

MAX PLANCK UND DIE QUANTENTHEORIE ¹⁾

Wohl selten hat in einem Zeitraum von kaum einem Dezenium, durch die Entdeckung neuer Erscheinungen und das Emporkommen neuer Denkweisen, eine Wissenschaft eine so tiefgehende Umwandlung erfahren wie vor 25 Jahren die Physik. Das scheidende Jahrhundert hatte in rascher Aufeinanderfolge die Entdeckung der Röntgenstrahlen, der Radioaktivität und des ZEEMANeffektes gebracht; man hatte die ersten Aufschlüsse über das Wesen des Elektrons gewonnen, und 1905 sollte EINSTEINS erste Abhandlung über die Relativitätstheorie erscheinen.

In der Mitte dieser merkwürdigen Periode entstand die Quantentheorie, die, indem sie zu einer Atomistik der Energie führte und die Einsicht in die Bedeutung des Diskontinuierlichen in dem Naturgeschehen vertiefte, in ganz besonderem Masse an der Neugestaltung der Physik mitgewirkt hat. Nach und nach hat sie immer weitere Gebiete unter ihre Herrschaft gebracht, den Bau der Atome enthüllt und die Sprache der Spektren enträtselt. So ist sie den Physikern unserer Tage ein unentbehrlicher und zuverlässiger Führer geworden, dessen Anweisungen sie gern folgen. Mögen auch ihre Aussagen manches Mal wie unverständliche Orakelsprüche klingen, wir können uns das gefallen lassen, da wir überzeugt sind, dass grosse Wahrheiten hinter denselben liegen müssen.

Es ziemt sich wohl, jetzt in Dankbarkeit und Bewunderung daran zurückzudenken, dass PLANCK in der Sitzung der Deutschen Physikalischen Gesellschaft vom 14. Dezember 1900 mit der Entwicklung seiner Hypothese der Energieelemente den Grund zur Quantentheorie legte, und an der Hand des Meisters noch einmal dem Wege zu folgen, den er damals gegangen ist.

Das Ziel war, die Art und Weise, wie die Intensität der Wärmestrahlung von Temperatur und Wellenlänge abhängt, theoretisch

¹⁾ Naturwissenschaften. 13, 1077, 1925.

zu deuten; die Grundlagen, auf welchen weiterzubauen war, hatten einerseits die Thermodynamik und statistische Mechanik, andererseits MAXWELLS Theorie des elektromagnetischen Feldes geliefert. Seit KIRCHHOFF wusste man, dass die Energiedichte der schwarzen Strahlung eine von den Eigenschaften spezieller Körper unabhängige Funktion von Temperatur und Wellenlänge ist. Auch hatte BOLTZMANN mit seiner theoretischen Ableitung des STEFANSCHEN Gesetzes, und W. WIEN mit seinem „Verschiebungsgesetz“ wichtige Eigenschaften dieser universellen Funktion ans Licht gebracht. Es erübrigte aber noch, ihre Gestalt völlig anzugeben.

Dies war die Aufgabe, die PLANCK sich auch schon in mancher früheren Arbeit gestellt hatte. In den in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie erschienenen und Anfang 1900 in den Annalen der Physik zusammengefassten Untersuchungen über irreversible Strahlungsvorgänge handelte es sich eben darum, den Austausch der Energie zwischen Äther und Materie im einzelnen zu verfolgen. Freilich wurde dabei die Materie weitgehend schematisiert; als ihre Vertreter gelten PLANCKS wohlbekannte lineare Vibratoren oder Resonatoren. Jedes dieser kleinen Gebilde hat eine bestimmte Schwingungszahl und trägt gewisse elektrische Ladungen, durch welche die Wechselwirkung mit dem Strahlungsfelde ermöglicht wird. Über ihre Struktur brauchen keine bestimmten Voraussetzungen gemacht zu werden; nur wird angenommen, dass ein Vibrator seine Schwingungsenergie bloss durch die von ihm ausgehende Strahlung und nicht durch Widerstände anderen Ursprunges verlieren kann. Andererseits können die bereits vorhandenen Strahlen ihn in Schwingung versetzen oder seine Bewegung verstärken oder schwächen, so dass im allgemeinen die Energie U des Resonators im Laufe der Zeit zu- oder abnimmt.

Übrigens wird nachdrücklich betont, was PLANCK wiederholt als das Wesentliche der thermodynamischen Behandlung hervorgehoben hat: es kommt gar nicht auf alle die rasch und unregelmässig wechselnden Einzelheiten in den Vorgängen an, sondern nur auf das, was sich bei „makroskopischer“ Beobachtung zeigen kann. Unter U ist also ein Mittelwert zu verstehen, berechnet für eine Zeit, die viele Schwingungsperioden umfasst, aber dennoch so klein ist, dass von den Änderungen, die beobachtbare Grössen in derselben erleiden, abgesehen werden darf. Ähnliches gilt von dem

Strahlungsfelde. Nicht die einzelnen Schwingungen sind Gegenstand der Untersuchung, sondern nur die Intensitäten der sich in verschiedenen Richtungen durchkreuzenden Strahlen, wobei für jede Richtung und jedes kleine Wellenlängenintervall die Intensität gemessen wird durch die durch ein senkrecht zur Strahlrichtung gestelltes Flächenelement hindurchgehende Energiemenge, und Strahlen, deren Richtungen in einem kleinen körperlichen Winkel eingeschlossen sind, zusammengenommen werden. Mit den Grössen, die zur Darstellung dieser Energiemengen eingeführt werden, hängt die Energiedichte in einfacher Weise zusammen.

Das erste Ergebnis ist nun eine aus rein elektromagnetischen Betrachtungen abgeleitete Formel, welche die zeitliche Änderung der Energie des Vibrators, also die Grösse dU/dt zu berechnen gestattet, sobald für den ins Auge gefassten Zeitpunkt der Wert von U und die der Strahlungsintensitäten bekannt sind. Daraus ergibt sich die Bedingung für das Gleichgewicht, wenn man dU/dt gleich Null setzt.

Bezeichnet man die dem Wellenlängenbereich $d\lambda$ entsprechende Energiedichte mit $u d\lambda$, so lautet das Resultat, Isotropie des Strahlungsfeldes vorausgesetzt,

$$u = \frac{8\pi}{\lambda^4} U. \quad (1)$$

Das Problem wird somit gelöst sein, sobald man für jeden Resonator, d. h. für jede Schwingungszahl ν , die Energie U als Funktion der Temperatur kennt. Dann kennt man eben auch die „Strahlungsfunktion“ u in ihrer Abhängigkeit von λ und T . Dabei ist noch zu bemerken, dass u nicht nur die Energiedichte der Strahlung, sondern auch das Emmissionsvermögen eines vollkommen schwarzen Körpers bestimmt. Aus diesem kann dann ferner, auf Grund des KIRCHHOFFSchen Gesetzes, die Emission jedes anderen Körpers, dessen Absorptionsvermögen man kennt, abgeleitet werden.

Hier liegt der Punkt, wo es klar wird, dass man mit den früher in der Thermodynamik und den kinetischen Theorien allgemein als gültig angesehenen Sätzen unmöglich zum Ziele gelangen kann, dass also ein neuer Weg eingeschlagen werden muss. Nach dem bekannten Satze von der „Gleichverteilung“ der Energie würde nämlich beim thermischen Gleichgewicht einem Teilchen für

jeden seiner Freiheitsgrade im Mittel die kinetische Energie $\frac{1}{2}kT$ zukommen. PLANCKS linearer Vibrator hätte also, da für ihn die Mittelwerte der potentiellen und der kinetischen Energie gleich sind, im ganzen die Energie

$$U = kT,$$

und die Formel für die Strahlungsfunktion wäre

$$u = \frac{8\pi kT}{\lambda^4}. \quad (2)$$

Es sind keine feinen Beobachtungen nötig, um einzusehen, dass die Erfahrung diesem Resultate widerspricht. In der Formel ist ja nichts zu sehen von dem Maximum, das die Strahlungsfunktion bei festgehaltener Temperatur für eine bestimmte Wellenlänge aufweist. Auch überzeugt man sich leicht davon, dass die Gleichung in vielen Fällen, und zwar was die kleineren Wellenlängen anbetrifft, zu einer zu grossen Energiedichte und einer zu starken Emission führt. Man betrachte z. B. eine polierte Silberplatte bei der Temperatur von 15°C . und gelbes Licht. Da bei senkrechter Inzidenz die Platte etwa 90% der einfallenden Energie reflektiert, so beträgt ihr Absorptionsvermögen $\frac{1}{10}$. Folglich muss in normaler Richtung ihr Emissionsvermögen ein Zehntel von dem eines vollkommen schwarzen Körpers sein. Für diesen letzteren wäre nun, wenn Gleichung (2) gälte, die Emission der absoluten Temperatur proportional; sie würde somit bei 15° etwa 5mal kleiner sein als bei 1200° . Das Emissionsvermögen der kalten Silberplatte wäre also der 50. Teil von dem eines auf 1200° erhitzten schwarzen Körpers. Die von diesem letzteren ausgehende Strahlung ist aber so intensiv, dass der 50. Teil derselben der Beobachtung nicht entgehen könnte. Die Silberplatte müsste im Dunkeln sichtbar sein. Dass sie es nicht ist, beweist, dass die in derselben enthaltenen, dem gelben Lichte entsprechenden Vibratoren nicht entfernt die Wärmebewegung haben, die ihnen bei der Ableitung der Formel (2) zugeschrieben wurde.

Betrachtungen dieser Art zeigen, dass der Satz von der Gleichverteilung der Energie in seiner Anwendung auf die Strahlungserscheinungen unbedingt aufgegeben werden muss. Dieser Schluss wurde von verschiedenen Seiten gezogen, und es bemerkte z. B. RAYLEIGH in einer im Sommer 1900 veröffentlichten kurzen Dis-

kussion des Problems, in der er eine der Gleichung (2) entsprechende Formel ableitete, dass diese jedenfalls nur, bei festgehaltenem λ , für den Grenzfall hoher Temperaturen gelten kann. Er versuchte auch, wie bereits früher (1896) W. WIEN mit bemerkenswertem Erfolg getan hatte, die Formel durch eine bessere zu ersetzen.

PLANCK blieb es aber vorbehalten, das Versagen des Prinzips der Gleichverteilung theoretisch zu begründen.

Einstweilen, in der Abhandlung von der jetzt die Rede ist, beschränkt er sich auf einen ähnlichen Versuch wie die von WIEN und RAYLEIGH gemachten; nur hatte er den glücklichen Gedanken, der ihn später zu der endgültigen Lösung führen sollte, die *Entropie* der Vibratoren und der Strahlung ins Auge zu fassen. Er erkannte, dass es für die Lösung des Problems genügen würde, die Entropie als Funktion der Energie zu kennen.

Es wird nun zunächst die Hypothese eingeführt, dass die Entropie eines Resonators mit der Energie U den Wert

$$S = - \frac{U}{av} \log \frac{U}{ebv} \quad (3)$$

hat, in welchem a und b zwei näher zu bestimmende konstante Größen sind ¹⁾. Diesem Ausdruck wird ein ähnlicher für die Entropie der Strahlung, in dem dieselben Konstanten vorkommen, an die Seite gestellt und zur Rechtfertigung dieser Annahmen wird sodann die Änderung der Gesamtentropie bei dem Energieaustausch, auf den sich die früher für dU/dt abgeleitete Gleichung bezog, berechnet. Eine Schlussweise, die der von BOLTZMANN beim Beweise seines H-Theorems benutzten ähnlich ist, zeigte, dass sowohl wenn dU/dt positiv, als auch wenn es negativ ist, also bei Energieübergängen von beliebiger Richtung, die Gesamtentropie des Systems zunimmt. Sie erreicht ein Maximum, wenn der durch das Verschwinden von dU/dt gekennzeichnete Gleichgewichtszustand sich eingestellt hat.

Nach dieser Verifizierung der für die Entropie angenommenen Ausdrücke kann ein weiterer Schritt getan werden, darin bestehend, dass das Entropieprinzip auf den Energieaustausch zwischen zwei Resonatoren verschiedener Schwingungszahl angewandt wird. Im Gegensatz zu der im vorhergehenden betrachte-

¹⁾ Mit e ist die Grundzahl der natürlichen Logarithmen gemeint.

ten Wechselwirkung zwischen einem Resonator und der Strahlung, bei der man es jedesmal nur mit *einer* Frequenz zu tun hatte, ist dieser Austausch, den man sich vorstellen muss, um zu einer Beziehung zwischen den *verschiedenen* Frequenzen entsprechenden Energiewerten zu gelangen, als eine *virtuelle* Änderung des Systems zu betrachten. Allerdings kann man sich vorstellen, dass er durch irgendeine geeignete Materie vermittelt wird. Wohlbekannt ist PLANCK'S „Kohlenstäubchen“, dessen er sich oft bei ähnlichen Fragen bedient hat.

Das Ergebnis der neuen Überlegung ist nun, dass für zwei Vibratoren mit beliebigen Schwingungszahlen, wenn Gleichgewicht bestehen soll, der Ausdruck

$$\frac{dS}{dU}$$

den gleichen Wert haben muss. Es liegt nahe, diesen mit dem reziproken Werte der absoluten Temperatur T zu identifizieren, und das Verfahren läuft also darauf hinaus, dass man die bekannte thermodynamische Beziehung

$$\frac{dS}{dU} = \frac{1}{T} \quad (4)$$

auf die Resonatoren anwendet. Substituiert man für S den Wert (3), so findet man die Energie U des Resonators, in T und λ ausgedrückt, und sodann aus (1) für die Strahlungsfunktion ¹⁾

$$u = \frac{8\pi bc}{\lambda^5} e^{-ac/\lambda T}$$

Schliesslich liefert der Vergleich mit den Beobachtungen die Werte der Konstanten a und b .

Das Resultat entspricht genau dem obengenannten von W. WIEN aufgestellten Strahlungsgesetze, dessen wenigstens angenäherte Gültigkeit gerade damals durch die fortgesetzten Untersuchungen von PASCHEN, sowie von LUMMER und PRINGSHEIM dargetan worden war.

Indes war PLANCK mit seiner Ableitung keineswegs zufrieden. Das Bedürfnis, sich von der Willkür in den Formeln für die Entropiewerte zu befreien, lässt ihm keine Ruhe und alsbald, in der im

¹⁾ c bedeutet die Lichtgeschwindigkeit.

April 1900 in den Annalen der Physik erschienenen Arbeit „Entropie und Temperatur strahlender Wärme“, kommt er auf das Problem zurück. Er fängt dabei wieder mit der Berechnung der Entropieänderung an, die den Energieaustausch zwischen einem Vibrator und dem Strahlungsfelde begleitet, und bedient sich dabei seiner früheren Formeln. Dieses Mal wird aber zunächst über die Beziehung zwischen U und S gar keine bestimmte Annahme gemacht. Das Resultat lautet wie folgt: Ist die Energie des Resonators um ΔU verschieden von dem Werte U , den sie im Falle des Gleichgewichtes haben würde, und ändert sich dann bei der Wechselwirkung seine Energie um dU , so ist die Änderung der gesamten Entropie des Systems, die positiv sein muss,

$$dU \cdot \Delta U \cdot \frac{3}{5} \frac{d^2 S}{dU^2}.$$

Offenbar erfordert die Stabilität des Gleichgewichtes, dass dU und ΔU entgegengesetzte Vorzeichen haben; die Energie des Resonators muss durch die Wechselwirkung abnehmen, wenn sie anfangs grösser ist als dem Gleichgewichtszustande entsprechen würde. PLANCK setzt also

$$\frac{3}{5} \frac{d^2 S}{dU^2} = -f(U), \quad (5)$$

wo f eine positive Funktion von U ist, und schreibt demgemäss für die Entropievermehrung

$$-dU \cdot \Delta U \cdot f(U). \quad (6)$$

Das Resultat zeigt, dass man, wenn man sich lediglich auf den Satz der Entropievermehrung stützen will, für S sehr verschiedene Funktionen von U annehmen kann. Um eine bestimmte Strahlungsformel zu gewinnen, wird es daher nötig sein, irgendeine weitere einschränkende Bedingung einzuführen, und zu einer solchen glaubt er nun folgenderweise zu gelangen:

Gesetzt, das System enthalte eine grosse Zahl N von Resonatoren, die gleichbeschaffen sind und sich fortwährend alle in demselben Bewegungszustande befinden. Ist dann für jeden einzelnen der Gleichgewichtswert der Energie U , die Abweichung von diesem Werte ΔU und die in einem kurzen Zeitintervall erfolgende Änderung dU , so sind die entsprechenden Grössen für die ganze Gruppe $U_N = NU$, $\Delta U_N = N\Delta U$ und $dU_N = NdU$.

Da nun die Vorgänge, die sich an den verschiedenen Vibratoren abspielen, als voneinander unabhängig betrachtet werden dürfen, so ist die Änderung der Entropie des Systems N mal so gross wie sie bei dem einzelnen Vibrator war. Andererseits kann man die Betrachtungen, die zu dem Ausdruck (6) geführt haben, auch ebensogut auf die N Resonatoren zusammengenommen anwenden. Es muss also die Gleichung gelten

$$dU_N \Delta U_N f(U_N) = N dU \Delta U f(U), \quad (7)$$

d. h.

$$N f(U_N) = f(U),$$

oder

$$N U f(NU) = U f(U).$$

Dies zeigt, dass die Funktion $U f(U)$ bei Änderung des Argumentes konstant bleibt, und es wird also

$$f(U) = \frac{\text{const}}{U},$$

oder nach (5)

$$\frac{d^2 S}{dU^2} = -\frac{\alpha}{U},$$

wo die positive Konstante α nur noch von der Schwingungszahl ν abhängen kann.

Hieraus folgt

$$S = -\alpha U \log(\beta U),$$

mit einer zweiten von ν abhängigen positiven Konstante β . Da nun aus dem WIENSchen Verschiebungsgesetze folgt, dass S nur von U/ν abhängen kann, so kommt man notwendig zu Formel (3) und damit zu WIENS Strahlungsgesetz.

Es hatte also zunächst den Anschein, dass man auf theoretischem Wege zu keinem anderen als diesem letzteren würde gelangen können. Als dann aber in den nächsten Monaten die Messungen von RUBENS und KURLBAUM die Unzulänglichkeit der WIENSchen Formel ausser Zweifel gesetzt hatten, und von verschiedenen Seiten Abänderungen derselben vorgeschlagen wurden, kamen bei PLANCK Zweifel an seiner Beweisführung auf, und er machte ebenfalls einen Versuch, und, wie sich nachher zeigen sollte, einen sehr glücklich gelungenen, die Formel zu vervollkommen. In der in der Sitzung der Physikalischen Gesellschaft vom 19. Oktober 1900 vorgetragenen Mitteilung „Über eine Verbesse-

rung der WIENSchen Spektralgleichung", in der er an die oben mit (7) bezeichnete Beziehung anknüpft, heisst es:

„In jener Funktionalgleichung stellt der Ausdruck auf der rechten Seite sicher die genannte Entropieänderung dar, weil sich N ganz gleiche Vorgänge unabhängig von einander abspielen, deren Entropieänderungen sich daher einfach addieren müssen. Dagegen würde ich es wohl für möglich, wenn auch immer noch für nicht leicht begreiflich und jedenfalls schwer beweisbar ansehen, dass der Ausdruck links nicht allgemein die ihm früher von mir zugeschriebene Bedeutung besitzt; mit anderen Worten: dass die Werte von U_N , dU_N und ΔU_N gar nicht hinreichen, um die fragliche Entropieänderung zu bestimmen, sondern dass dazu auch U selber bekannt sein muss. Im Verfolg dieses Gedankens bin ich schliesslich dahin gekommen, ganz willkürlich Ausdrücke für die Entropie zu konstruieren, welche, obwohl komplizierter als der WIENSche Ausdruck, doch allen Anforderungen der thermodynamischen und elektromagnetischen Theorie ebenso vollkommen Genüge zu leisten scheinen wie dieser.

Unter den so aufgestellten Ausdrücken ist mir nun einer besonders aufgefallen, der dem WIENSchen an Einfachheit am nächsten kommt und der, da letzterer nicht hinreicht, um alle Beobachtungen darzustellen, wohl verdienen würde, daraufhin näher geprüft zu werden. Derselbe ergibt sich, wenn man setzt

$$\frac{d^2S}{dU^2} = \frac{\alpha}{U(\beta + U)}.$$

Er ist bei weitem der einfachste unter allen Ausdrücken, welche S als logarithmische Funktion von U liefern (was anzunehmen die Wahrscheinlichkeitsrechnung nahelegt) und welche ausserdem für kleine Werte von U in den WIENSchen Ausdruck übergehen".

Da nach dem Verschiebungsgesetze S eine Funktion von U/ν ist und also der zweite Differentialquotient die Form $1/\nu^2 \cdot F(U/\nu)$ hat, so muss β notwendig der Schwingungszahl ν proportional sein und die Konstante α [die nach (5) negativ ist] muss unabhängig von ν sein ¹⁾. Indem er dies berücksichtigt, gelangt PLANCK zu der zweikonstantigen Formel ²⁾

$$u = \frac{C\lambda^{-5}}{e^{c/\lambda T} - 1}.$$

¹⁾ Im Originaltext steht irrtümlicherweise, dass α proportional ν^4 sein muss. (Bemerkung der Herausgeber).

²⁾ In derselben bedeutet c nicht die Lichtgeschwindigkeit.

Hiermit hatte er seine berühmte Strahlungsgleichung gewonnen. Zwar fehlte noch eine vollständige Ableitung aus allgemeinen Prinzipien, aber es vergingen nur wenige Wochen, bis er auch über eine solche berichten konnte. In der Darstellung, die PLANCK dann schliesslich von seiner Theorie gab ¹⁾, äussert er zunächst wieder, aber jetzt mit grösserer Entschiedenheit, das Bedenken gegen die für das WIENSche Gesetz gegebene Ableitung, das schon früher bei ihm aufgekommen war. „Es wird vor allem nötig sein, in der Reihe der Schlussfolgerungen, welche zum WIENSchen Energieverteilungsgesetz führten, dasjenige Glied ausfindig zu machen, welches einer Abänderung fähig ist; sodann aber wird es sich darum handeln, dieses Glied aus der Reihe zu entfernen und einen geeigneten Ersatz dafür zu schaffen.“

Den schwachen Punkt findet er bei erneuter Prüfung in dem der obigen Gleichung (7) zugrunde liegenden Satz, „dass bei einer unendlich kleinen irreversibeln Änderung eines nahezu im thermischen Gleichgewicht befindlichen Systems von N gleichbeschaffenen, im nämlichen stationären Strahlungsfeld befindlichen Resonatoren die damit verbundene Vermehrung ihrer Gesamtentropie $S_N = NS$ nur abhängt von ihrer Gesamtenergie $U_N = NU$ und deren Änderungen, nicht aber von der Energie U der einzelnen Resonatoren.“

Weil, wie PLANCK es ausdrückt, Entropie „Unordnung“ voraussetzt, so muss gerade die Ungleichheit der einzelnen Energiewerte eine wesentliche Rolle spielen. In diesem Gedankengange geht er jetzt daran, die Entropie der Resonatoren zu berechnen, und zwar dient ihm dabei das BOLTZMANNsche Prinzip, nach welchem die Entropie eines Systems in einem bestimmten Zustande, gemäss der Formel

$$S = k \log W,$$

durch die „Wahrscheinlichkeit“ W dieses Zustandes gegeben ist.

Es kommt also darauf an, die Wahrscheinlichkeit dafür zu finden, dass die N Resonatoren insgesamt die Schwingungsenergie U_N besitzen. „Hierzu ist es notwendig“ (in diesem Satze liegt der

¹⁾ Ich folge nicht der Mitteilung in den Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft, sondern der ausführlicheren Abhandlung („Über das Gesetz der Energieverteilung im Normalspektrum“), die im März 1901 in den Ann. der Physik erschien.

Keim der Quantentheorie), „ U_N nicht als eine stetige, unbeschränkt teilbare, sondern als eine diskrete, aus einer ganzen Zahl von endlichen gleichen Teilen zusammengesetzte Grösse aufzufassen. Nennen wir einen solchen Teil ein Energieelement ϵ , so ist mithin zu setzen

$$U_N = P\epsilon, \quad (8)$$

wobei P eine ganze, im allgemeinen grosse Zahl bedeutet, während wir den Wert von ϵ noch dahingestellt sein lassen.“

PLANCK berechnet nun die Anzahl von Arten, auf die die Verteilung der P Energieelemente auf die N Resonatoren erfolgen kann, die Anzahl der „Komplexionen“, wie er mit einem von BOLTZMANN herrührenden Ausdruck sagt. Aus der Kombinationslehre ergibt sich dafür

$$\mathfrak{N} = \frac{(N + P - 1)!}{(N - 1)! P!},$$

oder in einer für den Zweck genügenden Annäherung

$$\mathfrak{N} = \frac{(N + P)^{N + P}}{N^N \cdot P^P}.$$

Der weiteren Rechnung wird sodann folgende Hypothese zugrunde gelegt: „Die Wahrscheinlichkeit W dafür, dass die N Resonatoren insgesamt die Schwingungsenergie U_N besitzen, ist proportional der Anzahl \mathfrak{N} aller bei der Verteilung der Energie U_N auf die N Resonatoren möglichen Komplexionen“. Also:

$$\begin{aligned} S_N &= k \log \mathfrak{N} \\ &= k \{(N + P) \log (N + P) - N \log N - P \log P\}, \end{aligned}$$

oder mit Berücksichtigung von (8), wenn man die mittlere Energie eines Resonators U_N/N mit U und seine Entropie S_N/N mit S bezeichnet,

$$S = k \left\{ \left(1 + \frac{U}{\epsilon}\right) \log \left(1 + \frac{U}{\epsilon}\right) - \frac{U}{\epsilon} \log \frac{U}{\epsilon} \right\}. \quad (9)$$

Daraus folgt sofort nach (4) und (1)

$$U = \frac{\epsilon}{e^{\epsilon/kT} - 1} \quad (10)$$

und

$$u = \frac{8\pi\epsilon}{\lambda^4} \cdot \frac{1}{e^{\epsilon/kT} - 1} . \quad (11)$$

Schliesslich wird wieder das Verteilungsgesetz herangezogen. Man sieht sofort an (9), dass das Energieelement ϵ der Schwingungszahl ν des Resonators proportional sein muss, also

$$\epsilon = h\nu,$$

wo h eine zweite universelle Konstante (neben k) ist. Die Formel für u verwandelt sich jetzt in

$$u = \frac{8\pi ch}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{ch/k\lambda T} - 1} .$$

Das ist die endgültige Form des PLANCKSchen Gesetzes, von dem man sagen darf, dass seine Ableitung immer eine der schönsten Leistungen der theoretischen Physik bleiben wird. Um sie richtig zu würdigen, müssen wir nicht aus dem Auge verlieren, dass PLANCK leicht hätte sagen können: Da *selbstverständlich* die Resonatoren Energie in beliebig kleinen Mengen aufnehmen und abgeben können, so wird die Wirklichkeit dem Grenzfall entsprechen, dem wir uns nähern, wenn wir das Energieelement fortwährend abnehmen lassen; damit wäre er auf die Gleichverteilung zurückgekommen ¹⁾. Statt dessen hatte er den folgenreichen Einfall, die Grössen ϵ nicht bloss zunächst für die Zwecke der Rechnung als endlich anzunehmen, *sondern sie auch endlich bleiben zu lassen*. Wir wollen dabei nicht vergessen, dass das Glück, solche Einfälle zu haben, nur denjenigen zuteil wird, die es durch mühsame Arbeit und tiefes Nachdenken verdient haben.

Übrigens ist es jetzt, da wir die Theorie einmal besitzen, leicht einzusehen, dass PLANCKS Hypothese dem Zweck, für den sie dienen sollte, wohl angemessen war. Eine einfache Überlegung lehrt, dass die endliche Grösse der Energieelemente wirklich zu einer Abweichung von der Gleichverteilung führen muss, und zwar, falls ϵ mit ν wächst, in dem Sinne, dass auf die höheren Frequenzen relativ weniger Energie entfällt als auf die tieferen. Man kann z. B., um zu der Strahlungsformel zu gelangen, in ähnlicher Weise verfahren wie BOLTZMANN in seiner Ableitung des MAXWELLSchen Verteilungsgesetzes für Gasmoleküle. Eine Lotterie, an der so-

¹⁾ Nähert ϵ sich der Null, so geht (11) in (2) über.

wohl die Moleküle eines Körpers wie auch die in ihm enthaltenen Resonatoren verschiedener Frequenz teilnehmen, soll über die Verteilung einer gegebenen Energiemenge entscheiden; dabei sind die Moleküle bereit, jede beliebig kleine Menge zu akzeptieren, die Resonatoren dagegen verlangen endliche Portionen, und zwar um so grössere, je höher ihre Schwingungszahl ist. Man kann es verstehen, dass, bei beschränktem Energievorrat die Teilchen, die am begierigsten sind, am Ende am wenigsten bekommen. So wirkt die endliche, mit der Schwingungszahl wachsende Grösse des Energieelementes dahin, die Freiheitsgrade mit höheren Frequenzen relativ weniger wirksam zu machen. Lässt man die Intensität der zu einem Freiheitsgrade gehörenden elastischen oder quasi-elastischen Kräfte immerfort zunehmen, so wird die Energie, welche das System in diesem Freiheitsgrade erhält, stets kleiner. So nähert man sich am Ende dem Grenzfall einer starren, jede Bewegung ausschliessenden Verbindung.

An diese Erinnerung an den Ursprung der Quantentheorie möge sich ein flüchtiger Blick auf die reichen Früchte, die sie bereits getragen hat, anschliessen. Zahlreiche ältere und jüngere Physiker in allen Ländern haben sich an ihrer Entwicklung beteiligt, und PLANCK selbst hat unablässig, von Jahr zu Jahr, auch unter Umständen, wo ihm die Arbeit schwer fallen musste, seine Untersuchungen fortgesetzt. *Ihm* war es stets vor allem darum zu tun, die Grundlagen der Theorie zu sichern und ihren Sinn klar hervortreten zu lassen.

Dass nun die Lehre der Energieelemente sich zur allgemeinen Quantentheorie hat ausbilden können, das ist ihrem merkwürdigen Anpassungsvermögen zu verdanken, infolgedessen sie sich an wichtige allgemeine Sätze der theoretischen Mechanik anschliessen konnte. Solange man es nur mit einfach harmonischen Schwingungen zu tun hatte, reichte der ursprüngliche Begriff der Energieelemente für die Anwendungen aus. Später, als man lernte auch andere, vollkommen oder bedingt periodische Bewegungen, mitunter sogar nicht-periodische Vorgänge zu „quantisieren“, handelte es sich um die Werte von „Phasenintegralen“ oder um die Grösse begrenzter Gebiete im „Phasenraum“. Die in solchen Fällen aufgestellten Quantenbedingungen bestehen immer darin, dass für die betreffende Grösse nur Werte zugelassen werden, die

Vielfache eines gewissen Einheitswertes sind, und in den Einheitswerten selbst steckt immer die Konstante h . Jetzt sind wir soweit gekommen, dass diese Konstante nicht bloss für die Intensität der Strahlung und für die Wellenlänge, bei der sie ein Maximum ist, sondern auch für die in vielen anderen Fällen bestehenden quantitativen Verhältnisse verantwortlich gemacht wird. In Verbindung mit anderen physikalischen Grössen bestimmt sie, um nur einiges zu nennen, die spezifische Wärme fester Körper, die photochemische Wirkung des Lichtes, die Bahnen der Elektronen im Atom, die Wellenlänge der Spektrallinien, die Frequenz der Röntgenstrahlen, die durch den Anprall von Elektronen mit gegebener Geschwindigkeit hervorgerufen werden, die Geschwindigkeit, mit welcher Gasmoleküle rotieren können, und wohl auch die Entfernungen der Teilchen, die sich zu einem Krystall zusammenfügen. Man übertreibt nicht, wenn man sagt, dass in unserem Weltbilde die Quantenbedingungen es sind, die die Materie zusammenhalten und sie davor beschützen, durch Strahlung ihre Energie völlig zu verlieren. Und dass es sich bei allen diesen Dingen um reelle Zusammenhänge handelt, geht überzeugend aus der Übereinstimmung hervor, die zwischen den aus verschiedenen Erscheinungen abgeleiteten Werten von h besteht, Werte, die sich übrigens wenig von der Zahl entfernen, die PLANCK vor 25 Jahren aus den ihm zur Verfügung stehenden Versuchsergebnissen berechnen konnte.

Was die Beziehungen zu der älteren Mechanik betrifft, so ist besonders der Umstand erfreulich, dass, wie in der Theorie der adiabatischen Invarianten gezeigt wird, gerade die Grössen, die durch Quantenbedingungen festgelegt werden, ihre Werte behalten, wenn die Bedingungen, unter welchen die Bewegungen eines Systems stattfinden, langsam geändert werden. Es war denn auch kein Zufall, dass das mit jener Theorie zusammenhängende Verschiebungsgesetz für die nähere Bestimmung des Energieelementes herangezogen werden konnte.

Freilich ist die Verschmelzung der neuen Ideen mit der klassischen Mechanik und Elektrodynamik noch ein Zukunftstraum und sind wir noch weit entfernt von einer Quantenmechanik, in deren Grundlagen das Diskontinuierliche aufgenommen wäre. Indes sind auch bereits in dieser Richtung vielversprechende Anfänge gemacht worden.

PLANCK hatte das Glück, zur Freude aller die ihn als Physiker und persönlich verehren und schätzen, in voller Schaffenskraft Zeuge der Wirkung seiner Gedanken zu sein. Möge es ihm vergönnt sein, sich noch lange an den Erfolgen der Quantentheorie zu erfreuen.
