# CONSIDÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES SUR LE PRINCIPE DE RELATIVITÉ [1]

§ 1. Dans cet article, que la Rédaction m'a fait l'honneur de me demander, je n'entrerai pas dans une discussion approfondie du principe important que la Physique doit à M. EINSTEIN et des conséquences qu'on peut en tirer. Je me bornerai à quelques problèmes bien simples qui peuvent servir d'introduction à la théorie générale.

On sait que, pour expliquer l'aberration astronomique, FRESNEL a admis que l'éther, le milieu qui remplit tout l'espace et pénètre toute matière, n'est pas entrainé par le mouvement des corps célestes et peut, au contraire, être regardé comme absolument immobile. Cette hypothèse revient à admettre que nos laboratoires, avec leurs instruments d'observation, sont continuellement traversés par un courant d'éther, dont la vitesse, égale et opposée à celle de la Terre dans son mouvement annuel, est à peu près la dix-millième partie de la vitesse de la lumière.

On s'est demandé naturellement si ce courant ne doit pas avoir une influence observable sur le résultat des expériences dans lesquelles l'éther joue un rôle. Or, toutes les tentatives qu'on a faites pour découvrir des effets de cette nature ont échoué, et il semble permis de poser en principe cette thèse qu'un système de corps qui se déplace à travers l'éther peut être le siège d'exactement les mêmes phénomènes qu'un système identique qui n'a pas ce mouvement de translation.

Pour préciser les idées, nous pouvons imaginer qu'il y a deux observateurs $A$ et $B$, chacun muni d'une collection d'instruments, et même d'un laboratoire complètement outillé. L'observateur $A$ et les instruments dont il dispose seront en repos relativement à l'éther; $B$, au contraire, se déplacera à travers ce milieu avec une vitesse $v$, constante en direction et grandeur, et son laboratoire

[1] Revue générale des Sciences, **25**, 179, 1914.

tout entier prendra part à ce mouvement. Ses instruments seront identiques à ceux de $A$, ce qui veut dire que, si les deux systèmes d'appareils se trouvent d'abord entre les mains du même observateur, de $A$ par exemple, il lui sera impossible d'y trouver la moindre différence. Cela posé, si $A$ fait une observation ou une mesure quelconque, $B$ peut faire la même chose avec exactement le même résultat dans son laboratoire.

Nous allons maintenant appliquer ce principe à quelques cas spéciaux. Mais il faut d'abord faire deux remarques.

On sait, en premier lieu, que, dans la théorie de M. EINSTEIN, on ne parle plus de l'éther. C'est une question sur laquelle j'aurai à revenir, mais qui, à vrai dire, ne me semble pas très importante. Pour le moment, nous supposerons l'existence d'un tel milieu qui sera en repos pour l'observateur $A$. Cela implique que pour lui la lumière se propagera avec une vitesse déterminée $c$, qui est toujours la même, indépendamment d'un mouvement éventuel de la source qui l'émet ou d'un miroir qui la réfléchit.

En second lieu, je dois faire mes excuses des termes absolus dans lesquels je parlerai d'expériences qui sont en grande partie imaginaires et exigeraient des moyens d'observation vraiment transcendants. C'est le désir de m'exprimer clairement et concisément qui m'y oblige.

Du reste, voici le mode de raisonner dont nous nous servirons à plusieurs reprises. Après avoir imaginé une expérience faite par l'observateur $A$ et l'expérience correspondante que $B$ pourra faire dans son laboratoire, nous discuterons cette seconde expérience en nous plaçant au point de vue de $A$. En effet, rien ne s'oppose à ce que ce physicien considère l'aspect sous lequel se présentent à lui les phénomènes produits par $B$.

§ 2. Commençons par l'expérience célèbre de M. MICHELSON. $A$ fait interférer deux faisceaux de lumière qui se sont propagés le long de deux lignes droites $OP$ et $OQ$ (fig. 1) perpendiculaires entre elles, un rayon du premier faisceau ayant d'abord suivi le chemin $OP$ pour revenir en $O$ après réflexion par un miroir placé en $P$, et un rayon du second faisceau revenant également en $O$ après réflexion par un miroir installé au point $Q$. Bien entendu, pour qu'on puisse observer une interférence, les deux faisceaux doivent provenir d'une même source lumineuse et doivent à la fin être ramenés à la même direction. Nous ne parlerons pas des accessoires que cela nécessite et que nous supposerons placés avec toutes les autres parties de l'appareil, y compris la source lumineuse, sur un corps rigide, qui peut être, par exemple, une plaque en pierre ou bien un système de deux barres métalliques $OP$ et $OQ$ solidement fixées l'une à l'autre. Quant aux franges d'interférence, elles seront observées dans un plan qui a une position fixe dans l'appareil.

Si le système que nous venons de décrire se trouve en repos pour l'observateur $A$ et si les bras $OP$, $OQ$ ont exactement la même longueur $l$, il constatera l'égalité des temps que les deux rayons considérés mettent à parcourir les chemins $OPO$ et $OQO$ ; la durée du parcours sera $2l/c$ pour l'un et pour l'autre.

Supposons ensuite que l'observation soit répétée par $B$, l'appareil étant animé cette fois-ci de la vitesse $v$, disons dans la direction de $OP$. D'après notre principe, les franges se retrouveront exactement dans les mêmes positions, ce qui prouve que les deux rayons reviennent de nouveau à leur point de départ en des temps égaux. Mais quel est maintenant le cours de ces rayons dans le laboratoire de $A$ ?

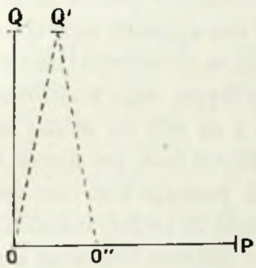

Fig. 1.

Pour cet observateur, le rayon qui va de $O$ vers $P$ a, par rapport à ces points de l'appareil, une vitesse relative $c - v$, tandis que cette vitesse est $c + v$ pour le rayon réfléchi. Le temps nécessaire pour l'aller et le retour sera donc

$$\frac{l}{c - v} + \frac{l}{c + v} = \frac{2cl}{c^2 - v^2}. \qquad (1)$$

Quant au rayon qui est réfléchi par le miroir en $Q$, il ne suit pas après cette réflexion le chemin par lequel il a atteint le miroir. Si $t_1$, $t_2$, $t_3$ sont les moments du départ, de la réflexion et du retour, et si nous désignons par $O$, $O''$ les positions du point $O$ aux instants $t_1$, $t_3$ et par $Q'$ celle de $Q$ à l'instant $t_2$, le chemin du rayon se composera des lignes droites $OQ'$ et $Q'O''$. On voit facilement que $OQ'O''$ est un triangle isocèle dont la base $OO''$ est à la somme des côtés $OQ'$ et $O''Q'$ dans le rapport de $v$ à $c$, et dont la hauteur est égale à $l$. Ces données suffisent pour déterminer la figure, et on trouve par un simple calcul:

$$OO'' = \frac{2vl}{\sqrt{c^2 - v^2}}, \qquad OQ' = \frac{cl}{\sqrt{c^2 - v^2}},$$

ce qui nous donne

$$\frac{2l}{\sqrt{c^2 - v^3}} \tag{2}$$

pour la durée de la propagation.

Ce résultat diffère de la durée représentée par (1) et nous voilà donc en contradiction avec notre principe fondamental.

§ 3. Il ne semble y avoir pour l'observateur $A$ qu'un seul moyen d'échapper à cette difficulté. Il lui faudra admettre que les dimensions du corps solide sur lequel il a monté son appareil sont changées par le fait même de la translation. Cela ne l'étonnera pas trop s'il a appris que les actions électromagnétiques sont transmises par l'éther; il trouvera naturel alors qu'il en soit de même des forces moléculaires, et il se dira qu'en vertu de cela, ces forces, et les dimensions des corps qui en dépendent, peuvent fort bien être modifiées par l'effet d'une translation au sein de l'éther immobile.

L'hypothèse qu'il faut introduire peut d'ailleurs être mise sous des former différentes. Pour des raisons sur lesquelles nous ne pouvons insister ici, on a admis que les dimensions perpendiculaires à la translation restent inaltérées, mais que celles qui sont parallèles au mouvement sont raccourcies dans le rapport de

$$a = \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} \tag{3}$$

à l'unité.

Cette contraction a pour effet de diminuer à $l/a$ la distance des points $O$ et $P$, et de nous donner au lieu de l'expression (1):

$$\frac{2cl}{a(c^2 - v^2)}, \tag{4}$$

ce qui est bien égal à la grandeur (2).

On voit que la contraction que nous devons postuler est entièrement indépendante de la nature du corps solide. Elle doit même avoir lieu si le coefficient d'élasticité est tellement élevé que les dimensions du corps ne peuvent pas être changées d'une manière sensible par des forces que nous pouvons lui appliquer. La „rigidité" ne préservera pas le corps de cette nouvelle déformation. Du reste, dans le cas d'un corps non rigide, la question se complique un peu parce que, si l'on veut comparer les dimensions d'un tel corps à l'état de repos et à celui du mouvement, il faudra expressément indiquer les forces auxquelles il sera soumis dans les deux cas. Mais nous pouvons nous borner aux corps rigides.

§ 4. Dans les expériences dont il s'agira dans ce qui suit, nous aurons à nous occuper de la mesure du temps, qui n'intervient pas dans celle de M. MICHELSON. Concevons donc que l'observateur $A$ est muni d'un chronomètre, ou, mieux encore, d'un certain nombre de ces instruments, qu'il distribuera dans son laboratoire en donnant à chacun une place fixe, et qu'il commence par les mettre d'accord les uns avec les autres. A cet effet, il pourra procéder comme il suit. Se plaçant tout près d'un chronomètre $C_1$ et d'une source de lumière, il éclaire pour un moment seulement le cadran du chronomètre $C_2$ qu'il veut comparer avec $C_1$, et qui se trouve à certaine distance. Il lit sur $C_1$ les instants $t_1$ et $t_2$ du départ et du retour de la lumière et, simultanément avec cette dernière observation, il note la position $t$ de l'aiguille de $C_2$.

Comme la lumière prend des temps égaux pour l'aller et le retour, il faut conclure de ces observations que le second chronomètre marque le temps $t$ au même moment où le premier marque $\frac{1}{2}(t_1 + t_2)$. On trouve ainsi de combien il faut avancer ou retarder le chronomètre $C_2$ pour le mettre d'accord avec $C_1$. Une fois le réglage fait, l'accord subsistera pour toujours, parce que les chronomètres sont supposés absolument parfaits et égaux entre eux.

Après ces préparatifs, le physicien $A$ pourra facilement déterminer le moment auquel a lieu un phénomène instantané qui se produit en un point quelconque de son laboratoire. Il le lira directement sur un chronomètre placé en ce point même, sans qu'il ait à se préoccuper de nouveau du temps de propagation de la lumière.

§ 5. Voici maintenant notre deuxième expérience. Placé au bout $O$ de la barre rigide $OP$, l'observateur $A$ lance un signal lumineux vers le point $P$ où se trouve le miroir dont nous avons déjà parlé. Il lit sur un chronomètre placé en $O$ les instants $t_1$ et $t_2$ du départ et du retour de la lumière. L'intervalle entre ces instants sera $2l/c$.

Imaginons de nouveau que l'expérimentateur $B$ fait la même chose en se servant d'une barre $OP$ qui appartient à son laboratoire, et d'un chronomètre placé au bout $O$, ce chronomètre se déplaçant maintenant avec la barre et l'observateur même dans la direction $OP$.

Si l'aiguille marque $t'_1$ et $t'_2$ aux moments où le signal lumineux est produit et aperçu après la réflexion par le miroir, il faut d'après notre principe qu'on ait:

$$t'_2 - t'_1 = \frac{2l}{c}. \tag{5}$$

Nous pouvons comparer cette différence avec celle des temps auxquels, dans cette expérience faite par $B$, le départ et le retour de la lumière se font pour l'observateur $A$. Pour lui, la longueur de la barre $OP$, maintenant qu'elle se déplace, est $l/a$, à cause de la contraction qu'elle a subie, et pour trouver la longueur de l'intervalle cherché, il suffit de remplacer $l$ par cette longueur dans l'expression (1). Cela nous ramène à la durée exprimée par (4), qu'on peut aussi représenter par:

$$\frac{2al}{c}, \tag{6}$$

et c'est ce que $A$ trouvera en lisant l'instant du départ et celui du retour sur deux de ses chronomètres $C_1$ et $C_2$, qui se trouvent aux points où ces phénomènes ont lieu. Mais l'horloge mobile appartenant à $B$, qui se trouve d'abord près de $C_1$ et ensuite près de $C_2$, indiquera assurément les temps $t'_1$ et $t'_2$ dont nous venons de parler. $A$ pourra le constater lui-même en l'observant simultanément, la première fois avec $C_1$ et la deuxième fois avec $C_2$.

En comparant les différences (5) et (6), il sera conduit à la conclusion que le chronomètre mobile a marché $a$ fois plus lentement qu'un chronomètre qui occupe une place fixe dans le laboratoire. D'après l'idée qu'il s'est déjà faite de l'influence d'une translation sur les forces moléculaires, il attribuera cet effet à un changement des forces qui sont en jeu dans le ressort du balancier.

On peut montrer facilement que la conclusion reste la même si l'expérience considérée — qui revient évidemment à la détermination de la vitesse de la lumière — est faite dans la direction $OQ$, ou même dans une direction quelconque, et encore que chaque chronomètre qui est en repos pour $B$, et se déplace donc par rapport à $A$, fera sur ce dernier physicien l'impression de marcher moins vite que ses propres instruments.

Notons en passant que si $B$, lui aussi, dispose d'un certain nombre d'horloges, il les mettra d'accord exactement de la même manière dont $A$ vient de procéder.

§ 6. Ce qui vient d'être dit en beaucoup de mots peut se résumer en deux formules bien simples. Concevons que $A$ soit muni d'une longue règle $OP$ divisée en parties égales qu'il prend pour unités de longueur et aux différents points de laquelle il a placé des chronomètres. Prenant $O$ pour origine des coordonnées, il déterminera la position d'un point quelconque $P$ par le nombre $x$ des divisions entre $O$ et $P$. Tout phénomène instantané, qui se produit quelque part tout près de la règle, sera caractérisé par des valeurs déterminées de $x$ et de $t$.

De son côté, l'observateur $B$ se servira d'une règle $O'P'$ identique à $OP$ et glissant le long de cette dernière avec la vitesse constante $v$; il déterminera la position d'un point par le nombre $x'$ des divisions entre ce point et $O'$. Il se servira, en outre, de chronomètres placés aux différents points de $O'P'$ et qui lui donnent le temps $t'$. En observant maintenant le même phénomène qui est caractérisé pour $A$ par $x$ et $t$, $B$ trouvera qu'il a lieu en un point $x'$ et à un moment $t'$.

Cherchons les relations entre $x$, $t$ d'un côté et $x'$, $t'$ de l'autre.

Pour simplifier, nous supposerons qu'au moment où les origines $O$ et $O'$ coïncident, les chronomètres de $A$ et de $B$ qui se trouvent en ces points, marquent tous les deux le temps zéro, c'est-à-dire que pour $x = 0$, $t = 0$, on ait aussi $x' = 0$, $t' = 0$. Il s'ensuit que pour l'origine $O'$, qui se déplace dans le système de $A$ avec la vitesse $v$, on a $x = vt$. Et on trouve ensuite pour un autre point de $O'P'$, déterminé par le nombre de divisions $x'$,

$$x = vt + \frac{x'}{a}.$$

En effet, pour l'observateur $A$, les $x'$ divisions de la règle mobile équivalent à $x'/a$ divisions de la règle sur laquelle il mesure $x$ ; pour lui, la coordonnée du nouveau point surpasse donc constamment de $x'/a$ celle du point $O'$.

Pour trouver la deuxième équation, nous imaginons que $B$, placé au point $O'$ de sa règle, fait l'expérience qui sert à comparer deux de ses chronomètres, dont l'un se trouve au point $O'$ et l'autre au point $P'$ déterminé par la coordonnée $x'$, en supposant que ce soit en $O'$ à l'instant $t' = 0$ que le faisceau instantané est lancé. L'observateur $A$ discutera ce qui se passe. Pour lui, la distance des points $O'$ et $P'$ est égale à $x'/a$ divisions de sa règle, et comme le départ de la lumière a lieu à l'instant $t = 0$, il trouve

$$\frac{x'}{a(c-v)} \tag{7}$$

pour le temps de l'arrivée en $P'$ et

$$\frac{x'}{a(c-v)} + \frac{x'}{a(c+v)} = 2\,\frac{ax'}{c}$$

pour celui du retour en $O'$. Il s'ensuit que l'horloge mobile qui se trouve en ce point, et qui marche $a$ fois plus lentement que les horloges de $A$, marque alors $2x'/c$, et que, en vertu de la manière dont les chronomètres de $B$ ont été mis d'accord, celui qui est placé en $P'$ marque $x'/c$ au moment où son cadran est éclairé. C'est-à-dire que c'est là l'indication de ce chronomètre au moment (7) et, comme nous savons déjà qu'il marche $a$ fois plus lentement que ceux de $A$, nous pouvons dire que si $t'$ est son indication au moment $t$, on aura:

$$t' - \frac{x'}{c} = \frac{1}{a}\left(t - \frac{x'}{a(c-v)}\right),$$

ce qui est la relation que nous avions à chercher.

§ 7. Les formules que nous venons de trouver peuvent être mises sous une forme plus élégante. Si l'on pose

$$b = \frac{v}{\sqrt{c^2 - v^2}}, \tag{8}$$

on en déduit

$$x = ax' + bct', \quad t = at' + \frac{b}{c}\,x'. \tag{9}$$

Notons que, dans ces formules de transformation, $a$ et $b$ sont des constantes dont les valeurs dépendent de celle de la vitesse $v$, mais entre lesquelles il y a la relation

$$a^2 - b^2 = 1. \tag{10}$$

En vertu de cette dernière, les valeurs de $x'$ et de $t'$ qu'on tire des équations précédentes deviennent

$$x' = ax - bct, \quad t' = at - \frac{b}{c}x. \tag{11}$$

La première de ces formules montre que, pour une valeur déterminée de $t$, les changements correspondants de $x$ et de $x'$ sont liés entre eux par l'équation :

$$\Delta x = \frac{1}{a}\,\Delta x'. \tag{12}$$

D'une manière analogue, on a, en vertu de la seconde des équations (8), pour une valeur fixe de $x'$ :

$$\Delta t' = \frac{1}{a}\,\Delta t. \tag{13}$$

Ces formules expriment ce que nous avons dit des effets d'une translation sur la longueur d'une règle et la marche d'une horloge.

Jusqu'ici, nous nous sommes borné à des points de la ligne suivant laquelle on a placé les règles. Si chacun des observateurs combine avec la coordonnée $x$ ou $x'$ deux autres $y$ et $z$ ou $y'$ et $z'$, perpendiculaires à la première et entre elles, on aura

$$y = y', \quad z = z',$$

vu que la translation ne change pas les dimensions qui lui sont perpendiculaires. Ces nouvelles équations, jointes à (9) ou (11), nous donnent la relation complète entre les valeurs de $x$, $y$, $x$, $t$, qui caractérisent un phénomène pour $A$ et les valeurs de $x'$, $y'$, $z'$, $t'$, que $B$ assigne à ce même phénomène.

§ 8. Voici une conséquence remarquable qu'on peut tirer de ces formules de transformation.

On a d'abord :

$$x + ct = (a + b)\,(x' + ct'), \quad x - ct = (a - b)\,(x' - ct'),$$

d'où par multiplication, en ayant égard à (10):

$$x^2 - c^2t^2 = x'^2 - c^2t'^2,$$

et encore

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2. \tag{14}$$

Cela montre que l'observateur $B$, en se servant de ses règles — dirigées suivant les axes — et de ses horloges, pour mesurer $x', y', z', t'$, trouvera pour la vitesse de la lumière la même valeur que $A$, comme notre principe l'exige.

En effet, produisons un signal lumineux au moment $t = 0$ et au point $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ (correspondant à $t' = 0$, $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = 0$). Dans le système de $A$, ce signal atteindra à l'instant $t$ les points de la surface sphérique déterminée par l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2.$$

Or, en vertu de la relation (14), cette équation équivaut à

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2,$$

ce qui veut dire que, pour l'observateur $B$, ce même signal se propagera dans un temps $t'$ jusqu'aux points de la sphère qui est représentée par cette équation. Il attribuera donc, lui aussi, la valeur $c$ à la vitesse de propagation.

Bien entendu, pour obtenir ce résultat, il doit avoir confiance en ses instruments de mesure, ce qu'il fera naturellement s'il est inconscient de son mouvement à travers l'éther.

§ 9. D'une manière générale, toujours d'après notre principe, tous les phénomènes physiques peuvent avoir lieu de la même manière dans les deux laboratoires. Il est permis d'en conclure que les équations qui servent à la description de ces phénomènes en fonction de $x', y', z', t'$ peuvent être mises sous la même forme que celles qui les représentent en fonction de $x, y, z, t$. Cela doit être vrai quelle que soit la nature des grandeurs dont il s'agit, que ce soient des vitesses, des forces, des courants électriques, des moments magnétiques ou autre chose.

Remarquons qu'on peut toujours distinguer deux cas. Si une expérience quelconque est faite d'abord dans le laboratoire de $A$, et si ensuite l'expérience *correspondante* est faite dans celui de $B$, ces physiciens trouveront les mêmes valeurs pour les grandeurs qui sont en jeu. Mais lorsqu'un *seul et même* phénomène est étudié par les deux observateurs, ils n'assigneront pas, en général, à ces grandeurs, des valeurs égales; le premier observateur cherchera la cause des différences dans les changements que les instruments de $B$ ont subis par leur mouvement de translation.

Pour chaque catégorie de grandeurs physiques, il y aura des relations définies entre les valeurs que leur attribue $A$ et celles que $B$ leur assigne. Ces relations s'expriment par des formules de transformation qui sont comparables à (9) et (11) et qui nous permettent de passer des équations que $A$ applique aux phénomènes à celles dont se sert $B$.

§ 10. Ce qui mérite surtout l'attention, c'est qu'il y a une parfaite réciprocité entre les phénomènes dans le système de $A$ tels qu'ils se présentent à l'observateur $B$ et les phénomènes dans le système de $B$ considérés du point de vue de $A$. Cela tient à la similitude de forme des équations (9) d'un côté et des équations (11) de l'autre. On passe du premier système au second si l'on échange $x, y, z, t$ contre $x', y', z', t'$ et inversement, en remplaçant en même temps $b$ par $-b$. Une remarque analogue s'applique à toutes les autres formules de transformation.

La réciprocité se montre d'abord en ce que l'origine des coordonnées de $A$ a pour l'observateur $B$ une vitesse égale et opposée à celle que son origine des coordonnées a pour $A$. En effet, l'origine $O$ est constamment caractérisée par $x = 0$, ce qui amène:

$$x' = -\frac{bc}{a}\,t'.$$

Dans le système de $B$, le point $O$ se déplace donc avec la vitesse $-bc/a$, ce qui, en vertu des équations (3) et (8), est bien $-v$.

Ensuite, on peut joindre à (12) et (13) deux autres relations semblables, dont la première se rapporte à une valeur déterminée de $t'$ et la seconde à une valeur déterminée de $x$. La première de ces relations, qu'on tire de l'une des formules (9), est:

$$\Delta x' = \frac{1}{a}\,\Delta x,$$

et la seconde, qui découle de la dernière des formules (11):

$$\Delta t = \frac{1}{a}\,\Delta t'.$$

Elles nous apprennent que, pour l'observateur $B$, la règle de $A$, qu'il voit traverser son laboratoire, est plus courte que la sienne propre, qui y est en repos, et que, pour $B$ aussi, les chronomètres mobiles marchent plus lentement que ceux qui ont une position fixe dans son entourage.

§ 11. Il peut sembler étrange au premier abord qu'en comparant les règles et les chronomètres, nos deux observateurs puissent arriver à des résultats opposés. Mais, évidemment, ces résultats dépendent entièrement de la manière dont la comparaison est faite, et qui, en réalité, n'est pas la même dans les deux cas, bien qu'elle soit pour $A$, dans un cas, ce qu'elle est pour $B$ dans l'autre.

Pour lever tout malentendu à cet égard, il conviendra d'entrer en quelques détails. Considérons de nouveau les deux règles $OP$ et $O'P'$ qui se meuvent l'une le long de l'autre suivant une ligne $EF$ (fig. 2) et plaçons un appareil photographique à quelque distance de cette ligne. Cet appareil consistera simplement en un écran percé d'un très petit trou $D$ qui ne sera ouvert que pour un instant (ce qui nous dispensera de tenir compte d'un mouvement éventuel de l'écran), et en une plaque sensible placée parallèlement à la ligne $EF$ et perpendiculairement au plan qui passe par elle et le trou $D$.

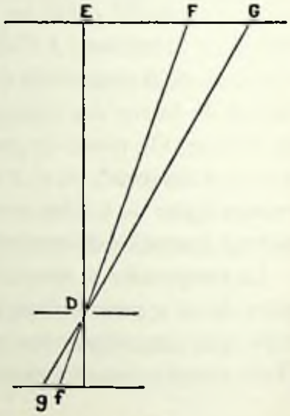

Fig. 2.

On fera ainsi une photographie instantanée, et je dis que, si tout est proprement arrangé, c'est la barre $OP$ qui donne l'image la plus longue, si l'expérience est faite par $A$, et, au contraire, la barre $O'P'$, si elle est faite par $B$.

Nous ferons le calcul des deux longueurs en nous plaçant au point de vue de $A$, et nous commencerons par un cas un peu général. Désignons par $L$ la longueur de la perpendiculaire $DE$ abaissée de l'ouverture $D$ (*dans la position* qu'elle occupe lorsqu'elle est ouverte) sur la ligne $EF$ des barres, et par $\lambda$ la distance de $D$ à la plaque photographique. Nous déterminerons la position d'un point $F$ de la ligne $EF$ par sa distance $x$ au point $E$ ou bien par l'angle $EDF = \varphi$. La direction positive pour $x$ sera celle de la vitesse $v$, et $\varphi$ aura le même signe que $x$. Enfin nous supposerons que la plaque sensible se meuve avec une vitesse $w$ dans la direction des $x$ positifs.

Pour chaque point d'une règle, qu'elle soit en repos ou non, il y a un seul moment auquel il peut émettre des rayons qui passeront par le trou à l'instant où il est ouvert. Supposons que pour le bout d'une barre qui se trouve du côté des $x$ négatifs, cet „instant d'émission" soit $t_0$ et que la position $F$ qu'il occupe alors soit déterminée par la coordonnée $EF = x_0$, ou par l'angle correspondant $EDF = \varphi_0$. Soit $t_0 + \tau$ l'instant d'émission pour l'autre bout $G$. Pour le déterminer, on peut remarquer d'abord qu'à cet instant la coordonnée de ce bout sera

$$x_1 = x_0 + l' + v\tau, \tag{15}$$

si $l'$ est la longueur de la barre et $v$ sa vitesse.

A leurs instants d'émission, les bouts de la barre se trouvent aux distances:

$$\sqrt{L^2 + x_0^2} \text{ et } \sqrt{L^2 + (x_0 + l' + v\tau)^2}$$

de l'ouverture, et, comme la différence des temps que la lumière met à parcourir ces longueurs doit être égale à l'intervalle entre les instants d'émission, il faut qu'on ait:

$$\sqrt{L^2 + (x_0 + l' + v\tau)^2} - \sqrt{L^2 + x_0^2} = -c\tau.$$

Cette équation se simplifie si la distance $L$ est très grande par rapport à la longueur de la règle. On peut alors omettre les termes en $l'^2$ et en $\tau^2$, et on trouve:

$$\tau = -\frac{\sin\varphi_0}{c + v\sin\varphi_0}\, l',$$

de sorte que l'expression (15) devient:

$$x_1 = x_0 + \frac{cl'}{c + v\sin\varphi_0}.$$

Soient $f$ et $g$ les points où le plan immobile qui coïncide avec la plaque sensible est coupé par les lignes $FD$ et $GD$ prolongées, et où se forment par conséquent les images des deux bouts. On aura:

$$fg = \frac{\lambda}{L} FG = \frac{\lambda}{L} \frac{cl'}{c + v\sin\varphi_0}, \tag{16}$$

le point $g$ se trouvant du côté négatif de $f$. Mais, comme les rayons traversent l'ouverture au même instant, ils arrivent en $g$ plus tard qu'en $f$, l'intervalle étant

$$\frac{Dg - Df}{c} = \frac{\lambda}{L} \frac{DG - DF}{c} = -\frac{\lambda}{L} \tau = \frac{\lambda}{L} \frac{\sin \varphi_0}{c + v \sin \varphi_0} l'.$$

Dans cet intervalle, la plaque photographique s'est déplacée sur une distance

$$\frac{\lambda}{L} \frac{w \sin \varphi_0}{c + v \sin \varphi_0} l',$$

et la distance des deux images, mesurée sur la plaque, sera la somme de cette longueur et de la longueur (16):

$$s = \frac{\lambda}{L} \frac{c + w \sin \varphi_0}{c + v \sin \varphi_0} l'.$$

Soient $s_1$ la longueur de l'image de la barre fixe, $s_2$ celle de l'image de la barre mobile, et supposons que dans les deux cas l'angle $\varphi_0$ ait la même valeur, c'est-à-dire que les bouts des barres qui se trouvent du côté des $x$ négatifs coïncident à un moment qui est l'instant d'émission pour l'un et, par conséquent, pour l'autre [1]). Pour la barre fixe on a $v = 0$, $l' = l$, et pour la barre mobile $l' = l/a$. Donc:

$$\frac{s_1}{s_2} = \left(1 + \frac{v}{c} \sin \varphi_0\right) a. \tag{17}$$

On voit que le résultat de la comparaison dépend de l'angle $\varphi_0$. Or, si l'observateur $A$ veut se placer dans les conditions les plus simples, il fera la photographie des barres au moment où l'une glisse le long de l'autre, en plaçant son appareil sur une ligne perpendiculaire à leur longueur. Dans ce cas, qui correspond à $\varphi_0=0$, il peut dire, parce qu'il néglige les termes en $l^2$, que tous les rayons effectifs ont été émis au même instant.

Quant à $B$, il imitera de sa manière ce que $A$ vient de faire, il réalisera le cas où, dans son système, $\varphi_0 = 0$.

Mais alors, dans cette seconde expérience, l'angle $\varphi_0$ aura pour $A$ une valeur différente de zéro. Pour la trouver, il suffit de remar-

[1]) Nous aurions pu tout aussi bien supposer que ce soient les *milieux* des barres qui coïncident de cette manière. Le résultat resterait le même parce qu'on peut négliger les termes en $l^2$.

quer que, dans la première expérience, l'émission des rayons (par les bouts coïncidents) et leur passage par le trou ont lieu en des points qui ont le même $x$, mais que l'instant de l'émission précède de $L/c$ celui du passage. Pareillement, dans la deuxième expérience, les valeurs de $x'$ sont égales entre elles, et celles de $t'$ diffèrent de $L/c$. En vertu de la première des équations (9), cela implique que la valeur de $x$ qui correspond à l'émission est inférieure de $bL$ à celle du trou au moment du passage des rayons. Donc, pour la deuxième expérience, $x_0 = -bL$, $tg\ \varphi_0 = -b$,

$$\sin \varphi_0 = -\frac{b}{a}. \tag{18}$$

Pour $\varphi_0 = 0$, la formule (17) devient

$$\frac{s_1}{s_2} = a,$$

et pour la valeur donnée par (18), si l'on a égard aux relations (3) et (8),

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{1}{a}.$$

Ce que nous avons dit des résultats des deux comparaisons se trouve ainsi confirmé.

§ 12. Il nous reste à expliquer la contradiction apparente des deux observateurs au sujet des horloges.

Nous avons déjà vu comment $A$ peut comparer deux de ces chronomètres, dont l'un se trouve tout près de lui, et l'autre à une certaine distance. Ajoutons maintenant qu'il peut se servir de la même méthode pour comparer un de ses propres instruments placé dans son voisinage immédiat, avec un chronomètre qui se déplace d'une manière quelconque dans le laboratoire. Nous n'avons plus à dire qu'il constatera ainsi une marche plus lente des instruments appartenant à $B$.

De son côté, l'observateur $B$ pourra étudier, suivant la même méthode, un chronomètre $C$ du système de $A$, en le comparant avec un de ses propres chronomètres $C'$, près duquel il s'est placé. Il éclairera le cadran de $C$ par un faisceau de lumière instantané, et si $t'_1$, $t'_2$ sont les instants du départ et du retour, lus sur $C'$, il conclura que l'aiguille de $C$ a atteint la position observée $\tau$ au moment

$$t' = \frac{1}{2}(t'_1 + t'_2) \tag{19}$$

indiqué par $C'$.

Cela posé, nous allons considérer le cas suivant, qui a un certain intérêt, puisqu'il donne lieu à une conclusion qui, au premier abord, semble assez paradoxale.

Supposons qu'à partir du point $O$ dans le laboratoire de $A$, au moment $t = 0$ indiqué par un chronomètre fixe $C$ installé en ce point, un observateur $B$ parte dans la direction des $x$ positifs avec une vitesse constante, et que, au moment $t = T$, il rebrousse chemin subitement pour retourner au point $O$ avec une vitesse égale à celle qu'il avait d'abord. Au moment où il revient au point de départ, le chronomètre $C$ marquera $t = 2T$.

Quelle sera alors l'indication d'une horloge $C'$ que $B$ a emportée dans son mouvement de va-et-vient et qui marqua $t' = 0$ au moment du départ ?

Les observations de $A$, dont l'exactitude ne peut être mise en doute, montrent que $C'$ marche plus lentement que $C$ pendant le retour aussi bien que pendant l'aller, de sorte qu'on a constamment [1]:

$$t' = \frac{1}{a}\, t.$$

$B$ pourra s'en assurer à chaque moment de son voyage en comparant son propre chronomètre à un des chronomètres de $A$, si par hasard il s'en trouve un tout près de lui.

Au moment du retour, on aura:

$$t' = \frac{2}{a}\, T\,;$$

le chronomètre $C'$ sera en retard par rapport à $C$; l'observateur $B$ ne manquera pas de le constater. Et pourtant, d'après ce que nous avons dit, il doit voir pendant son mouvement que c'est son propre instrument qui marche le plus vite. Voilà ce qu'il s'agit d'éclaircir.

---

[1]) Pour simplifier, nous ne parlerons pas du changement de l'indication de $C'$ qui pourrait être produit (le principe de relativité ne nous en dit rien) au moment où la direction de la translation est subitement renversée.

A cet effet, il suffit d'imaginer que, pendant sa course, $B$ fait à plusieurs reprises la comparaison de $C$ et $C'$ en se servant toujours de la méthode que nous avons indiquée. Nous calculerons avec $A$ ce qui en résultera.

Dans le système de $A$, le mouvement de $B$ a lieu suivant l'équation

$$x = vt$$

de $t = 0$ jusqu'à $t = T$, et suivant la formule

$$x = v(2T - t)$$

dans l'intervalle entre $t = T$ et $t = 2T$, la grandeur positive $v$ désignant la vitesse en valeur absolue.

En se servant de ces formules, $A$ peut considérer un signal lumineux lancé au point où se trouve $B$. à un moment choisi $t_1$.

Il calculera facilement le temps $\tau$ de l'arrivée de ce signal en $O$, et le temps $t_2$ où, en retournant vers $B$, il rattrape ou rencontre cet observateur. Pour chaque valeur de $t_1$, on connaîtra donc $\tau$ et $t'$, les indications de $C$ et de $C'$ que $B$ regarde comme simultanées. Quant à $t'$, cette grandeur est donnée par l'équation (19) ou bien par

$$t' = \frac{1}{2a}(t_1 + t_2).$$

Enfin, connaissant $t'$ et $\tau$ en fonction de $t_1$, on peut, par l'élimination de cette dernière variable, obtenir la relation cherchée entre $\tau$ et $t'$.

Dans la solution du problème, il faut distinguer trois périodes. Dans la première $t_1$ et $t_2$ sont tous les deux inférieurs à $T$; dans la deuxième on a $t_1 < T$, mais $t_2 > T$, c'est-à-dire que $B$ fait partir la lumière avant et la reçoit après le moment où il rebrousse chemin, et enfin, dans la troisième période on a $t_1 > T$.

Voici maintenant les résultats.

Première période:

$$\tau = \frac{1}{a} t'. \tag{20}$$

Valeurs initiales:

$$t' = 0, \ \tau = 0.$$

Valeurs finales:

$$t' = \sqrt{\frac{c - v}{c + v}}\, T, \quad \tau = \frac{c - v}{c}\, T. \tag{21}$$

Deuxième période:

$$\tau = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}\,t' - \frac{v}{c}\,T. \tag{22}$$

Cette période commence avec les valeurs (21), et finit avec

$$t' = \left(1 + \frac{2v}{c}\right)\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}\,T, \quad \tau = \frac{c+v}{c}\,T.$$

Troisième période:

$$\tau = \frac{1}{a}t' + \frac{2v^2}{c^2}\,T. \tag{23}$$

A la fin:

$$t' = \frac{2}{a}\,T, \quad \tau = 2T.$$

On voit par les formules (20) et (23) que, dans la première et la troisième période, le chronomètre $C$ a pour $B$ une marche plus lente que son propre instrument, ce qui s'accorde avec ce que nous avons dit. Mais l'effet ainsi produit est plus que compensé par l'accélération de $C$ par rapport à $C'$ qui est observée dans la deuxième période, comme le montre la formule (22). Il est vrai que, si la vitesse $v$ est très petite en comparaison de celle de la lumière, la deuxième période est beaucoup plus courte que la première et la troisième; mais, en revanche, l'accélération apparente de $C$ indiquée par le facteur

$$\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$$

est alors de beaucoup plus considérable que le ralentissement qui est déterminé par le facteur $1/a$.

§ 13. Pour terminer ces considérations, j'insisterai sur la *réalité* des effets dont il a été question.

Le raccourcissement d'une barre qui se meut dans le sens de sa longueur est, pour l'observateur $A$, un phénomène physique du même ordre que, par exemple, la dilatation par la chaleur, et il peut chercher à s'en rendre compte par des hypothèses convenables (sur le rôle de l'éther dans les actions moléculaires), de la même manière qu'il le ferait pour cette dilatation.

Mais il faut bien reconnaître que $A$ ne pourra jamais s'assurer de l'immobilité dans l'éther que nous lui avons attribuée par supposition, et que le physicien $B$ pourrait avec le même droit, ou plutôt avec la même absence de droit, prétendre que c'est lui qui se trouve dans ces circonstances privilégiées. Cette incertitude, cette impossibilité de jamais déceler un mouvement par rapport à l'éther, a conduit M. EINSTEIN, et de nombreux autres physiciens modernes, à abandonner tout à fait la notion d'un éther.

C'est là, à ce qu'il me semble, une question envers laquelle chaque physicien pourra prendre l'attitude qui s'accorde le mieux avec la façon de penser à laquelle il s'est accoutumé.

Un expérimentateur quelconque — que ce soit notre $A$ ou notre $B$ — pourra expliquer, pour autant qu'on explique dans la Physique, tout ce qu'il observe en supposant qu'il est en repos dans l'éther, mais il le peut faire tout aussi bien s'il admet que son laboratoire est traversé par un courant d'éther qui a sur ses instruments l'influence dont il a été question. Cependant, il devra reconnaître qu'il lui est impossible de savoir quelles sont la direction et la vitesse de ce courant, et s'il éprouve le besoin de ne pas se préoccuper de cette incertitude, il prendra le parti de M. EINSTEIN. Alors il ne parlera plus d'un éther, et il dira simplement que c'est le mouvement d'une barre ou d'une horloge dans son laboratoire qui produit le raccourcissement de l'une et le ralentissement de l'autre.