - r^2)\frac{\partial\chi'}{\partial x_c} - \Sigma\,(a = 1, 2, 3)\,\frac{r_a}{c^2}\frac{\partial g_{a4}}{\partial x_c} + \tfrac{1}{2}\frac{\varkappa^2}{c^2}\frac{\partial\gamma_{44}}{\partial x_c}\right]. \quad . \quad . \quad (53)$$

waarin de index o is weggelaten, hoewel χ' en $\dfrac{\partial\chi'}{\partial x_c}$ op het middelpunt van A betrekking hebben.

Wij vervangen nu χ_e, $x_c\dfrac{\partial\chi_e}{\partial x_c}$ en $R_0^2 - r^2$ door hunne middelwaarden over den bol, die achtereenvolgens $-\tfrac{3}{5}\,\varkappa\, s\, R_0^2$, $\tfrac{1}{15}\,\varkappa\, s\, R_0^2$ en $\tfrac{2}{5}\,R_0^2$ zijn, wegens (30). Door (47) naar x_c te differentieeren en daarna van den eersten en den derden term de middelwaarde over den bol te nemen, vinden wij

$$\frac{\varkappa^2}{c^2}\frac{\partial \overline{\gamma}_{44}}{\partial x_c} = \chi' \frac{\partial \chi'}{\partial x_c} + \tfrac{2}{15}\varkappa s R_0{}^2 \frac{\dot{v}_c}{c^2} - \tfrac{1}{15}\varkappa s R_0{}^2 \frac{\partial \chi'}{\partial x_c} - \tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_c}\Sigma \frac{a_i}{c^2}\frac{\partial^2 r_i}{\partial t^2} -$$
$$- \tfrac{3}{2}\frac{\partial}{\partial x_c}\Sigma \frac{a_i{}^2}{R_{0i} r_i} - 2\frac{\partial}{\partial x_c}\Sigma \frac{a_i}{r_i}\frac{v_i{}^2}{c^2} + \frac{\partial}{\partial x_c}\Sigma \frac{a_i}{r_i}\chi_i'.$$

Door substitutie in (53) verkrijgen wij

$$-\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial x_c}\right)_w = cs\left[\tfrac{1}{2}\frac{\partial \chi'}{\partial x_c} + \frac{v^2}{c^2}\frac{\partial \chi'}{\partial x_c} - \frac{\partial}{\partial x_c}\Sigma \frac{a_i}{r_i}\frac{v_i{}^2}{c^2} + \Sigma(a=1,2,3)\frac{v_a}{c^2}\frac{\partial g_{a4}}{\partial x_c} + \right.$$
$$+ \tfrac{1}{4}\varkappa s R_0{}^2 \frac{\partial \chi'}{\partial x_c} - \tfrac{1}{2}\chi'\frac{\partial \chi'}{\partial x_c} - \tfrac{3}{4}\frac{\partial}{\partial x_c}\Sigma \frac{a_i{}^2}{R_{0i} r_i} +$$
$$\left. + \tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_c}\Sigma \chi_i' \frac{a_i}{r_i} - \tfrac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x_c}\Sigma \frac{a_i}{c^2}\frac{\partial^2 r_i}{\partial t^2} + \tfrac{1}{15}\varkappa s R_0{}^2 \frac{\dot{v}_c}{c^2}\right] \quad . \quad (54)$$

Wegens (32) wordt de vierde term

$$-2\frac{v^2}{c^2}\frac{\partial \chi_e}{\partial x_c} + 2\Sigma \frac{\xi\xi_i + \eta\eta_i + \zeta\zeta_i}{c^2}\frac{\partial}{\partial x_c}\left(\frac{a_i}{r_i}\right)$$

en hierin mogen wij het eerste deel weglaten.

In alle termen van (54), behalve in den eersten, mogen wij nu χ' vervangen door $-\Sigma \frac{a_i}{r_i}$. Wat dien eersten term betreft, bedenken wij dat χ' uit (28) berekend moet worden door een integratie over de lichamen A_i. Deze hebben een volume

$$\tfrac{4}{3}\pi R_i{}^3\left(1 - \frac{v_i{}^2}{2c^2}\right) = \tfrac{4}{3}\pi R_{0i}{}^3\left(1 - \frac{v_i{}^2}{2c^2} - \tfrac{3}{5}\varkappa s R_{0i}{}^2 + \tfrac{3}{2}\chi_i'\right).$$

zoodat wij vinden

$$\chi' = -\Sigma \frac{a_i}{r_i} + \tfrac{1}{2}\Sigma \frac{v_i{}^2 a_i}{c^2 r_i} + \tfrac{9}{5}\Sigma \frac{a_i{}^2}{R_{0i} r_i} - \tfrac{3}{2}\Sigma \chi_i' \frac{a_i}{r_i}.$$

Om nu de integraal van $-\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial x_c}\right)_w$ over het lichaam A te verkrijgen, moeten wij (54) vermenigvuldigen met

$$\tfrac{4}{3}\pi R^3\left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right) = \tfrac{4}{3}\pi R^3\left(1 - \frac{v^2}{2c^2} - \tfrac{3}{5}\varkappa s R_0{}^2 + \tfrac{3}{2}\chi'\right).$$

Ten slotte wordt

$$\int\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial x_c}\right)_w d\tau = \frac{4\pi c}{\varkappa}a\left[\tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_c}\Sigma \frac{a_i}{r_i} + \tfrac{3}{4}\frac{v^2}{c^2}\frac{\partial}{\partial x_c}\Sigma \frac{a_i}{r_i} + \tfrac{3}{4}\frac{\partial}{\partial x_c}\Sigma \frac{v_i{}^2 a_i}{c^2 r_i} - \right.$$
$$- 2\frac{\partial}{\partial x_c}\Sigma \frac{\xi\xi_i + \eta\eta_i + \zeta\zeta_i}{c^2}\frac{a_i}{r_i} - \tfrac{3}{20}\frac{\partial}{\partial x_c}\Sigma \frac{a_i{}^2}{R_i r_i} - \tfrac{3}{20}\frac{a}{R}\frac{\partial}{\partial x_c}\Sigma \frac{a_i}{r_i} -$$
$$\left. - \tfrac{1}{8}\frac{\partial}{\partial x_c}\left(\Sigma \frac{a_i}{r_i}\right)^2 + \tfrac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x_c}\Sigma \chi_i' \frac{a_i}{r_i} + \tfrac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x_c}\Sigma \frac{a_i}{c^2}\frac{\partial^2 r_i}{\partial t^2} - \frac{a\dot{v}_c}{5Rc^2}\right] \quad . \quad (55)$$

Wij hebben hier den index o bij R en R_i weggelaten en zullen dit voortaan steeds doen.

§ 19. Wij moeten nu (49) en (55) in (14) substitueeren en verkrijgen zoo de bewegingsvergelijkingen voor het lichaam A. Wij zullen laten zien dat deze bewegingsvergelijkingen voor elk der lichamen den vorm hebben van bewegingsvergelijkingen van LAGRANGE, n.l. den vorm

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_c}\right)=\frac{\partial L}{\partial x_c},$$

als x_1, x_2, x_3 de coördinaten van het middelpunt van het lichaam voorstellen.

Stellen wij

$$\Omega = \tfrac{1}{2}(a v^2 + \Sigma\, a_i\, v_i^2) + \frac{1}{8c^2}(a\, v^4 + \Sigma\, a_i v_i^4) -$$

$$-\tfrac{1}{4}\left(\frac{a^2 v^2}{R} + \Sigma\,\frac{a_i^2 v_i^2}{R_i}\right) - \tfrac{3}{4}(a v^2 \chi' + \Sigma\, a_i v_i^2 \chi_i') -$$

$$-2\,\Sigma\,\frac{a\,a_i}{r_i}(\xi\xi_i + \eta\eta_i + \zeta\zeta_i) - 2\,\Sigma\,\frac{a_i a_j}{r_{ij}}(\xi_i\xi_j + \eta_i\eta_j + \zeta_i\zeta_j), \quad (56)$$

waarin r_{ij} den afstand tusschen A_i en A_j voorstelt en elk paar lichamen A_i, A_j een term tot de laatste som bijdraagt, dan is Ω een uitdrukking waarin de coördinaten en de snelheden van elk der lichamen op dezelfde wijze voorkomen. Daar nu

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\xi} = a\left(\xi + \frac{v^2\xi}{2c^2} - \frac{a\xi}{2R} - \tfrac{3}{2}\xi\chi' - 2\,\Sigma\,\frac{a_i}{r_i}\,\xi_i\right)$$

is, leert eene vergelijking met (49) dat

$$-\frac{\varkappa c}{4\pi}\int \xi_1{}^4\, d\tau = \frac{\partial\Omega}{\partial\xi}$$

is. Verder wordt voor het lichaam A

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x_c} = a\,c^2\left(\tfrac{3}{4}\frac{v^2}{c^2}\frac{\partial}{\partial x_c}\,\Sigma\,\frac{a_i}{r_i} + \tfrac{3}{4}\frac{\partial}{\partial x_c}\,\Sigma\,\frac{v_i^2\,a_i}{c^2\,r_i} - 2\frac{\partial}{\partial x_c}\,\Sigma\,\frac{\xi\xi_i + \eta\eta_i + \zeta\zeta_i}{c^2}\,\frac{a_i}{r_i}\right),$$

hetgeen juist het $\frac{\varkappa c}{4\pi}$-voud is van de bijdrage van den tweeden, derden en vierden term in (55). Door dit alles gaat (14), na vermenigvuldiging met $\frac{\varkappa c}{4\pi}$, over in

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\dot{x}_c}\right)=\frac{\partial\Omega}{\partial x_c}+\tfrac{1}{2}c^2\alpha\frac{\partial}{\partial x_c}\Sigma\frac{\alpha_i}{r_i}-\tfrac{3}{20}c^2\alpha\frac{\partial}{\partial x_c}\Sigma\frac{\alpha_i^2}{R_i r_i}-$$

$$-\tfrac{3}{20}c^2\alpha\cdot\frac{\alpha}{R}\frac{\partial}{\partial x_c}\Sigma\frac{\alpha_i}{r_i}-\tfrac{1}{8}c^2\alpha\frac{\partial}{\partial x_c}\left(\Sigma\frac{\alpha_i}{r_i}\right)^2+$$

$$+\tfrac{1}{4}c^2\alpha\frac{\partial}{\partial x_c}\Sigma\chi_i'\frac{\alpha_i}{r_i}+\tfrac{1}{4}\alpha\frac{\partial}{\partial x_c}\Sigma\alpha_i\frac{\partial^2 r_i}{\partial t^2}-\tfrac{1}{5}\frac{\alpha^2}{R}\dot{v}_c . \quad . \quad . \quad . \quad (57)$$

Stellen wij nu

$$S=\tfrac{1}{2}c^2\left(\alpha\Sigma\frac{\alpha_i}{r_i}+\Sigma\frac{\alpha_i\alpha_j}{r_{ij}}\right)-$$

$$-\tfrac{3}{20}c^2\left[\frac{\alpha^2}{R}\Sigma\frac{\alpha_i}{r_i}+\Sigma\frac{\alpha_i^2\alpha}{R_i r_i}+\sum_{ij}\left(\frac{\alpha_i^2\alpha_j}{R_i r_{ij}}+\frac{\alpha_i\alpha_j^2}{R_j r_{ij}}\right)\right]$$

$$-\tfrac{1}{8}c^2\left[\alpha\left(\Sigma\frac{\alpha_i}{r_i}\right)^2+\sum_i\alpha_i\left(\frac{\alpha}{r_i}+\Sigma(j=\!/\!=i)\frac{\alpha_j}{r_{ij}}\right)^2\right], \quad . \quad . \quad (58)$$

waarin de aanwijzing $j=\!/\!=i$ beteekent, dat j alle waarden behalve i moet doorloopen, dan is S eene uitdrukking waarin de coördinaten van alle lichamen op dezelfde wijze voorkomen. Men heeft voor het lichaam A

$$\frac{\partial S}{\partial x_c}=\tfrac{1}{2}c^2\alpha\frac{\partial}{\partial x_c}\Sigma\frac{\alpha_i}{r_i}-\tfrac{3}{20}c^2\alpha\frac{\alpha}{R}\frac{\partial}{\partial x_c}\Sigma\frac{\alpha_i}{r_i}-\tfrac{3}{20}c^2\alpha\frac{\partial}{\partial x_c}\Sigma\frac{\alpha_i^2}{R_i r_i}-$$

$$-\tfrac{1}{8}c^2\alpha\frac{\partial}{\partial x_c}\left(\Sigma\frac{\alpha_i}{r_i}\right)^2-\tfrac{1}{4}c^2\sum_i\alpha_i\left(\frac{\alpha}{r_i}+\Sigma(j=\!/\!=i)\frac{\alpha_j}{r_{ij}}\right)\frac{\partial}{\partial x_c}\left(\frac{\alpha}{r_i}\right).$$

Dit is juist gelijk aan den tweeden, derden, vierden, vijfden en zesden term in het tweede lid van (57). Want in den zesden term aldaar moet χ' niet mee gedifferentiëerd worden, zoodat die term luidt

$$-\tfrac{1}{4}c^2\alpha\sum_i\left(\frac{\alpha}{r_i}+\Sigma(j=\!/\!=i)\frac{\alpha_j}{r_{ij}}\right)\frac{\partial}{\partial x_c}\left(\frac{\alpha_i}{r_i}\right).$$

Wij mogen dus voor (57) schrijven

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\dot{x}_c}\right)=\frac{\partial\Omega}{\partial x_c}+\frac{\partial S}{\partial x_c}-\tfrac{1}{5}\frac{\alpha^2}{R}\dot{v}_c+\tfrac{1}{4}\alpha\frac{\partial}{\partial x_c}\Sigma\alpha_i\frac{\partial^2 r_i}{\partial t^2} \quad . \quad . \quad (59)$$

§ 20. Wij moeten nu nog de laatste twee termen in (59) den gewenschten vorm geven. Stellen wij

$$A=\tfrac{1}{10}\left(\frac{\alpha^2 v^2}{R}+\Sigma\frac{\alpha_i^2 v_i^2}{R_i}\right), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (60)$$

dan wordt voor het lichaam A

$$-\tfrac{1}{5}\frac{\alpha^2}{R}\dot{v}_c=-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial A}{\partial v_c}\right)=-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial A}{\partial\dot{x}_c}\right)+\frac{\partial A}{\partial x_c}, \quad . \quad . \quad . \quad (61)$$

daar A niet van x_c afhangt.

In den laatsten term van (59) moet eerst, als men r_i naar t differentieert, het punt x_1, x_2, x_3 worden vastgehouden, zoodat de verandering van r_i alleen door de beweging van A_i wordt teweeggebracht. Dit in het oog houdende vindt men

$$\frac{\partial r_i}{\partial t} = \Sigma\,(a)\,\frac{\partial r_i}{\partial x_{ia}}\,\dot{x}_{ia},$$

$$\frac{\partial^2 r_i}{\partial t^2} = \Sigma\,(a)\,\frac{\partial r_i}{\partial x_{ia}}\,\ddot{x}_{ia} + \Sigma\,(ab)\,\frac{\partial^2 r_i}{\partial x_{ia}\,\partial x_{ib}}\,\dot{x}_{ia}\,\dot{x}_{ib},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_c}\left(\frac{\partial^2 r_i}{\partial t^2}\right) = \Sigma\,(a)\,\frac{\partial^2 r_i}{\partial x_c\,\partial x_{ia}}\,\ddot{x}_{ia} + \Sigma\,(ab)\,\frac{\partial^3 r_i}{\partial x_c\,\partial x_{ia}\,\partial x_{ib}}\,\dot{x}_{ia}\,\dot{x}_{ib},$$

in welke formules, evenals in de eerstvolgende, aan elken index naar welken gesommeerd wordt, de waarden 1, 2 en 3 moeten worden gegeven.

Stellen wij nu

$$B_{i0} = \Sigma\,(ab)\,\frac{\partial^2 r_i}{\partial x_a\,\partial x_b}\,\dot{x}_b\,\dot{x}_{ia},$$

dan is

$$\frac{\partial B_{i0}}{\partial \dot{x}_c} = \Sigma\,(a)\,\frac{\partial^2 r_i}{\partial x_c\,\partial x_a}\,\dot{x}_{ia}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial B_{i0}}{\partial \dot{x}_c}\right) = \Sigma\,(a)\,\frac{\partial^2 r_i}{\partial x_c\,\partial x_a}\,\ddot{x}_{ia} + \Sigma\,(ab)\,\frac{\partial^3 r_i}{\partial x_c\,\partial x_a\,\partial x_b}\,(\dot{x}_b - \dot{x}_{ib})\,\dot{x}_{ia}$$

$$\frac{\partial B_{i0}}{\partial x_c} = \Sigma\,(ab)\,\frac{\partial^3 r_i}{\partial x_c\,\partial x_a\,\partial x_b}\,\dot{x}_b\,\dot{x}_{ia}$$

Bedenkt men dat $\dfrac{\partial}{\partial x_a} = -\dfrac{\partial}{\partial x_{ia}}$ is, dan volgt uit deze vergelijkingen

$$\frac{\partial}{\partial x_c}\left(\frac{\partial^2 r_i}{\partial t^2}\right) = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial B_{i0}}{\partial \dot{x}_c}\right) + \frac{\partial B_{i0}}{\partial x_c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (62)$$

Daar, als wij voor de coördinaten x, y, z schrijven,

$$\frac{\partial^2 r_i}{\partial x^2} = \frac{1}{r_i} - \frac{(x-x_i)^2}{r_i^3}, \text{ enz. };\quad \frac{\partial^2 r_i}{\partial x\,\partial y} = -\frac{(x-x_i)(y-y_i)}{r_i^3}, \text{ enz.}$$

is, wordt

$$B_{i0} = \frac{\xi\xi_i + \eta\eta_i + \zeta\zeta_i}{r_i} +$$

$$+ \frac{1}{r_i}\left(\frac{x-x_i}{r_i}\xi_i + \frac{y-y_i}{r_i}\eta_i + \frac{z-z_i}{r_i}\zeta_i\right)\left(\frac{x_i-x}{r_i}\xi + \frac{y_i-y}{r_i}\eta + \frac{z_i-z}{r_i}\zeta\right)$$

Nu is

$$v_{i0} = \frac{x-x_i}{r_i}\xi_i + \frac{y-y_i}{r_i}\eta_i + \frac{z-z_i}{r_i}\zeta_i$$

de snelheidscomponent van A_i in de richting naar A en

$$v_{0i} = \frac{x_i - x}{r_i}\xi + \frac{y_i - y}{r_i}\eta + \frac{z_i - z}{r_i}\zeta$$

de snelheidscomponent van A in de richting naar A_i. Wij kunnen dus schrijven

$$B_{i0} = \frac{\xi\xi_i + \eta\eta_i + \zeta\zeta_i + v_{0i}v_{i0}}{r_i} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (63)$$

§ 21. Uit (60), (61) en (62) blijkt dat wij, daar in S de snelheden niet voorkomen, voor (59) mogen schrijven

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial M}{\partial \dot{x}_c}\right) = \frac{\partial M}{\partial x_c} \, (c = 1, 2, 3) \, , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (64)$$

indien wij stellen

$$M = \Omega + A + \tfrac{1}{4}\, a \, \Sigma\, a_i \, B_{0i} + \tfrac{1}{4}\, \Sigma\, a_i \, a_j \, B_{ij} + S, \quad . \quad . \quad (65)$$

waarin

$$B_{ij} = \frac{\xi_i\xi_j + \eta_i\eta_j + \zeta_i\zeta_j + v_{ij}v_{ji}}{r_{ij}}$$

voorstelt.

Tot nog toe hebben wij het lichaam A een bijzondere rol toegekend. Thans zullen wij de lichamen $A_1, A_2, \ldots . A_n$ noemen, de coördinaten hunner middelpunten x_1, y_1, z_1, enz. en de snelheidscomponenten $\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1$, enz. Vergelijking (65) gaat dan over in

$$M = \Omega + A + \tfrac{1}{4}\, \Sigma\, a_i a_j \, B_{ij} + S, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (66)$$

waarin, zooals steeds, elk paar lichamen A_i, A_j slechts één term tot de som bijdraagt. Ten gevolge van de nieuwe notatie kan men de uitdrukkingen Ω, A en S eenvoudiger schrijven. Voeren wij den factor $4\pi/\varkappa c$, die bij den overgang van (55) op (57) is weggelaten, weer in door

$$L = \frac{4\pi}{\varkappa c} M \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (67)$$

te stellen en stellen wij bovendien

$$\varkappa = \frac{8\pi}{c^3} k \quad , \quad a_i = \frac{2k}{c^2} m_i \, ,$$

dan gaat (64) over in

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial x_i}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial y_i}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial z_i} \quad . \quad . \quad (68)$$

$$(i = 1, 2, \ldots , n)$$

en vinden wij uit (56), (58), (60), (66) en (67), indien wij de termen die op één, op twee en op drie lichamen betrekking hebben, samen nemen,

$$L = \Sigma(i) \left\{ \tfrac{1}{2} m_i v_i^2 + \tfrac{1}{8} m_i \frac{v_i^4}{c^2} - \frac{3k}{10c^2} \frac{m_i^2 v_i^2}{R_i} \right\} +$$

$$+ \frac{k}{2c^2} \Sigma(\overline{ij}) \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \{3(v_i^2 + v_j^2) - 7(v_i \,.\, v_j) + v_{ij} v_{ji}\} +$$

$$+ \Sigma(\overline{ij}) \left\{ k \frac{m_i m_j}{r_{ij}} - \frac{3}{5} \frac{k^2}{c^2} \left(\frac{m_i m_j^2}{R_j} + \frac{m_j m_i^2}{R_i} \right) \frac{1}{r_{ij}} - \frac{k^2}{2c^2} \frac{m_i m_j^2 + m_j m_i^2}{r_{ij}^2} \right\} -$$

$$- \frac{k^2}{c^2} \Sigma(\overline{ijl}) m_i m_j m_l \left(\frac{1}{r_{ij} r_{jl}} + \frac{1}{r_{jl} r_{li}} + \frac{1}{r_{li} r_{ij}} \right).$$

In deze uitdrukking stelt $(v_i \,.\, v_j)$ het scalaire product der snelheden v_i en v_j voor. De strepen boven de indices moeten er aan herinneren, dat telkens elk paar of elk drietal lichamen slechts één term tot de som oplevert.

Er behoeft nauwelijks op gewezen te worden dat de termen van de eerste orde beantwoorden aan den vorm dien de functie van Lagrange heeft volgens de theorie van Newton, in welke zij gelijk is aan het verschil tusschen de kinetische en de potentieele energie.