I.

Ueber die Theorie der Reflexion und Refraction des Lichtes

Von

Dr. H. A. Lorentz

in Arnheim.

(Auszug aus des Verfassers Inauguraldissertation.)

Erste Mittheilung.

§ 1. Bei den ersten Arbeiten über die Undulationstheorie des Lichtes war es der nächstliegende Zweck, überhaupt nachzuweisen, dass das Licht aus einer Fortpflanzung von Transversalschwingungen besteht. Nachdem aber durch die zahlreichen Untersuchungen über Interferenz, Beugung und Polarisation diese Grundidee der Theorie über jeden Zweifel erhoben war, ward es Ziel weiterer Forschung, zu ermitteln, welcher Stoff diese Schwingungen ausführe und welche Kräfte dabei auftreten.

Es besteht nun ein merkwürdiger Gegensatz zwischen der Vollkommenheit der Theorie, soweit es sich blos um die genannte Grundidee handelt, und den geringen Fortschritten, welche man während längerer Zeit in der Untersuchung des Mechanismus der Lichtschwingungen gemacht hat. Namentlich zeigt sich dies in den Bestrebungen der Physiker, um die Erscheinungen der Reflexion und Brechung des Lichtes theoretisch zu erklären.

Als man zuerst die wahre Natur des Lichtes, als eine Fortpflanzung von Transversalschwingungen, erkannte, war man nur mit einem anderweitigen Falle solcher Schwingungen bekannt. Man hatte beobachtet, dass die Theilchen fester elastischer Körper dergleichen Bewegungen ausführen können, und es lag also nahe, dem Lichtäther die charakteristischen Eigenschaften eines solchen Körpers beizulegen. Sobald man aber versuchte, aus dieser Ansicht eine theoretische Erklärung der Eigenschaften des in verschiedenen Fällen reflectirten Lichtes abzuleiten, stiess man auf Schwierigkeiten, welche völlig zu beseitigen bis jetzt nicht gelungen ist.

Unter den bekannten Annahmen über die Eigenschaften des Aethers und über die Schwingungsrichtung des polarisirten Lichtes entwickelten zuerst Fresnel und Neumann Gleichungen, welche in befriedigender Weise die Beschaffenheit des an isotropen, durchsichtigen Körpern reflectirten Lichtes wiedergeben. Neumann (und Mac-Cullagh) gelang es sogar, seine Theorie auch auf die Krystallreflexion auszudehnen, und Cornu hat mittelst gewisser Abänderungen auch die Fresnel'sche Theorie den dabei auftretenden Erscheinungen angepasst. Allein diese Resultate konnten nur erreicht werden, indem die Bedingungen für die Trennungsfläche zweier Medien mit einer gewissen Willkür gewählt wurden. Werden diese Bedingungen folgerichtig aus der Theorie der elastischen Körper abgeleitet, so ist es, wenn die Schwingungsrichtung des einfallenden Lichtes nicht senkrecht zur Einfallsebene steht, nicht einmal möglich, ihnen durch Transversalschwingungen allein, wie sie die genannten Physiker annahmen, zu genügen. Man muss dann auch die Longitudinalschwingungen berücksichtigen, welche in den beiden Medien auftreten.

Ausgehend von der Fresnel'schen Annahme über die Schwingungsrichtung des polarisirten Lichtes haben wirklich Cauchy und mehrere andere Mathematiker das Problem in dieser Weise behandelt. Mittelst einiger Hilfshypothesen ist es ihnen dabei gelungen, Formeln zu erhalten, welche für isotrope Körper eine genügende Uebereinstimmung mit der Erfahrung zeigen. Wendet man aber die nämlichen Betrachtungen auch für die Krystalle an, so ergeben sich hier Folgerungen, welchen die Beobachtungen widersprechen.

Es ist mir nicht bekannt, dass man jemals versucht hat, im Anschluss an die Neumann'sche Ansicht über die Schwingungsrichtung die Longitudinalschwingungen in Rechnung zu ziehen. Indess habe ich mich vergebens bemüht, dabei durch irgendwelche Nebenannahmen Formeln zu erhalten, welche mit der Erfahrung im Einklange stehen.

§ 2. Während also die bisherige Ansicht über die Natur der Lichtschwingungen keine völlig befriedigende Erklärung der Reflexionserscheinungen liefert, muss jede andere Hypothese, welche weniger Schwierigkeiten bietet, willkommen sein.

Eine solche neue Hypothese wurde unter dem Namen der elektromagnetischen Lichttheorie von Maxwell aufgestellt.* Bei einer theoretischen Untersuchung über die Bewegungserscheinungen der Elektricität kam er zu dem Schlusse, dass in einem nichtleitenden Körper transversal schwingende Bewegungen der Elektricität sich ausbreiten können und dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieser Schwingungen im

* *Maxwell, Elektricity and Magnetism.. II,* S. 383, *Phil. Trans. 1865.*

freien Aether nahe gleich der Lichtgeschwindigkeit sein muss. Dies führte ihn zu der Annahme, dass in Wirklichkeit das Licht aus dergleichen elektrischen Schwingungen bestehe.

Später hat Helmholtz* in etwas allgemeinerer Weise die Gleichungen entwickelt, welche die Bewegung der Elektricität in isotropen Körpern zu bestimmen gestatten. Es blieben dabei die von Maxwell gewonnenen Resultate der Hauptsache nach bestehen. Ausserdem wies Helmholtz** darauf hin, dass die Theorie der elektrischen Oscillationen auch an der Grenze von zwei gleichartigen isolirenden Medien dieselben Gesetze der Reflexion und Refraction ergiebt, wie wir sie beim Lichte finden, „vorausgesetzt, dass man entweder die magnetische oder die dielektrische Polarisationsfähigkeit beider Medien gleich und letztere sehr gross setzt“.

Dies veranlasste mich, zu untersuchen, ob in allen Fällen die elektromagnetische Lichttheorie zu einer befriedigenden Erklärung der Reflexion führen kann. Vorliegende Mittheilung enthält die Resultate dieser Untersuchung für die partielle Reflexion an nicht leitenden Körpern; später werde ich die Behandlung der totalen nnd metallischen Reflexion folgen lassen.

Zunächst sollen die allgemeinen Bewegungsgleichungen der Elektricität entwickelt werden. Dabei folge ich grösstentheils der Arbeit von Helmholtz; nur sind an seine Formeln einige Modificationen anzubringen, um sie auch für krystallisirte Körper anwenden zu können. Es wird diesen Rechnungen immer das elektrostatische Masssystem zu Grunde gelegt werden.

§ 3. Die von Faraday gemachte Entdeckung, dass die Capacität eines elektrischen Condensators von der Natur des zwischen den Belegungen befindlichen Nichtleiters abhängt, hat zu der Hypothese geführt, dass unter dem Einflusse einer elektromotorischen Kraft in den Theilchen eines Nichtleiters die beiden Elektricitäten getrennt werden, so dass jedes Theilchen an der einen Seite positiv, an der andern negativ elektrisch wird. Die mathematische Behandlung dieser unter dem Namen der dielektrischen Polarisation bekannten Erscheinung stimmt genau überein mit derjenigen der magnetischen Polarisation.

Wählen wir ein rechtwinkliges Axensystem der x, y, z und betrachten wir ein Element $dx\, dy\, dz$ des nichtleitenden Mediums am Punkte P. Wenn eine dielektrische Polarisation besteht, wird in einigen Punkten dieses Elements freie positive, in anderen freie negative Elektricität vorhanden sein. Liegt nun in dem Punkte (x, y, z) die Elektricitätsmenge

* Helmholtz, Ueber die Bewegungsgleichungen der Elektricität in ruhenden Leitern, Crelle's Journal 72 (1870).

** Ebendaselbst, S. 68, Anmerkung.

e, so bilden wir die drei Summen Σex, Σey, Σez, über alle Punkte des Elements berechnet. Sind diese Summen $\xi\, dx\, dy\, dz$, $\eta\, dx\, dy\, dz$, $\zeta\, dx\, dy\, dz$, so ist es, da $\Sigma e = 0$ ist, leicht nachzuweisen, dass ξ, η, ζ als die Componenten einer Strecke ϱ zu betrachten sind, welche in Grösse und Richtung nur von der elektrischen Vertheilung, nicht aber von der Wahl des Axensystems abhängt. Diese Strecke giebt uns Grösse und Richtung der dielektrischen Polarisation im Punkte P und wir wollen ξ, η, ζ die Componenten dieser Polarisation nennen.

Es muss nun für jeden nichtleitenden Körper die in einem Punkte P bestehende dielektrische Polarisation ϱ in bestimmmter Weise zusammenhängen mit der elektromotorischen Kraft F, d. h. mit derjenigen Kraft, welche auf die Einheit der positiven Elektricität, in P concentrirt, wirken würde. Aehnlich aber, wie in der Theorie des Magnetismus der Begriff der magnetischen Kraft für das Innere eines magnetischen Körpers einer nähern Definition bedarf, ist dies in unserem Falle, um jede Zweideutigkeit auszuschliessen, für die elektromotorische Kraft nothwendig. Wir wollen darüber folgende Bestimmung treffen. Unter elektromotorischer Kraft verstehen wir die Kraft, welche in dem betrachteten Punkte P wirken würde, wenn rings um denselben eine unendlich kleine cylindrische Höhle in dem Medium gebildet wäre, deren Axe in die Richtung der dielektrischen Polarisation fällt und unendlich gross ist gegen den Radius, während P auf halber Höhe liegt. Wie man sieht, stimmt diese Definition überein mit derjenigen, welche Thomson die polare Definition der magnetischen Kraft nennt.*

Sind nun X, Y, Z die Componenten von F, so nehmen wir an, dass in einem isotropen Nichtleiter

$$1) \qquad \xi = \varepsilon X, \quad \eta = \varepsilon Y, \quad \zeta = \varepsilon Z$$

sei, wobei ε eine von der Natur des Stoffes abhängige Grösse ist, welche wir die Constante der dielektrischen Polarisation nennen wollen.

Für einen anisotropen Körper nehmen wir an, dass es in jedem Punkte desselben drei aufeinander senkrechte Richtungen gebe (Hauptrichtungen), so dass, wenn die Axen damit zusammenfallen, gesetzt werden kann

$$2) \qquad \xi = \varepsilon_1 X, \quad \eta = \varepsilon_2 Y, \quad \zeta = \varepsilon_3 Z.$$

Dabei sind aber ε_1, ε_2, ε_3 drei verschiedene Constanten.

Denken wir uns nun den ganzen Raum von homogenen Medien eingenommen, welche im Allgemeinen anisotrop sein, aber die nämlichen Hauptrichtungen (parallel den Axen) haben mögen. Es sind dann in

---

* Vergl. *Thomson, Papers on Electrostatics and Magnetism*, §§ 479, 517; — *Maxwell, Electricity and Magnetism*, §§ 395—400.

jedem Medium die Grössen ε_1, ε_2, ε_3 constant, und nur an der Trennungsfläche S zweier Medien ändern sie sich sprungweise.

Es sei weiter durch irgendwelche Ursachen in den Theilen der Medien eine dielektrische Polarisation hervorgerufen; es soll dann untersucht werden, wie sich diese im Laufe der Zeit ändern muss. Es sind also ξ, η, ζ als Functionen der Lage und der Zeit zu bestimmen.

Zur Lösung dieser Aufgabe ist es nothwendig, die elektromotorische Kraft zu bestimmen, welche in irgend einem Punkte wirkt. Diese Kraft setzt sich aus verschiedenen Theilen zusammen, welche wir der Reihe nach betrachten wollen.

§ 4. Erstens entspringt eine elektromotorische Kraft aus der elektrostatischen Wirkung der getrennten Elektricitäten. In einem vollkommenen Isolator haben wir in dieser Hinsicht nur die im Innern der Theilchen desselben geschiedenen Elektricitäten zu betrachten. Der Definition des vorhergehenden Paragraphen zufolge kann man bei der Berechnung der elektromotorischen Kraft diese Polarisation ersetzen durch eine gewöhnliche elektrische Ladung, welche über das Innere jedes Mediums mit der Dichtigkeit $-\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)$ und über die Trennungsfläche S zweier Medien mit der Flächendichtigkeit $a(\xi-\xi')+b(\eta-\eta')+c(\zeta-\zeta')$ verbreitet ist. In letzterem Ausdrucke sind ξ, η, ζ die Componenten der dielektrischen Polarisation an der ersten, ξ', η', ζ' an der zweiten Seite dieser Fläche, während mit a, b, c die Richtungsconstanten der nach der zweiten Seite gezogenen Normale bezeichnet sind. Ist nun φ_1 die Potentialfunction der erwähnten elektrischen Ladung, so gilt für jeden Punkt im Innern eines Mediums die bekannte Bedingung

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial \zeta}{\partial z}=\frac{1}{4\pi}\,\Delta\varphi_1, * \tag{3}$$

und an der Fläche S hat man

$$a(\xi-\xi')+b(\eta-\eta')+c(\zeta-\zeta')=$$
$$=\frac{1}{4\pi}\left\{a\left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}-\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right)'\right]+b\left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}-\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right)'\right]+c\left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}-\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\right)'\right]\right\}. \tag{4}$$

Es sind in dieser letzten Gleichung wieder, wie wir dies auch im Folgenden immer thun werden, die Werthe der Functionen an der zweiten Seite von S mittelst Accente von den Werthen an der ersten Seite unterschieden.

Der Allgemeinheit wegen wollen wir annehmen, dass ausser der betrachteten dielektrischen Ladung noch eine gewöhnliche Ladung vorhanden, welche durch Leitung entstanden ist. Um dann die totale

---

* $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

elektrostatische Wirkung zu berechnen, hat man die Dichtigkeiten dieser Ladung zu den oben untersuchten Dichtigkeiten zu addiren. Es sei nun δ die totale Dichtigkeit im Innern eines Mediums, σ die totale Flächendichtigkeit an der Fläche S, und φ die von der totalen Ladung herrührende Potentialfunction. Man hat dann für den ersten Theil der elektromotorischen Kraft

$$5)\qquad X_1 = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad Y_1 = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad Z_1 = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

§ 5. Wenn die elektromotorische Kraft im Laufe der Zeit sich ändert, wird dies auch mit der dielektrischen Polarisation der Fall sein; es wird sich dann also die Elektricität in den Theilchen des Mediums in Bewegung befinden. Die Componenten dieser elektrischen Strömung — die wir als dielektrischen Strom bezeichnen wollen — werden gegeben durch die Formeln

$$6)\qquad u_1 = \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad v_1 = \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad w_1 = \frac{\partial \zeta}{\partial t}.$$

Besitzt aber das Medium ausser der Fähigkeit der dielektrischen Polarisation auch ein Leitungsvermögen, so besteht im Allgemeinen neben dem dielektrischen Strome auch ein gewöhnlicher Leitungsstrom, der sich mit ersterem zu einem Gesammtstrome zusammensetzt, dessen Componenten wir u, v, w nennen wollen. Es ist nun leicht zu untersuchen, wie sich durch den dielektrischen Strom die dielektrische Ladung und ebenso durch den Leitungsstrom die daneben bestehende gewöhnliche elektrische Ladung ändert. Man erhält durch diese Untersuchung eine Beziehung zwischen den Grössen u, v, w und den Dichtigkeiten δ und σ. Drückt man andererseits δ und σ mittelst der Differentialquotienten von φ aus, so findet man für jeden Punkt im Innern eines Mediums

$$7)\qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}(\Delta \varphi)$$

und für jeden Punkt der Grenzfläche S

$$8)\qquad \begin{aligned} &a(u-u') + b(v-v') + c(w-w') \\ &= \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left\{a\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)'\right] + b\left[\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)'\right] + c\left[\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)'\right]\right\}. \end{aligned}$$

§ 6. Die Componenten u, v, w der elektrischen Strömung werden im Allgemeinen nicht constant sein. Eine von Augenblick zu Augenblick variirende Strömung ruft aber bekanntlich in jedem Punkte eine elektromotorische Kraft der Induction hervor, und dies ist der zweite Theil von F, den wir zu berücksichtigen haben.

Genaue Messungen der durch galvanische Induction erregten Ströme sind nur ausgeführt worden für den Fall, dass sowohl der inducirende Stromleiter s, als der inducirte σ linear und in sich geschlossen sind.

Ist dann in einem Punkte von σ F_σ die Componente der elektromotorischen Kraft der Induction, nach der Richtung von σ genommen, so wollen wir die Grösse

$$9)\qquad \mathrm{F} = \int F_\sigma \, d\sigma$$

die elektromotorische Kraft längs σ nennen. Die Versuche haben für diese Grösse zu folgendem Resultat geführt.

Wenn die Stromintensität i in s sich ändert, die beiden Leiter aber nicht in Bewegung sind, so ist

$$\mathrm{F} = P\frac{di}{dt}, \quad P = -A^2 \int\int \frac{\cos(ds, d\sigma)}{r} \, ds \, d\sigma.$$

Es erstreckt sich hierbei die Integration über die beiden Leiter, während r der Abstand der Elemente ds und $d\sigma$, und A eine constante Grösse ist.

Betrachten wir jetzt die elektromotorische Kraft f der Induction, welche längs des Elements $d\sigma$ von der Aenderung der Stromstärke im Element ds geweckt wird. Es ist nicht zu gewagt, anzunehmen, dass auch in diesem Falle gesetzt werden dürfe $f = p\frac{di}{dt}$, wo p blos von der Länge und gegenseitigen Lage von ds und $d\sigma$ abhängt. Weiter leuchtet es ein, dass man durch Integration von p über die beiden Strombahnen die Grösse P erhalten muss. Dieser Condition wird, wie Helmholtz gezeigt hat, genügt, wenn man setzt

$$10)\qquad p = -\tfrac{1}{2}A^2\frac{1}{r}\left[(1+k)\cos(ds, d\sigma) + (1-k)\cos(r, ds)\cos(r, d\sigma)\right] ds\, d\sigma,$$

wo k eine aus den bisherigen Versuchen nicht bestimmbare Constante ist.

Da nach 9) $f = F_\sigma d\sigma$, $F_\sigma = \frac{f}{d\sigma}$ ist, lässt sich aus 10) der Werth von F_σ ableiten, der natürlich von der Länge von $d\sigma$ unabhängig wird. Man erhält demnach für die Componente der elektromotorischen Kraft nach der willkürlichen Richtung $d\sigma$ oder h in einem Punkte, dessen Verbindungslinie mit ds r heisst,

$$F_h = -A^2\frac{dq}{dt}, \quad q = \frac{1}{2r}\left[(1+k)\cos(ds, h) + (1-k)\cos(r, ds)\cos(r, h)\right] i\, ds.$$

Lässt man h der Reihe nach mit den drei Axenrichtungen zusammenfallen, so findet man die Componenten der elektromotorischen Kraft nach diesen Richtungen.

Sind nun über den ganzen Raum elektrische Strömungen (u, v, w) verbreitet und will man die elektromotorische Kraft der Induction in einem Punkte $\mathrm{P}(x, y, z)$ suchen, so betrachte man u, v, w als Functionen der Coordinaten x', y', z' und berechne mittelst der angeführten Formeln zunächst die Wirkung der elektrischen Strömung im Elemente $dx'\,dy'\,dz$ am Punkte $\mathrm{P}'(x', y', z')$. Durch nachherige Integration nach x', y', z'

ergiebt sich dann für den zweiten Theil der elektromotorischen Kraft in P

$$11)\qquad X_2 = -A^2\frac{\partial U}{\partial t},\quad Y_2 = -A^2\frac{\partial V}{\partial t},\quad Z_2 = -A^2\frac{\partial W}{\partial t},$$

und es ist hierbei, wenn der Abstand PP′ mit r angedeutet wird,

$$U = \int\!\!\int\!\!\int \Big\{\frac{1+k}{2}\cdot\frac{u}{r} + \frac{1-k}{2}\cdot\frac{x-x'}{r^3}\,[u(x-x') + v(y-y') + w(z-z')]\Big\}\,dx'dy'dz'$$

oder

$$12)\qquad U = \int\!\!\int\!\!\int \Big\{\frac{u}{r} + \frac{1-k}{2}\Big[u\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial x'} + v\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial y'} + w\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial z'}\Big]\Big\}\,dx'dy'dz',$$

während sich V und W in ähnlicher Weise angeben lassen.

§ 7. Für die weitere Untersuchung muss man einige Eigenschaften der Functionen U, V, W kennen. Es ist bei der Ableitung derselben zu beachten, dass die Stetigkeit der Grössen u, v, w nur an den mehrerwähnten Flächen S eine Unterbrechung erleiden kann. Ausserdem bemerke ich noch im Voraus, dass, wie sich später zeigen wird, die elektrischen Bewegungen sich immer mit endlicher Geschwindigkeit ausbreiten, so dass man bei der Untersuchung der von bestimmten Stellen des Raumes ausgehenden Bewegungen jederzeit eine so grosse geschlossene Fläche construiren kann, dass ausserhalb derselben $u = v = w = 0$ ist. Es geht daraus hervor, dass in nachstehender Untersuchung gewisse Integrale „über die unendlich entfernte Grenzfläche des Raumes", in welchen u, v, w vorkommen, verschwinden müssen.

Ausserdem werden wir noch andere Integrale über diese Grenzfläche fortlassen, welche φ und die Differentialquotienten davon enthalten. Dies wird keinen Fehler herbeiführen, wenn nur bei wachsender Entfernung diese Grössen hinreichend stark abnehmen. Jedenfalls werden unsere Resultate nicht von dieser Vernachlässigung beeinflusst, da in allen Fällen, auf welche wir die Theorie anwenden werden, nirgends eine Anhäufung von freier Elektricität auftritt und demzufolge überall $\varphi = 0$ ist.

Bei der Berechnung von U nach der Gleichung 12) wollen wir uns zunächst um den Punkt P eine geschlossene Fläche B gelegt denken und den Werth U' des Integrals über den ausserhalb dieser Fläche liegenden Raum A betrachten. Wir können dann nachher aus U' U erhalten, indem wir die Dimensionen der Fläche sich der Null nähern lassen.

Setzen wir

$$13)\qquad \Psi' = \int\!\!\int\!\!\int \Big(u\frac{\partial r}{\partial x'} + v\frac{\partial r}{\partial y'} + w\frac{\partial r}{\partial z'}\Big)\,dx'dy'dz',$$

wobei die Integration sich wieder über den Raum A erstreckt, so ist selbstverständlich

$$14)\qquad U' = \frac{1-k}{2} \cdot \frac{\partial \Psi'}{\partial x} + \int\!\!\int\!\!\int \frac{u}{r}\, dx'\, dy'\, dz'.$$

Es soll nun zunächst die Function Ψ' eingehender untersucht werden. Man hat in 13) die Integration auszuführen für jeden der Theile, in welche der Raum A durch die Flächen S zerlegt wird, und nachher zu summiren. Für jeden dieser Theilräume kann man aber das Integral durch einen bekannten Process der partiellen Integration umformen, und es verschwinden hierbei, dem Obengesagten zufolge, die Integrale über die unendliche Grenzfläche des Raumes. Man erhält demnach

$$15)\quad \begin{aligned} \Psi' = & \int\!\!\int r \{ a(u-u') + b(v-v') + c(w-w') \}\, dS \\ & - \int\!\!\int r(\alpha u + \beta v + \gamma w)\, d\mathrm{B} - \int\!\!\int\!\!\int r \left(\frac{\partial u}{\partial x'} + \frac{\partial v}{\partial y'} + \frac{\partial w}{\partial z'} \right) dx'\, dy'\, dz'. \end{aligned}$$

Das letzte Integral, das wir mit J bezeichnen wollen, ist hierbei über den Raum A zu nehmen, die beiden ersten dagegen über die Flächen S und B. Es sind weiter α, β, γ die Richtungsconstanten der nach aussen gezogenen Normale an der Fläche B.

Der Gleichung 7) zufolge hat man

$$J = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int\!\!\int\!\!\int r\, \Delta \varphi\, dx'\, dy'\, dz',$$

und wenn man auf das hier vorkommende Integral den Green'schen Satz anwendet, ergiebt sich

$$\begin{aligned} J = & \frac{1}{4\pi} \int\!\!\int\!\!\int \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Delta r\, dx'\, dy'\, dz' - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int\!\!\int \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} - \varphi \frac{\partial r}{\partial \nu} \right) d\mathrm{B} \\ & + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int\!\!\int r \left[\frac{\partial \varphi}{\partial n} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)' \right] dS, \end{aligned}$$

wo mit n und ν die Normalen an den Flächen S und B angedeutet sind. Bringt man diesen Werth von J in die Gleichung 15) über und berücksichtigt man dabei die Relation 8), so findet man, dass sich die Integrale über die Flächen S fortheben; es bleibt somit, da $\Delta r = \frac{2}{r}$ ist, $\Psi' = K + H$, wenn

$$K = -\frac{1}{2\pi} \int\!\!\int\!\!\int \frac{\partial \varphi}{\partial t} \cdot \frac{1}{r} \cdot dx'\, dy'\, dz',$$

$$H = -\int\!\!\int r(\alpha u + \beta v + \gamma w)\, d\mathrm{B} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int\!\!\int \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} - \varphi \frac{\partial r}{\partial \nu} \right) d\mathrm{B}$$

gesetzt wird. Schliesslich ist

$$16)\qquad U' = \frac{1-k}{2} \left(\frac{\partial K}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \int\!\!\int\!\!\int \frac{u}{r}\, dx'\, dy'\, dz'$$

und man erhält U, wenn man den Grenzwerth dieser Grösse sucht für den Fall, dass die Fläche B unendlich klein wird.

§ 8. Nun lässt sich erstens leicht zeigen, dass in diesem Falle die Grösse $\frac{\partial H}{\partial x}$ sich der Null nähert, so lange wenigstens u, v, w, φ und $\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}$ überall endlich sind. Um zweitens den Grenzwerth von $\frac{\partial K}{\partial x}$ zu erhalten, bemerken wir, dass für eine mit der Dichtigkeit $-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ über den Raum A verbreitete und nach dem Newton'schen Gesetze anziehende Masse K die Potentialfunction und $-\frac{\partial K}{\partial x}$ die eine Componente der Attraction im Punkte P wäre. Der Grenzwerth der letzten Grösse ist folglich die x-Componente der Attraction für den Fall, dass nicht blos der Raum A, sondern der ganze Raum mit einer Masse von der genannten Dichtigkeit gefüllt wäre. Auch in diesem Falle lässt sich bekanntlich die Attraction durch die Differentialquotienten der Potentialfunction angeben. Sei letztere hier Ψ, so hat man

$$\Psi = -\frac{1}{2\pi}\iiint \frac{\partial \varphi}{\partial t} \cdot \frac{1}{r} \cdot dx' \, dy' \, dz', \tag{17}$$

wobei jetzt die Integration sich über den ganzen Raum erstreckt, und es ist $Lim \frac{\partial K}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial x}$.

Den Grenzwerth des letzten Gliedes in der Gleichung 16) kann man in der nämlichen Form angeben, wie dieses Glied selbst, wenn man sich nur wiederum das Integral über den ganzen Raum genommen denkt.

Es wird demnach

$$\left.\begin{aligned} U &= \frac{1-k}{2}\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \iiint \frac{u}{r}\, dx' \, dy' \, dz' \\ &\text{und ebenso} \\ V &= \frac{1-k}{2}\frac{\partial \Psi}{\partial y} + \iiint \frac{v}{r}\, dx' \, dy' \, dz', \\ W &= \frac{1-k}{2}\frac{\partial \Psi}{\partial z} + \iiint \frac{w}{r}\, dx' \, dy' \, dz'. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Diese Formeln lassen sich noch umgestalten durch Substitution der aus 17) gezogenen Werthe von $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$, $\frac{\partial \Psi}{\partial y}$, $\frac{\partial \Psi}{\partial z}$.

Es ist nämlich

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{1}{2\pi}\iiint \frac{\partial \varphi}{\partial t} \cdot \frac{x-x'}{r^3}\, dx' \, dy' \, dz',$$

und wendet man hierauf die partielle Integration nach x' an, wobei wieder das Integral über die unendlich kleine Fläche B verschwindet, so kommt

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\frac{1}{2\pi}\iiint \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t\,\partial x'} \cdot \frac{1}{r} \cdot dx' \, dy' \, dz'.$$

Man hat demnach

$$U = \int\!\!\int\!\!\int \left(-\frac{1-k}{4\pi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \, \partial x'} + u \right) \frac{1}{r} \, dx' \, dy' \, dz',$$

und es ist also U als die Potentialfunction einer mit der Dichtigkeit $-\frac{1-k}{4\pi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \, \partial x'} + u$ verbreiteten Masse zu betrachten. Da nun φ an allen Stellen stetig ist, ist diese Dichte überall endlich und daraus folgt, dass die Function U und ihre Differentialquotienten erster Ordnung überall stetig sind, namentlich auch an den Flächen S, wo die Continuität von u, v, w unterbrochen sein kann. Gleiches gilt von den Functionen V, W mit ihren Differentialquotienten. Weiter muss U der Poisson'schen Gleichung genügen; es ist somit

19)
$$\left\{ \begin{aligned} &\Delta U = (1-k) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \, \partial t} - 4\pi u \\ &\text{und ebenso} \\ &\Delta V = (1-k) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \, \partial t} - 4\pi v, \\ &\Delta W = (1-k) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \, \partial t} - 4\pi w. \end{aligned} \right.$$

Aus den Gleichungen 18) ergiebt sich noch

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{1-k}{2} \Delta \Psi + \int\!\!\int\!\!\int \left\{ u \frac{x'-x}{r^3} + v \frac{y'-y}{r^3} + w \frac{z'-z}{r^3} \right\} dx' \, dy' \, dz'$$

und mittelst partieller Integration und einiger Umformung findet man für das hier auftretende Integral $-\frac{\partial \varphi}{\partial t}$. Da ausserdem nach 17) $\Delta \Psi = 2 \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ ist, erhält man schliesslich

20)
$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = -k \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

§ 9. Es erübrigt noch, einen dritten Theil der elektromotorischen Kraft zu untersuchen. Es ist nämlich möglich, dass unter dem Einflusse der elektrischen Strömungen in den Theilchen des Mediums eine magnetische Polarisation geweckt wird, deren Aenderung andererseits in jedem Punkte eine elektromotorische Kraft der Induction bedingen wird.

Nimmt man an, dass in Bezug auf die magnetische Polarisation die Hauptrichtungen die nämlichen seien, wie für die dielektrische Polarisation, und also wieder den Axen parallel laufen, so werden, wenn L, M, N die Componenten der magnetischen Kraft G nach den Axenrichtungen sind, die Componenten der magnetischen Polarisation bestimmt durch die Gleichungen

21)
$$\lambda = \vartheta_1 L, \quad \mu = \vartheta_2 M, \quad \nu = \vartheta_3 N.$$

Es sind hierin ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 constante Grössen, welche mit ε_1, ε_2, ε_3 übereinstimmen, wenn man für G eine ähnliche nähere Definition voraussetzt, wie oben für F (§ 3).

Die magnetische Kraft G setzt sich aus zwei Theilen zusammen. Der erste entspringt aus der magnetischen Vertheilung selbst und hat die Componenten

22) $$-\frac{\partial \chi}{\partial x}, \quad -\frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad -\frac{\partial \chi}{\partial z},$$

wenn χ die magnetische Potentialfunction ist. Diese Grösse genügt den bekannten Bedingungen

23) $$\frac{\partial \lambda}{\partial x}+\frac{\partial \mu}{\partial y}+\frac{\partial \nu}{\partial z}=\frac{1}{4\pi}\Delta\chi$$

und

24) $$a(\lambda-\lambda')+b(\mu-\mu')+c(\nu-\nu')$$
$$=\frac{1}{4\pi}\left\{a\left[\frac{\partial \chi}{\partial x}-\left(\frac{\partial \chi}{\partial x}\right)'\right]+b\left[\frac{\partial \chi}{\partial y}-\left(\frac{\partial \chi}{\partial y}\right)'\right]+c\left[\frac{\partial \chi}{\partial z}-\left(\frac{\partial \chi}{\partial z}\right)'\right]\right\},$$

deren eine an jedem Punkte gilt, wo λ, μ, ν stetig sind, die andere dagegen an den Flächen S, wo dies nicht mehr der Fall zu sein braucht.

Der zweite Theil von G rührt von den im Medium stattfindenden elektrischen Strömungen her und lässt sich berechnen mittelst des bekannten Biot-Savart'schen Gesetzes, nach welchem die durch ein Stromelement $i\,ds$ in einem um r entfernten Punkte P ausgeübte magnetische Kraft senkrecht steht zu der durch ds und P gelegten Ebene — und zwar nach leicht bestimmbarer Seite dieser Ebene — und gegeben wird durch den Ausdruck

$$\frac{A\,i\,ds\,.\,sin(r,ds)}{r^2}.$$

Es ist hierbei A die nämliche Constante, welche auch in früheren Gleichungen auftritt.

Will man aus dem angeführten Gesetze die von einer beliebigen Stromvertheilung herrührende magnetische Kraft ableiten, so erweist sich eine nähere Bestimmung des Coordinatensystems als nothwendig. Wir wollen annehmen, dass eine Rotation (über einen rechten Winkel) von der positiven x- nach der positiven y-Axe die nämliche Richtung hat, wie die Bewegung der Uhrzeiger, wenn man sie von der Seite der positiven z-Axe aus betrachtet. Man findet dann für die Componenten des zweiten Theiles von G

25) $$A\left(\frac{\partial V}{\partial z}-\frac{\partial W}{\partial y}\right), \quad A\left(\frac{\partial W}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial z}\right), \quad A\left(\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial x}\right),$$

wo U, V, W wieder die Functionen aus den Gleichungen 18) sind.

Da die Richtigkeit des Biot-Savart'schen Gesetzes nur für geschlossene Ströme streng bewiesen worden ist, ist es nicht überflüssig, hier zu bemerken, dass in unseren späteren Anwendungen die Bewegung der Elektricität mit der einer incompressibeln Flüssigkeit übereinstimmt, und also in ein System geschlossener Ströme zerlegt werden kann.

Es bietet keine Schwierigkeit, schliesslich die von einer Aenderung des magnetischen Zustandes geweckte Induction zu untersuchen. Denn man kann jedes magnetisirte Theilchen, was seine Fernwirkung betrifft, durch einen kleinen Kreisstrom ersetzen, dessen Intensität sich mit dem Momente des betrachteten Theilchens zu gleicher Zeit ändert. Das Resultat, zu welchem man in dieser Weise gelangt, lässt sich folgendermassen ausdrücken. Man setze

$$26)\quad \mathrm{L}=\iiint\frac{\lambda}{r}\,dx'dy'dz',\quad \mathrm{M}=\iiint\frac{\mu}{r}\,dx'dy'dz',\quad \mathrm{N}=\iiint\frac{\nu}{r}\,dx'dy'dz',$$

wo λ, μ, ν als Functionen von x', y', z' zu betrachten sind.

Man hat dann für den dritten Theil der elektromotorischen Kraft

$$27)\quad X_3=-A\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial y}-\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial z}\right),\quad Y_3=-A\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial z}-\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x}\right),\quad Z_3=-A\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x}-\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial y}\right).$$

Auch die Grössen L, M, N können nach 26) als Potentialfunctionen betrachtet werden, und zwar von Massen, welche mit den überall endlichen Dichtigkeiten λ, μ, ν ausgebreitet sind. Es geht daraus hervor, dass auch L, M, N, sowie ihre Derivirten erster Ordnung an allen Stellen stetig sein müssen.

§ 10. Aus den Gleichungen 2), 5), 11) und 27) erhalten wir schliesslich

$$28)\quad \begin{cases} \dfrac{\xi}{\varepsilon_1}=-\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}-A^2\dfrac{\partial U}{\partial t}+A\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial \mathrm{N}}{\partial y}-\dfrac{\partial \mathrm{M}}{\partial z}\right),\\ \dfrac{\eta}{\varepsilon_2}=-\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}-A^2\dfrac{\partial V}{\partial t}+A\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial z}-\dfrac{\partial \mathrm{N}}{\partial x}\right),\\ \dfrac{\zeta}{\varepsilon_3}=-\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}-A^2\dfrac{\partial W}{\partial t}+A\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial \mathrm{M}}{\partial x}-\dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial y}\right),\end{cases}$$

und wenn wir ebenso aus 21), 22) und 25) die Relationen

$$29)\quad \frac{\lambda}{\vartheta_1}=A\left[\frac{\partial V}{\partial z}-\frac{\partial W}{\partial y}\right]-\frac{\partial\chi}{\partial x},\quad \frac{\mu}{\vartheta_2}=A\left[\frac{\partial W}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial z}\right]-\frac{\partial\chi}{\partial y},\quad \frac{\nu}{\vartheta_3}=A\left[\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial z}\right]-\frac{\partial\chi}{\partial z}$$

ableiten, haben wir alle zur Bestimmung der elektrischen Bewegungen erforderlichen Gleichungen entwickelt. Es lassen sich indess daraus noch einfachere ableiten. Differenzirt man nämlich die zweite und dritte der Gleichungen 28) resp. nach z und y, so kommt nach Subtraction

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\zeta}{\varepsilon_3}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\eta}{\varepsilon_2}\right)=A^2\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial V}{\partial z}-\frac{\partial W}{\partial y}\right]+A\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y}+\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial z}\right)-\Delta \mathrm{L}\right\}.$$

Während die Grösse $\frac{\partial V}{\partial z}-\frac{\partial W}{\partial y}$ der ersten der Gleichungen 29) entnommen werden kann, findet man aus 26) leicht $\frac{\partial L}{\partial x}+\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial z}=-\chi$ und $\Delta L=-4\pi\lambda$; es wird demnach

$$\text{I)}\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\zeta}{\varepsilon_3}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\eta}{\varepsilon_2}\right)=\frac{1+4\pi\vartheta_1}{\vartheta_1}A\frac{\partial\lambda}{\partial t}\\&\text{und ebenso}\\&\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\xi}{\varepsilon_1}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\zeta}{\varepsilon_3}\right)=\frac{1+4\pi\vartheta_2}{\vartheta_2}A\frac{\partial\mu}{\partial t},\\&\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\eta}{\varepsilon_2}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\xi}{\varepsilon_1}\right)=\frac{1+4\pi\vartheta_3}{\vartheta_3}A\frac{\partial\nu}{\partial t}.\end{aligned}\right.$$

Beachtet man weiter 20), so findet man noch aus 28)

$$\text{II)}\quad\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\xi}{\varepsilon_1}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\eta}{\varepsilon_2}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\zeta}{\varepsilon_3}\right)=-\Delta\varphi+A^2k\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}.$$

In gleicher Weise wie 28) lassen sich auch die Gleichungen 29) behandeln, wobei 19) und 20) zu berücksichtigen sind. Ausserdem ist in den letzten Gleichungen, wenn wir uns im Weitern auf vollkommen isolirende Medien beschränken, $u=\frac{\partial\xi}{\partial t}$, $v=\frac{\partial\eta}{\partial t}$, $w=\frac{\partial\zeta}{\partial t}$ zu setzen. Man erhält in dieser Weise

$$\text{III)}\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\nu}{\vartheta_3}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mu}{\vartheta_2}\right)=A\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial t}-4\pi\frac{\partial\xi}{\partial t}\right],\\&\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\lambda}{\vartheta_1}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\nu}{\vartheta_3}\right)=A\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial t}-4\pi\frac{\partial\eta}{\partial t}\right],\\&\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu}{\vartheta_2}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\lambda}{\vartheta_1}\right)=A\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial t}-4\pi\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right]\end{aligned}\right.$$

und

$$\text{IV)}\quad\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\lambda}{\vartheta_1}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu}{\vartheta_2}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\nu}{\vartheta_3}\right)=-\Delta\chi.$$

Da die Gleichungen 28) und 29) zu beiden Seiten der mehrerwähnten Flächen S gelten und da wir ausserdem die Stetigkeit von U, V, W, L, M, N und ihren Differentialquotienten erster Ordnung nachgewiesen haben, erhält man noch folgende Bedingungen für die Grenze zweier Medien:

$$\text{A)}\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{\xi}{\varepsilon_1}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\left(\frac{\xi}{\varepsilon_1}\right)'+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)',\\&\frac{\eta}{\varepsilon_2}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\left(\frac{\eta}{\varepsilon_2}\right)'+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)',\\&\frac{\zeta}{\varepsilon_3}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\left(\frac{\zeta}{\varepsilon_3}\right)'+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)';\end{aligned}\right.$$

$$
\text{B)}\quad
\begin{cases}
\dfrac{\lambda}{\vartheta_1}+\dfrac{\partial\chi}{\partial x}=\left(\dfrac{\lambda}{\vartheta_1}\right)'+\left(\dfrac{\partial\chi}{\partial x}\right)', \\[2ex]
\dfrac{\mu}{\vartheta_2}+\dfrac{\partial\chi}{\partial y}=\left(\dfrac{\mu}{\vartheta_2}\right)'+\left(\dfrac{\partial\chi}{\partial y}\right)', \\[2ex]
\dfrac{\nu}{\vartheta_3}+\dfrac{\partial\chi}{\partial z}=\left(\dfrac{\nu}{\vartheta_3}\right)'+\left(\dfrac{\partial\chi}{\partial z}\right)'.
\end{cases}
$$

Man kann nachweisen,* dass die Gleichungen I) bis IV), A) und B), wenn man ihnen noch die Bedingung hinzufügt, dass in unendlicher Entfernung ξ, η, ζ, λ, μ, ν, φ und χ verschwinden, den Bedingungen 28) und 29) vollkommen aequivalent sind. Wir haben es also weiter mit den Gleichungen I) bis IV), A) und B) zu thun, und da diese nur die Grössen ξ, η, ζ, λ, μ, ν, φ, χ enthalten, haben wir ausserdem nur noch die Formeln zu beachten, welche φ und χ als abhängig von ξ, η, ζ und λ, μ, ν darstellen.

§ 11. Wir wollen zunächst die Bewegung der Elektricität in einem unbegrenzten, homogenen, i s o t r o p e n Nichtleiter untersuchen. Es sei für diesen Fall ε der gemeinschaftliche Werth von ε_1, ε_2, ε_3, ebenso ϑ der von ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3. Unsere Gleichungen gehen dann in folgende über:

$$
\text{a)}\quad
\begin{cases}
\dfrac{\partial\zeta}{\partial y}-\dfrac{\partial\eta}{\partial z}=A\varepsilon\,(1+4\pi\vartheta)\dfrac{\partial L}{\partial t}, \\[2ex]
\dfrac{\partial\xi}{\partial z}-\dfrac{\partial\zeta}{\partial x}=A\varepsilon\,(1+4\pi\vartheta)\dfrac{\partial M}{\partial t}, \\[2ex]
\dfrac{\partial\eta}{\partial x}-\dfrac{\partial\xi}{\partial y}=A\varepsilon\,(1\cancel{+4\pi\vartheta)}\dfrac{\partial N}{\partial t};
\end{cases}
$$

$$
\text{b)}\quad \frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}=-\varepsilon\Delta\varphi+A^2k\varepsilon\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2};
$$

$$
\text{c)}\quad
\begin{cases}
\dfrac{\partial N}{\partial y}-\dfrac{\partial M}{\partial z}=A\left[\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial t}-\cancel{4\pi}\dfrac{\partial\xi}{\partial t}\right], \\[2ex]
\dfrac{\partial L}{\partial z}-\dfrac{\partial N}{\partial x}=A\left[\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial t}-4\pi\dfrac{\partial\eta}{\partial t}\right], \\[2ex]
\dfrac{\partial M}{\partial x}-\dfrac{\partial L}{\partial y}=A\left[\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial t}-4\pi\dfrac{\partial\zeta}{\partial t}\right];
\end{cases}
$$

$$
\text{30)}\quad \frac{\partial L}{\partial x}+\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial z}=-\Delta\chi,
$$

wobei an die Stelle von λ, μ, ν die Componenten der magnetischen Kraft eingeführt sind.

Die Abhängigkeit der Function φ von ξ, η, ζ wird ausgedrückt durch die Gleichung 3) oder

$$
\text{d)}\quad \frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}=\frac{1}{4\pi}\Delta\varphi.
$$

---

* Helmholtz, a. a. O.

Ebenso hat man für χ die Formel 23), und wenn man daraus mittelst 30) die Grösse $\Delta\chi$ eliminirt, erhält man

$$\text{e)} \qquad \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = 0.$$

Lassen wir χ, welche Grösse nur in 30) vorkommt, aus der Acht, so haben wir es nur mit den Gleichungen a), b), c), d), e) zu thun.

Man kann daraus noch andere Formeln ableiten, welche nur entweder ξ, η, ζ, oder L, M, N enthalten. Differenzirt man nämlich die zweite und dritte der Gleichungen a) resp. nach z und y, so erhält man nach Subtraction und wenn man die erste der Gleichungen c) berücksichtigt, eine Formel, welche ausser ξ, η, ζ nur noch $\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \, \partial t^2}$ enthält. Diese Grösse kann aber der Gleichung b) entnommen werden, wenn man daraus zuvor mittelst d) $\Delta\varphi$ wegschafft. Man gelangt in dieser Weise zu folgenden Resultaten. Es werde zur Abkürzung $\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \mathrm{P}$ und

$$31) \qquad 4\pi\varepsilon(1 + 4\pi\vartheta)A^2 = R^2, \quad 1 - \frac{(1 + 4\pi\vartheta)(1 + 4\pi\varepsilon)}{k} = S$$

gesetzt, so ist

$$32) \quad \Delta\xi = R^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + S \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x}, \quad \Delta\eta = R^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + S \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}, \quad \Delta\zeta = R^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + S \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial z}.$$

Durch eine ähnliche Rechnung ergiebt sich auch

$$33) \qquad \Delta L = R^2 \frac{\partial^2 L}{\partial t^2}, \quad \Delta M = R^2 \frac{\partial^2 M}{\partial t^2}, \quad \Delta N = R^2 \frac{\partial^2 N}{\partial t^2}.$$

§ 12. Die Gleichungen 32) und 33) sind sehr geeignet zur Beurtheilung des Charakters der elektrischen Bewegungen, welche in dem Isolator stattfinden können. Denn die Formeln 32) haben genau die gleiche Gestalt wie diejenigen, welche zur Bestimmung der Verschiebungen ξ, η, ζ in einem festen elastischen Körper dienen, und es muss also die untersuchte elektrische Bewegung mit der Bewegung eines solchen Körpers übereinstimmen. Wie sich nun in elastischen Medien eine Störung des Gleichgewichts vom Erregungscentrum aus mit endlicher Geschwindigkeit ausbreitet, so muss dies auch in dem Nichtleiter mit einer S t ö r u n g d e s e l e k t r i s c h e n G l e i c h g e w i c h t s der Fall sein. Wie weiter im elastischen Körper eine regelmässige Fortpflanzung transversaler und longitudinaler Schwingungen bestehen kann, müssen auch in dielektrischen Medien transversale und longitudinale e l e k t r i s c h e S c h w i n g u n g e n — d. h. periodische Aenderungen der dielektrischen Polarisation — sich ausbreiten können. Für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der transversalen elektrischen Oscillationen erhält man dann aus den Gleichungen 32)

$$34) \qquad \mathrm{v} = \frac{1}{R} = \frac{1}{A\sqrt{4\pi\varepsilon(1 + 4\pi\vartheta)}}.$$

In gleicher Weise folgt aus 33), dass in einem magnetisirbaren Isolator auch magnetische Oscillationen bestehen können, welche immer transversal sein müssen und sich wieder mit der Geschwindigkeit v fortpflanzen. Natürlich muss zwischen den gleichzeitig stattfindenden elektrischen und magnetischen Oscillationen ein gewisser Zusammenhang bestehen, der durch die Gleichungen a) bis e) bedingt wird.

§ 13. Ohne bekannten Thatsachen zu widersprechen, darf man nicht blos annehmen, auch die Luft (und der luftleere Raum) besitze noch die Fähigkeit der dielektrischen und magnetischen Polarisation, sondern sogar den für die Luft geltenden Constanten ε_0 und ϑ_0 jeden beliebigen Werth beilegen. Sind nun aber diese Grössen nicht Null, so liefern auch die elektromagnetischen Messungen nicht mehr den wahren Werth der Constante A, den man nur durch Versuche im vollkommen leeren Raume erhalten könnte. Helmholtz zeigt nun, dass, wenn A' der aus den Messungen folgende Werth dieser Constante ist, der wahre Werth gegeben wird durch die Relation

$$A = \frac{A'}{\sqrt{(1+4\pi\varepsilon_0)(1+4\pi\vartheta_0)}},$$

und dass mithin

$$\text{35)} \qquad v = \frac{1}{A'}\sqrt{\frac{(1+4\pi\varepsilon_0)(1+4\pi\vartheta_0)}{4\pi\varepsilon(1+4\pi\vartheta)}}$$

ist. Setzt man hierin $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\vartheta = \vartheta_0$, so erhält man für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektrischen Transversalschwingungen in der Luft

$$\text{36)} \qquad v = \frac{1}{A'}\sqrt{1+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}}.$$

Nun stimmt der aus elektromagnetischen Messungen folgende Werth von $\frac{1}{A'}$ sehr nahe mit der Lichtgeschwindigkeit überein. Diese Coincidenz wird zur Nothwendigkeit erhoben, wenn man annimmt, erstens dass das Licht in der That aus transversalen elektrischen Schwingungen bestehe, und zweitens dass die Constante ε_0 so gross sei, dass der umgekehrte Werth $\frac{1}{\varepsilon_0}$ gegen die Einheit vernachlässigt werden darf und also 36) in $v = \frac{1}{A'}$ übergeht. Die erste Annahme bildet den Ausgangspunkt der von Maxwell aufgestellten elektromagnetischen Lichttheorie. Stimmt man ihr bei, so erweist sich auch die Nebenannahme als nothwendig.* Letztere wird im Folgenden öfter angewandt werden; hier bemerke ich nur noch, das sie auch für jeden andern Nichtleiter, als die Luft, einen

* Helmholtz, a. a. O.

so grossen Werth von ε erheischt, dass $\frac{1}{\varepsilon}$ gegen die Einheit zu vernachlässigen ist.

§ 14. Da die Betrachtung eines polarisirten Lichtbündels mit ebenen Wellen von besonderer Wichtigkeit ist, gebe ich hier noch diejenige particuläre Lösung der Gleichungen a) bis e) an, welche nach der Maxwell'schen Theorie ein solches Lichtbündel vorstellt. Wenn wir annehmen, dass die Fortpflanzungs- und Schwingungsrichtung resp. der x- und y-Axe parallel seien, besteht diese Lösung aus folgenden Werthen:

$$\eta = a \cos \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{\mathrm{v}} + \mathrm{p}\right), \quad N = -4\pi A \mathrm{v}.\eta, \quad \xi = \zeta = L = M = \varphi = 0,$$

welche, wie man leicht findet, den Gleichungen a) bis e) genügen. Es ist hierbei die Amplitude der elektrischen Schwingungen mit a, die Schwingungsdauer aber mit T bezeichnet.

Beachtet man nun die Beschaffenheit unseres Coordinatensystems (§ 9), so erhält man, da die Fortpflanzung der Schwingungen nach allen Seiten in gleicher Weise vor sich gehen kann, aus den angeführten Gleichungen folgenden Satz:

Bei der Fortpflanzung eines polarisirten Lichtbündels in einem isotropen Isolator tritt nirgends freie Elektricität auf und ist also überall $\varphi = 0$. In jedem Punkte besteht weiter eine magnetische Kraft G, so dass in einem magnetisirbaren Medium die elektrischen Schwingungen von magnetischen begleitet sind. Es steht dabei die Richtung von G senkrecht zu der Ebene, welche die Fortpflanzungsrichtung und die Richtung der dielektrischen Polarisation ϱ enthält (Schwingungsebene), und zwar so, dass eine Drehung (über einen rechten Winkel) von der Richtung von ϱ aus nach der von G den gleichen Sinn hat, wie die Bewegung der Uhrzeiger, wenn man sie von der Seite der ankommenden Schwingungen aus betrachtet. Endlich ist $G = 4\pi A \mathrm{v}.\varrho$.

§ 15. Wir wollen jetzt die elektrischen Bewegungen in einem anisotropen homogenen Isolator betrachten. Dabei werden wir noch eine Vereinfachung einführen. Die Beobachtungen haben nämlich gezeigt, dass für alle Körper, mit Ausnahme der magnetischen Metalle, der Quotient $(1 + 4\pi\vartheta):(1 + 4\pi\vartheta_0)$ nur sehr wenig von der Einheit abweicht, und wir werden also nur einen sehr geringen Fehler begehen, wenn wir die Grössen $1 + 4\pi\vartheta_1$, $1 + 4\pi\vartheta_2$, $1 + 4\pi\vartheta_3$ durch den gemeinschaftlichen Werth $1 + 4\pi\vartheta_0$ ersetzen.

Es werden demnach die Gleichungen I) und II)

$$\alpha) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon_3}\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{1}{\varepsilon_2}\frac{\partial \eta}{\partial z} &= A(1 + 4\pi\vartheta_0)\frac{\partial L}{\partial t}, \\ \frac{1}{\varepsilon_1}\frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{1}{\varepsilon_3}\frac{\partial \zeta}{\partial x} &= A(1 + 4\pi\vartheta_0)\frac{\partial M}{\partial t}, \\ \frac{1}{\varepsilon_2}\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{1}{\varepsilon_1}\frac{\partial \xi}{\partial y} &= A(1 + 4\pi\vartheta_0)\frac{\partial N}{\partial t}; \end{aligned} \right.$$

$$\beta)\qquad \frac{1}{\varepsilon_1}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{1}{\varepsilon_2}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{1}{\varepsilon_3}\frac{\partial \zeta}{\partial z}=-\Delta\varphi+A^2k\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2},$$

während die Formeln c), d), e) des § 11 auch hier ungeändert bestehen bleiben. Wir wollen nun untersuchen, ob und in welcher Weise den Bewegungsgleichungen α), β), c), d), e) durch eine Fortpflanzung transversaler Schwingungen mit ebenen Wellen genügt werden kann.

Es seien l, m, n die Cosinus der Winkel, welche die Fortpflanzungsrichtung (d. h. die Wellennormale) mit den positiven Halbaxen bildet, und ebenso sei die Richtung der elektrischen Schwingungen durch die Grössen p, q, r gegeben. Es ist dann zu setzen

$$37)\qquad \xi=pa\cos\psi,\quad \eta=qa\cos\psi,\quad \zeta=ra\cos\psi,$$

wobei zur Abkürzung

$$\psi=\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{lx+my+nz}{\mathrm{v}}+\mathrm{p}\right)$$

gesetzt ist und v die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen bedeutet.

Bringt man die Werthe von ξ, η, ζ in α) über, so kann man daraus L, M, N ableiten; es ist dabei zu beachten, dass wir eine particuläre Lösung suchen, welche einen Schwingungszustand vorstellt, und also constante Glieder bei Seite lassen müssen. In dieser Weise finden wir

$$38)\qquad L=\frac{1}{\Delta(1+4\pi\vartheta_0)\mathrm{v}}\left(\frac{qn}{\varepsilon_2}-\frac{rm}{\varepsilon_3}\right)a\cos\psi$$

u. s. w., wodurch auch den Bedingungen e) genügt wird.

Die Gleichung d) wird befriedigt durch

$$39)\qquad \varphi=-2T\mathrm{v}(pl+qm+rn)a\sin\psi,$$

und es folgt dann weiter aus β) und c), wenn wir den oft vorkommenden Factor $4\pi A^2(1+4\pi\vartheta_0)$ mit B bezeichnen,

$$40)\qquad \frac{1+4\pi\varepsilon_1}{\varepsilon_1}pl+\frac{1+4\pi\varepsilon_2}{\varepsilon_2}qm+\frac{1+4\pi\varepsilon_3}{\varepsilon_3}rn=4\pi A^2k\mathrm{v}^2(pl+qm+rn);$$

$$41)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\frac{p}{\varepsilon_1}-l\left(\frac{pl}{\varepsilon_1}+\frac{qm}{\varepsilon_2}+\frac{rn}{\varepsilon_3}\right)=B\mathrm{v}^2[p-l(pl+qm+rn)],\\
&\frac{q}{\varepsilon_2}-m\left(\frac{pl}{\varepsilon_1}+\frac{qm}{\varepsilon_2}+\frac{rn}{\varepsilon_3}\right)=B\mathrm{v}^2[q-m(pl+qm+rn)],\\
&\frac{r}{\varepsilon_3}-n\left(\frac{pl}{\varepsilon_1}+\frac{qm}{\varepsilon_2}+\frac{rn}{\varepsilon_3}\right)=B\mathrm{v}^2[r-n(pl+qm+rn)].
\end{aligned}\right.$$

Ist nun die Fortpflanzungsrichtung durch l, m, n gegeben, so hat man zwischen v, p, q, r die Beziehungen 40), 41) und

$$42)\qquad p^2+q^2+r^2=1.$$

Da indess die Gleichungen 41), der Reihe nach mit l, m, n multiplicirt und dann addirt, $0=0$ geben, enthalten 40), 41) und 42) nur vier von einander unabhängige Bedingungen zur Bestimmung von v, p, q, r.

Die Lösung dieser Gleichungen wird sehr einfach durch die Annahme, dass man die Grössen $\frac{1}{\varepsilon_1}$, $\frac{1}{\varepsilon_2}$, $\frac{1}{\varepsilon_3}$ gegen die Einheit vernachlässigen dürfe. Hierdurch wird 40)

$$pl + qm + rn = A^2 k v^2 (pl + qm + rn),$$

und es muss also entweder $v^2 = \frac{1}{A^2 k}$ oder

$$pl + qm + rn = 0 \tag{43}$$

sein. Wir halten uns an die letzte Gleichung, welche zu Transversalschwingungen führt, während die erste für einen Bewegungszustand gilt, welche den Longitudinalschwingungen in isotropen Medien entspricht.

Bringt man den Werth 43) in 41) über, so enthalten diese Gleichungen noch immer zwei Bedingungen zwischen v, p, q, r und lassen sich also durch zwei aus ihnen abgeleitete Formeln ersetzen. Man eliminire nun zunächst die Grössen $\frac{pl}{\varepsilon_1} + \frac{qm}{\varepsilon_2} + \frac{rn}{\varepsilon_3}$ und $B v^2$; es kommt dann

$$\begin{vmatrix} \frac{p}{\varepsilon_1}, & \frac{q}{\varepsilon_2}, & \frac{r}{\varepsilon_3} \\ l, & m, & n \\ p, & q, & r \end{vmatrix} = 0. \tag{44}$$

Addirt man weiter die Formeln 41), der Reihe nach mit p, q, r multiplicirt, so erhält man

$$B v^2 = \frac{p^2}{\varepsilon_1} + \frac{q^2}{\varepsilon_2} + \frac{r^2}{\varepsilon_3}, \tag{45}$$

welche Gleichung die Fortpflanzungsgeschwindigkeit giebt, sobald man aus 42), 43), 44) p, q, r bestimmt hat.

Die entwickelten Gleichungen haben eine einfache geometrische Bedeutung. Man setze

$$B\varepsilon_1 = R_1^2, \quad B\varepsilon_2 = R_2^2, \quad B\varepsilon_3 = R_3^2 \tag{46}$$

und construire ein Ellipsoid (Polarisationsellipsoid) mit der Gleichung

$$\frac{x^2}{R_1^2} + \frac{y^2}{R_2^2} + \frac{z^2}{R_3^2} = 1.$$

Legt man dann durch den Mittelpunkt dieser Fläche eine den Wellen parallele Ebene und sucht man die Richtungsconstanten p, q, r der Axen der hierdurch entstehenden Ellipse E, so wird man gerade auf die Gleichungen 42), 43), 44) geführt. Berechnet man ausserdem die Länge des in der Richtung (p, q, r) gezogenen halben Durchmessers des Ellipsoids und stellt man den Werth desselben mit der Gleichung 45) zusammen, so gewinnt man folgenden Satz:

In einem anisotropen Medium können sich im Allgemeinen in einer gegebenen Richtung nur zwei Wellensysteme mit transversalen elektrischen Schwingungen fortpflanzen. Es muss nämlich die Richtung der elektrischen Schwingungen entweder mit der einen oder mit der andern Axenrichtung der Ellipse E zusammenfallen. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit jedes Wellensystems wird dabei durch den umgekehrten Werth der zugehörigen Halbaxe von E gegeben.

Einen genau analogen Satz hat man für die Schwingungen elastischer Körper abgeleitet und man hat diesen benützt, um die Doppelbrechung des Lichtes zu erklären.* Dabei musste indess angenommen werden, dass in einem polarisirten Lichtbündel die Schwingungsrichtung senkrecht zur Polarisationsebene stehe. Wenn wir nun in gleicher Weise annehmen, dass in einem solchen Lichtbündel die elektrischen Schwingungen senkrecht zur Polarisationsebene stehen, werden wir auch aus dem abgeleiteten Satze die Doppelbrechung theoretisch ableiten können. In der That bleiben alle Schlüsse, welche man aus dem erwähnten Satze gezogen hat, in der elektromagnetischen Lichttheorie ungeändert bestehen; man hat sie nur gleichsam in die Sprache dieser Theorie zu übersetzen. So wird z. B. Nichts geändert an der Ableitung der Wellenfläche und an der Anwendung derselben, um zu einer gegebenen Wellenebene den zugehörigen Lichtstrahl zu finden.**

§ 16. Es erübrigt noch, die bei einer Fortpflanzung von Schwingungen auftretende elektromotorische Kraft F und die magnetische Kraft G zu untersuchen. Was erstere betrifft, findet man leicht aus den Gleichungen $X = \frac{\xi}{\varepsilon_1}$, $Y = \frac{\eta}{\varepsilon_2}$, $Z = \frac{\zeta}{\varepsilon_3}$, dass F senkrecht steht zu derjenigen Diametralebene des Polarisationsellipsoids, welche mit der Richtung der dielektrischen Polarisation ϱ conjugirt ist. Nun fällt aber letztere Richtung mit einer Axe der Ellipse E zusammen, und daraus folgt durch eine einfache geometrische Betrachtung, dass die Richtung von F in die Schwingungsebene fällt, d. h. in die Ebene, welche die Fortpflanzungs- und Schwingungsrichtung enthält. Man kann dann aber weiter F in zwei Componenten F_v und F_ϱ resp. nach diesen beiden Richtungen zerlegen. Dabei ist dann

$$F_\varrho = pX + qY + rZ = p\frac{\xi}{\varepsilon_1} + q\frac{\eta}{\varepsilon_2} + r\frac{\zeta}{\varepsilon_3} = \varrho\left(\frac{p^2}{\varepsilon_1} + \frac{q^2}{\varepsilon_2} + \frac{r^2}{\varepsilon_3}\right)$$

oder nach 45)

47) $$F_\varrho = B\mathrm{v}^2\varrho.$$

Ist weiter β der Winkel, den die Richtung von F mit der von ϱ bildet, so wird

48) $$F_\mathrm{v} = F_\varrho \, tg\,\beta,$$

---

* Beer, Einleitung in die höhere Optik, S. 236.

** Dass die elektromagnetische Lichttheorie die Doppelbrechung erklären kann, hat zuerst Maxwell gezeigt. *Electr. and Magn.*, §§ 794—797.

wobei wir den Winkel β so rechnen wollen, dass diese Componente positiv ist, wenn ihre Richtung übereinstimmt mit derjenigen, nach welcher sich die Wellen fortpflanzen.

Die Grösse β hat noch eine andere Bedeutung. Es ist nämlich leicht zu zeigen, dass in der Schwingungsebene senkrecht zur elektromotorischen Kraft die Richtung des Lichtstrahles liegt, so dass β auch der Winkel ist, den dieser mit der Wellennormale bildet. Für den Beweis sehe man z. B. V. v. Lang's „Einleitung in die theoretische Physik", §§ 207 und 209, wo der Zusammenhang des Lichtstrahls mit der Ergänzungslinie entwickelt wird, einer Linie, welche in Richtung mit der elektromotorischen Kraft übereinstimmt.

Was schliesslich die magnetische Kraft G betrifft, bemerke ich nur, dass ihre Componenten noch immer, wie bei isotropen Medien, durch die Gleichungen c) gegeben werden und dass folglich das am Ende des § 14 Gesagte auch noch für anisotrope Körper gelten muss.

§ 17. Wir untersuchen jetzt die Erscheinungen der Reflexion und Refraction, welche eintreten, wenn die sich ausbreitende Lichtbewegung auf die Grenzfläche zweier Medien trifft. Zuvor wollen wir die dazu erforderlichen Grenzbedingungen durch unsere Hypothesen über ε und ϑ noch etwas vereinfachen.

Aus den Gleichungen A) folgt zunächst für jede beliebige Richtung h, wenn F_h die Componente der elektromotorischen Kraft in dieser Richtung ist,

$$49)\qquad F_h + \frac{\partial \varphi}{\partial h} = F'_h + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial h}\right)'.$$

Nimmt man hierin für h erstens die Normale n der Grenzfläche mit den Richtungsconstanten a, b, c, so wird die Gleichung

$$50)\qquad a\frac{\xi}{\varepsilon_1} + b\frac{\eta}{\varepsilon_2} + c\frac{\zeta}{\varepsilon_3} + \frac{\partial\varphi}{\partial n} = a\frac{\xi'}{\varepsilon'_1} + b\frac{\eta'}{\varepsilon'_2} + c\frac{\zeta'}{\varepsilon'_3} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)'.$$

Man kann diese Gleichung ersetzen durch eine andere Relation, welche man erhält, wenn man aus ihr mittelst 4) — wo $\varphi_1 = \varphi$ ist — $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)$ und $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)'$ wegschafft; es kommt dann

$$51)\qquad \begin{aligned} a\frac{1+4\pi\varepsilon_1}{\varepsilon_1}\xi + b\frac{1+4\pi\varepsilon_2}{\varepsilon_2}\eta + c\frac{1+4\pi\varepsilon_3}{\varepsilon_3}\zeta = a\frac{1+4\pi\varepsilon'_1}{\varepsilon'_1}\xi' \\ + b\frac{1+4\pi\varepsilon'_2}{\varepsilon'_2}\eta' + c\frac{1+4\pi\varepsilon'_3}{\varepsilon'_3}\zeta'. \end{aligned}$$

Dieser Gleichung hat man dann noch 4) hinzuzufügen.

Nun kann man aber — der Hypothese über ε (§ 13) gemäss — für 51) schreiben

52) $$a\xi+b\eta+c\zeta=a\xi'+b\eta'+c\zeta'$$
und demzufolge für 4)

53) $$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)',$$
und wenn wir nun im Folgenden diese Gleichungen anwenden, wird jedenfalls die Abweichung unserer Resultate von der Wirklichkeit sehr klein $\left(\text{von der Ordnung } \frac{1}{\varepsilon}\right)$ sein.

Für irgend eine Richtung in der Grenzfläche ist $\frac{\partial\varphi}{\partial h}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial h}\right)'$ und also nach 49)

54) $$F_h=F'_h.$$
In gleicher Weise geben die Formeln B) und 24), wenn man das § 15 über ϑ Gesagte berücksichtigt, für jede beliebige Richtung h

55) $$G_h=G'_h.$$
Es sind demnach an der Trennungsfläche zweier Medien mit den nämlichen Hauptrichtungen folgende Grössen stetig: a) φ und $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ [53)], b) die Componente der dielektrischen Polarisation senkrecht zur Grenzfläche [52)], c) die Componente von F nach jeder Richtung in der Grenzfläche [54)] und d) die Componente von G nach jeder beliebigen Richtung [55)].

§ 18. Es seien nun die beiden Medien durch eine ebene Fläche von einander getrennt, welche im Weitern zur yz-Ebene eines Coordinatensystems gewählt werden möge; letzteres genüge dabei wieder der Bedingung des § 9. In dem ersten Medium, an der negativen Seite der yz-Ebene, pflanze sich nun ein unbegrenztes Bündel polarisirten Lichtes gegen die Grenzfläche hin fort. Wir wollen dann untersuchen, ob den Grenzbedingungen genügt werden kann durch reflectirte und gebrochene Transversalschwingungen, welche sich resp. im ersten und zweiten Medium gleichfalls mit ebenen Wellen ausbreiten. Dies gelingt, wie sich zeigen wird, wirklich, wenn nur erstens alle Wellennormalen in der Einfallsebene liegen, zweitens die Sinus der Winkel, welche sie mit der Normale der Grenzfläche bilden, den Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der Wellen proportional sind, und drittens die verschiedenen Lichtbündel an der Trennungsfläche gleiche Phase haben. Die beiden ersten Bedingungen sind mit den bekannten Reflexions- und Brechungsgesetzen identisch.*

* Da nach den Formeln 34) und 45) v nicht von der Schwingungsdauer abhängt, ist die elektromagnetische Lichttheorie in ihrer jetzigen Gestalt nicht im Stande, die Dispersion des Lichtes zu erklären. An die angeführten Gleichungen muss demnach eine von der Wellenlänge l abhängige Correction angebracht wer-

Wählen wir die Einfallsebene zur xz-Ebene, so lässt sich die Richtung, nach welcher sich bei einem Lichtbündel die Wellen fortpflanzen, durch den Winkel α bestimmen, den sie mit der x-Axe bildet. Wir wollen dabei eine Drehung von der positiven x- nach der positiven z-Axe als positiv betrachten, und annehmen, dass für jedes Lichtbündel α positiv sei. Natürlich ist dieser Winkel für das einfallende oder für ein durchgelassenes Wellensystem spitz, für ein reflectirtes dagegen stumpf.

Bei jedem Lichtbündel giebt es weiter eine Richtung in der Wellenebene, so dass die dielektrische Polarisation entweder in diese Richtung fällt und dann positiv, oder in die entgegengesetzte und dann negativ ist. Wir bestimmen diese Richtung durch den Winkel ω (das Azimuth), den sie mit der y-Axe bildet, und zwar wird hierbei positiv genannt diejenige Drehung von der y-Axe aus, welche, von der Seite der ankommenden Wellen betrachtet, entgegengesetzten Sinn hat, wie die Bewegung der Uhrzeiger.

Ist nun für irgend ein Lichtbündel ϱ die dielektrische Polarisation, so sind die Componenten derselben nach den Axenrichtungen

$$-\sin\alpha\,.\,\varrho\sin\omega,\quad \varrho\cos\omega,\quad \cos\alpha\,.\,\varrho\sin\omega,$$

und nach dem Satze des § 14 die Componenten der magnetischen Kraft

$$4\pi A\mathrm{v}\sin\alpha\,.\,\varrho\cos\omega,\quad 4\pi A\mathrm{v}\,.\,\varrho\sin\omega,\quad -4\pi a\mathrm{v}\cos\alpha\,.\,\varrho\cos\omega.$$

Weiter ist

$$\varrho = a\cos\psi,\quad \psi = \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{\mathrm{v}}\cos\alpha - \frac{z}{\mathrm{v}}\sin\alpha + \mathrm{p}\right),$$

wo mit a die Amplitude bezeichnet ist. Die Grössen p, welche die Phaes bestimmen, sind, wie bereits bemerkt, für alle Lichtbündel gleich, und da dies auch mit den Grössen $\frac{\sin\alpha}{\mathrm{v}}$ der Fall ist, werden an der Trennungsfläche (für $x=0$) auch die Functionen ψ einander gleich. Dies bietet den Vortheil, dass man die aus den Grenzbedingungen folgenden Gleichungen durch $\cos\psi$ dividiren und somit in denselben die Grössen ϱ durch die Amplituden a ersetzen kann. Was letztere betrifft, wollen wir noch annehmen, dass die Amplitude im einfallenden Lichte $=1$ sei; für

---

den, und es ist nach Maxwell wahrscheinlich, dass diese nur für $l=\infty$ verschwindet, so dass für diesen Fall die Formeln 34) und 45) genau sind. Für solche Lichtstrahlen mit unendlicher Wellenlänge ergiebt sich dann weiter zwischen dem Brechungsexponenten eines Mediums und seiner Constanten der dielektrischen Polarisation eine Beziehung, welche zuerst durch Maxwell theoretisch abgeleitet und durch spätere Versuche verschiedener Physiker bestätigt worden ist. — Streng genommen kann nun auch die in dieser Mittheilung entwickelte Theorie der Reflexion nur für Strahlen mit unendlich grosser Wellenlänge gelten. So weit unsere Erfahrung reicht, darf man aber die Formeln C), D), E), F) des § 19 auch für andere Lichtstrahlen anwenden.

ein reflectirtes Lichtbündel wollen wir sie mit a, für ein gebrochenes mit a' andeuten. Ueberhaupt mögen die auf das zweite Medium bezüglichen Grössen mittelst Accente von den Grössen im ersten Medium unterschieden werden; ebenso, wo nöthig, die Bestimmungsstücke des einfallenden Lichtes von denjenigen des reflectirten Lichtes mittelst des Index 0.

Schliesslich ist noch zu bemerken, dass wir, da bei Transversalschwingungen überall $\varphi = 0$ ist, nach dem vorhergehenden Paragraphen nur die Stetigkeit von ξ, Y, Z, L, M, N zu berücksichtigen haben.

§ 19. Nach diesen Vorbereitungen betrachten wir zunächst den Fall, dass beide Medien isotrop sind. Es kann dann nur ein reflectirtes und ebenso nur ein gebrochenes Wellensystem auftreten und den Grenzbedingungen kann genügt werden, erstens wenn überall die elektrischen Schwingungen senkrecht zu der Einfallsebene, zweitens wenn sie überall dieser Ebene parallel gerichtet sind.

Im ersten Falle ist für jedes Lichtbündel $\omega = 0$, und man kann für das einfallende, reflectirte und gebrochene Licht setzen

$$\begin{aligned} \eta_0 &= \varrho_0, & L_0 &= 4\pi A \mathrm{v} \sin\alpha \,.\, \varrho_0, & N_0 &= -4\pi A \mathrm{v} \cos\alpha \,.\, \varrho_0, \\ \eta &= \varrho, & L &= 4\pi A \mathrm{v} \sin\alpha \,.\, \varrho, & N &= 4\pi A \mathrm{v} \cos\alpha \,.\, \varrho, \\ \eta' &= \varrho', & L' &= 4\pi A \mathrm{v}' \sin\alpha' \,.\, \varrho', & N' &= -4\pi A \mathrm{v}' \cos\alpha' \,.\, \varrho', \end{aligned}$$

wobei α und α' Einfalls- und Brechungswinkel sind und für das reflectirte Licht der Winkel zwischen Fortpflanzungsrichtung und x-Axe $= 180^0 - \alpha$ gesetzt ist.

Da weiter überall $\xi = \zeta = M = 0$ ist, haben wir nur die Continuität von Y, L, N auszudrücken. Für Y hat man im ersten Medium $\frac{\eta_0 + \eta}{\varepsilon}$, im zweiten $\frac{\eta'}{\varepsilon'}$. Ersetzt man nun an der Trennungsfläche ϱ_0, ϱ, ϱ' durch 1, a, a', so erhält man aus der Stetigkeit von Y und N folgende Gleichungen:

$$\text{56)} \qquad \frac{1+a}{\varepsilon} = \frac{a'}{\varepsilon'}, \quad (1-a)\mathrm{v}\cos\alpha = a'\mathrm{v}'\cos\alpha'.$$

Die Continuität von L führt zu einer Relation, welche vermöge der Annahme $(1+4\pi\vartheta):(1+4\pi\vartheta') = 1$ und der daraus folgenden Proportion $\varepsilon : \varepsilon' = \mathrm{v}'^2 : \mathrm{v}^2$ mit der ersten der Gleichungen 56) identisch ist. Aus diesen beiden Gleichungen lassen sich nun a und a' bestimmen; eine leichte Rechnung ergiebt

$$a = -\frac{\varepsilon'\mathrm{v}'\cos\alpha' - \varepsilon\mathrm{v}\cos\alpha}{\varepsilon'\mathrm{v}'\cos\alpha' + \varepsilon\mathrm{v}\cos\alpha}$$

oder, wenn man auch das Brechungsgesetz berücksichtigt,

$$\text{C)} \qquad a = -\frac{\mathrm{v}\cos\alpha' - \mathrm{v}'\cos\alpha}{\mathrm{v}\cos\alpha' + \mathrm{v}'\cos\alpha} = -\frac{\sin(\alpha-\alpha')}{\sin(\alpha+\alpha')}$$

und

D) $$a' = \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}\,(1+a).$$

Liegt zweitens die Schwingungsrichtung in der Einfallsebene, so ist für jedes Lichtbündel $\omega = 90^0$ und man kann die drei Wellensystemo vorstellen durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\xi_0 &= -\sin\alpha\,.\,\varrho_0, & \zeta_0 &= \cos\alpha\,.\,\varrho_0, & M_0 &= 4\pi A\mathrm{v}\,.\,\varrho_0,\\
\xi &= -\sin\alpha\,.\,\varrho, & \zeta &= -\cos\alpha\,.\,\varrho, & M &= 4\pi A\mathrm{v}\,.\,\varrho,\\
\xi' &= -\sin\alpha'.\,\varrho', & \zeta' &= \cos\alpha'.\,\varrho', & M' &= 4\pi A\mathrm{v}'.\,\varrho'.
\end{aligned}$$

Hier ist überall $\eta = L = N = 0$ und man hat nur die Stetigkeit von ξ, Z, M zu berücksichtigen, woraus man, ähnlich wie oben, drei Gleichungen erhält. Die beiden ersten sind

56) $$(1+a)\sin\alpha = a'\sin\alpha', \quad \frac{(1-a)\cos\alpha}{\varepsilon} = \frac{a'\cos\alpha'}{\varepsilon'},$$

während die dritte, welche aus der Continuität von M hervorgeht, mit der ersten identisch ist. Aus 57) folgt aber durch eine ähnliche Umformung wie oben

E) $$a = \frac{\sin\alpha\cos\alpha - \sin\alpha'\cos\alpha'}{\sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha'\cos\alpha'} = \frac{tg(\alpha-\alpha')}{tg(\alpha+\alpha')},$$

F) $$a' = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha}\,(1+a).$$

Aus den hier entwickelten Resultaten * lässt sich durch weitere Rechnung ableiten, wie für eine beliebige einfallende Lichtbewegung die Reflexion und Brechung stattfinden müssen. Die Uebereinstimmung der Theorie mit der Erfahrung erhellt aber daraus, dass, wie bekannt, die Gleichungen C) und E) durch die Versuche über die Reflexion des polarisirten Lichtes bestätigt worden sind, wenn man nämlich noch annimmt, dass in einem Bündel polarisirten Lichtes die elektrischen Schwingungen senkrecht zur Polarisationsebene stehen. Aus dieser bereits früher (§ 15) eingeführten Annahme folgt dann noch, dass das Azimuth ω eines Lichtbündels auch den Winkel vorstellt, den seine Polarisationsebene mit der Einfallsebene bildet.

§ 20. Schliesslich wollen wir noch den Uebergang des Lichtes aus einem isotropen in ein anisotropes Medium betrachten. Es giebt hierbei im Allgemeinen zwei gebrochene Wellensysteme, welche dem Brechungsgesetze genügen, und sobald die Richtung des einfallenden Lichtes gegeben ist, erhält man die Richtungen der gebrochenen Bündel mittelst einer aus der Theorie der Doppelbrechung bekannten Construction; zu gleicher Zeit werden dann für jedes dieser Bündel die Grössen v', ω' und β (§ 16) bekannt. Während nun gewöhnlich die beiden gebrochenen

* Wie bereits § 2 erwähnt wurde, hat Helmholtz zuerst auf dieselben hingewiesen.

Lichtbündel auftreten, kann in besonderen Fällen nur eins derselben entstehen, und es soll zunächst untersucht werden, wie das einfallende Licht polarisirt sein muss, damit dies der Fall sei.

Da an der Grenze ξ, Y, Z, L, M, N stetig sein müssen, haben wir für jedes Lichtbündel die Werthe dieser Grössen anzugeben. Die Werthe von ξ, L, M, N bieten nach dem § 18 Gesagten keine Schwierigkeit. Was Y und Z betrifft, folgt aus der Gleichung 47) für ein isotropes Medium (wo $F_v = 0$ ist) $Y = B\mathrm{v}^2\eta$, $Z = B\mathrm{v}^2\zeta$. Für ein isotropes Medium sind die Componenten von F_ϱ leicht anzugeben; hier liefert aber auch F_v eine Componente nach der z-Axe, deren Werth leicht zu finden ist. In dieser Weise erhält man folgende Gleichungen, welche der Reihe nach das einfallende, das reflectirte und das einzige gebrochene Wellensystem vorstellen,

$$\xi_0 = -\sin\alpha \,.\, \varrho_0 \sin\omega_0,\quad Y_0 = B\mathrm{v}^2 \,.\, \varrho_0 \cos\omega_0,\quad Z_0 = B\mathrm{v}^2 \cos\alpha \,.\, \varrho_0 \sin\omega_0,$$
$$L_0 = 4\pi A\mathrm{v} \sin\alpha \,.\, \varrho_0 \cos\omega_0,\quad M_0 = 4\pi A\mathrm{v} \,.\, \varrho_0 \sin\omega_0,\quad N_0 = -4\pi A\mathrm{v} \cos\alpha \,.\, \varrho_0 \cos\omega_0,$$

$$\xi = -\sin\alpha \,.\, \varrho \sin\omega,\quad Y = B\mathrm{v}^2 \,.\, \varrho \cos\omega,\quad Z = -B\mathrm{v}^2 \cos\alpha \,.\, \varrho \sin\omega,$$
$$L = 4\pi A\mathrm{v} \sin\alpha \,.\, \varrho \cos\omega,\quad M = 4\pi A\mathrm{v} \,.\, \varrho \sin\omega,\quad N = 4\pi A\mathrm{v} \cos\alpha \,.\, \varrho \cos\omega,$$

$$\xi' = -\sin\alpha' \,.\, \varrho' \sin\omega',\quad Y' = B\mathrm{v}'^2 \,.\, \varrho' \cos\omega',\quad Z' = B\mathrm{v}'^2 \varrho' (\cos\alpha' \sin\omega' + \sin\alpha' \operatorname{tg}\beta),$$
$$L' = 4\pi A\mathrm{v}' \sin\alpha' \,.\, \varrho' \cos\omega',\quad M' = 4\pi A\mathrm{v}' \,.\, \varrho' \sin\omega',\quad N' = -4\pi A\mathrm{v}' \cos\alpha' \,.\, \varrho' \cos\omega'.$$

Es muss nun an der Grenze der beiden Medien $\xi_0 + \xi = \xi'$ u. s. w. sein. Ersetzt man dabei wieder ϱ_0, ϱ, ϱ' durch 1, a, a', so erhält man folgende Gleichungen:

$$58)\quad (\cos\omega_0 + a\cos\omega)\ \sin^2\alpha = a'\cos\omega' \sin^2\alpha',$$
$$59)\quad (\sin\omega_0 + a\sin\omega)\ \sin\alpha = a' \sin\omega' \sin\alpha',$$
$$60)\quad (\cos\omega_0 - a\cos\omega) \sin\alpha\cos\alpha = a'\cos\omega' \sin\alpha' \cos\alpha',$$
$$61)\quad (\sin\omega_0 - a\sin\omega) \sin^2\alpha\cos\alpha = a'(\sin\omega'\cos\alpha' + \operatorname{tg}\beta \sin\alpha') \sin^2\alpha'.$$

Die drei ersten von diesen Gleichungen sind aus der Stetigkeit von L, M, N, die vierte dagegen aus der von Z abgeleitet. Die Continuität von ξ führt wieder zu 59) und die von Y zu 58), so dass man nur den angegebenen Gleichungen zu genügen hat. Berechnet man aus denselben die vier Unbekannten ω_0, ω, a, a', so giebt die erste Grösse an, wie das einfallende Licht polarisirt sein muss, damit nur das eine gebrochene Lichtbündel auftrete. Aus den Werthen von ω, a, a' folgt dann weiter, wie für diese erste Hauptschwingungsrichtung des einfallenden Lichtes die Reflexion und Brechung vor sich gehen.

Nimmt man zweitens an, es entstehe nur das andere gebrochene Lichtbündel, so findet man in gleicher Weise die zweite Hauptschwingungsrichtung des einfallenden Lichtes und die dazu gehörigen Formeln für die Reflexion und Brechung. Um dann schliesslich das Problem für eine beliebige Schwingungsrichtung des einfallenden Lichtes zu lösen, hat man nur die Oscillationen nach den beiden Hauptschwingungsrichtungen zu zerlegen und jede der beiden Componenten gesondert zu behandeln

Um nun die Gleichungen 58) bis 61) zu lösen, eliminire man aus 58) und 60) $a\cos\omega$, aus 59) und 61) $a\sin\omega$, und dividire die hierdurch entstehenden Gleichungen ineinander; es kommt dann

$$\text{G)} \qquad tg\,\omega_0 = tg\,\omega' \cos(\alpha-\alpha') + \frac{\sin^2\alpha'\, tg\beta}{\cos\omega' \sin(\alpha+\alpha')}.$$

Ebenso erhält man, wenn man mit der Wegschaffung von $\cos\omega_0$ und $\sin\omega_0$ anfängt,

$$\text{H)} \qquad tg\,\omega = - tg\,\omega' \cos(\alpha+\alpha') + \frac{\sin^2\alpha'\, tg\beta}{\cos\omega' \sin(\alpha-\alpha')}$$

oder, wenn man G) beachtet,

$$\text{H')} \qquad tg\,\omega = - tg\,\omega_0 \frac{\cos(\alpha+\alpha')}{\cos(\alpha-\alpha')} + \frac{2\sin 2\alpha \sin^2\alpha'\, tg\beta}{\sin 2(\alpha-\alpha')\sin(\alpha+\alpha')\cos\omega'}.$$

Nachdem hierdurch ω_0 und ω bekannt sind, können a und a' aus 58) und 60) bestimmt werden. Man findet dann für das reflectirte Licht

$$\text{J)} \qquad a = -\frac{\cos\omega_0}{\cos\omega}\cdot\frac{\sin(\alpha-\alpha')}{\sin(\alpha+\alpha')}.$$

Zerlegt man die Schwingungen im einfallenden und reflectirten Lichte in eine Componente, welche in, und eine zweite, welche senkrecht zu der Einfallsebene polarisirt ist, und ist die Amplitude der ersten Componente für das einfallende Licht S, für das zurückgeworfene R_s, so ist $S = \cos\omega_0$, $R_s = a\cos\omega$, und statt J) kann man setzen

$$\text{J')} \qquad R_s = -S\frac{\sin(\alpha-\alpha')}{\sin(\alpha+\alpha')}.$$

Es sind hiermit alle zur Lösung eines Problems über die Krystallreflexion erforderlichen Gleichungen entwickelt.

§ 21. Wie bereits § 1 bemerkt wurde, ist es zuerst Neumann gelungen, aus theoretischen Gründen Formeln abzuleiten, welche die Erscheinungen der Reflexion an Krystallen erklären können. Die Richtigkeit dieser Formeln ist durch die Beobachtungen verschiedener Physiker, namentlich durch die genauen Messungen von Seebeck bestätigt worden. Um die Uebereinstimmung unserer Theorie mit der Erfahrung nachzuweisen, haben wir somit nur zu zeigen, dass die oben abgeleiteten Gleichungen mit den von Neumann entwickelten identisch sind.

Am Ende seiner Abhandlung* behandelt Neumann den Fall, dass nur eins der gebrochenen Bündel auftritt. Er giebt dann folgende Gleichungen, welche gelten, wenn nur derjenige Lichtstrahl entsteht, den er den ordentlich gebrochenen nennt:

---

* Abhandlungen der Berliner Akademie, 1835; S. 144, 145.

$$
62) \left\{ \begin{aligned}
tg\,\alpha' &= -tg\,x'\cos(\varphi-\varphi') + \frac{\sin^2\varphi'\,tg\,q'}{\cos x'\sin(\varphi+\varphi')}, \\
tg\,\delta' &= -\frac{\cos(\varphi+\varphi')}{\cos(\varphi-\varphi')}\,tg\,\alpha' + \frac{2\sin 2\varphi\,\sin^2\varphi'\,tg\,q'}{\sin 2(\varphi-\varphi')\sin(\varphi+\varphi')\cos x'}, \\
R_s &= -\frac{\sin(\varphi-\varphi')}{\sin(\varphi+\varphi')}\,S.
\end{aligned} \right.
$$

Es sind hierin φ, φ', x', α', δ' die Grössen, welche wir mit α, α', ω', ω_0 und ω bezeichnet haben. Weiter ist q' der Winkel, den der gebrochene Strahl mit der Wellennormale bildet, und ist also mit unserem Winkel β (§ 16) identisch. Hieraus geht hervor, dass die Gleichungen 62) von G), H') und J') nur durch einige Zeichen verschieden sind, und vollkommen damit übereinstimmen, wenn man x' durch $-x'$ ersetzt. Dieser Unterschied kann nur von den verschiedenen, über die Wahl des Zeichens gemachten Annahmen herrühren. Aus dem gleichen Grunde erklärt es sich, dass auch die Neumann'schen Gleichungen für den Fall, dass nur der ausserordentlich gebrochene Lichtstrahl entsteht, nur in einigen Zeichen von G), H') und J') abweichen.

Um indess die Uebereinstimmung beider Theorien über jeden Zweifel zu erheben, wollen wir nachweisen, warum sie nothwendig zu den nämlichen Resultaten führen müssen. Wie bekannt, leitet Neumann drei Relationen ab aus der Stetigkeit der Verschiebungen der Aethertheilchen an der Grenze zweier Medien, während er eine vierte Gleichung aus dem Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft gewinnt. Denkt man sich die Lichtbündel begrenzt, so kann dieses Princip — wie es Fresnel und Neumann anwandten — für den Fall, dass nur ein gebrochenes Lichtbündel entsteht, folgendermassen ausgedrückt werden:

$$
63) \qquad b_0^2 d H_0 = b^2 d H + b'^2 d' H'.
$$

Es sind hierin b_0, b, b' die Amplituden der Aetherschwingungen, d und d' die Dichtigkeiten des Aethers in den beiden Medien und H_0, H, H' die Volumen, welche aus den drei Lichtbündeln ausgeschnitten werden durch je zwei Ebenen, welche der Wellenebene parallel und um die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen von einander entfernt sind. Hierbei wird das gebrochene Bündel schräg durchschnitten, da die beschreibenden Linien der begrenzenden Cylinderfläche die Richtung des Lichtstrahles haben. Bildet nun diese Richtung mit der Normale der Trennungsfläche einen Winkel γ, so führt eine einfache geometrische Betrachtung zu der Proportion

$$
H_0 : H : H' = \sin\alpha\cos\alpha : \sin\alpha\cos\alpha : \sin\alpha'\frac{\cos\gamma}{\cos\beta}.
$$

Da weiter Neumann $d = d'$ setzt, geht die Gleichung 63) über in

$$
64) \qquad (b_0^2 - b^2)\sin\alpha\cos\alpha = b'^2\sin\alpha'\frac{\cos\gamma}{\cos\beta}.
$$

Man kann nun $\cos\gamma$ ausdrücken in den früher von uns eingeführten Grössen. Dazu ziehe man aus dem Mittelpunkte M einer Kugel die drei Strahlen MA, MB, MC der Reihe nach in der Richtung der Normale zur Trennungsfläche, der Wellennormale und des gebrochenen Lichtstrahles. Aus dem sphärischen Dreieck ABC findet man dann leicht, wenn man das § 18 Gesagte berücksichtigt,

$$\cos\gamma = \cos\alpha' \cos\beta + \sin\alpha' \sin\beta \sin\omega'$$

und hierdurch wird 64)

$$65) \quad (b_0^2 - b^2) \sin\alpha \cos\alpha = b'^2 (\sin\alpha' \cos\alpha' + \sin^2\alpha' \sin\omega' \operatorname{tg}\beta).$$

Bei der Theorie von Neumann haben weiter die Aetherschwingungen die nämliche Richtung, wie in der hier entwickelten Theorie die magnetische Kraft G. Es lässt sich nun zeigen, dass wir, wenn wir in unseren Gleichungen die Componenten von G durch die Verschiebungen der Aethertheilchen ersetzen, gerade zu den von Neumann angewandten Formeln gelangen. Denn die Gleichungen 58), 59), 60), welche die Stetigkeit von L, M, N ausdrücken, müssen dann in diejenigen übergehen, welche Neumann aus der Continuität der Verschiebungen ableitet. Was ferner die Gleichung 61) anbetrifft, wollen wir an ihre Stelle eine andere setzen, welche man erhält, wenn man 58) mit 60), 59) mit 61) multiplicirt und die Resultate addirt; es kommt dann nämlich

$$(1 - a^2) \sin^3\alpha \cos\alpha = a'^2 (\sin^3\alpha' \cos\alpha' + \sin^4\alpha' \sin\omega' \operatorname{tg}\beta).$$

Nun kann bei jedem Lichtbündel die magnetische Kraft vorgestellt werden durch einen Ausdruck, wie $g \cos\psi$, und es besteht dann nach § 14 zwischen den Amplituden g_0, g, g' die Relation

$$g_0 : g : g' = \sin\alpha : a \sin\alpha : a' \sin\alpha',$$

und demzufolge wird obige Gleichung

$$(g_0^2 - g^2) \sin\alpha \cos\alpha = g'^2 (\sin\alpha' \cos\alpha' + \sin^2\alpha' \sin\omega' \operatorname{tg}\beta).$$

Treten nun an die Stelle von L, M, N die Verschiebungen der Aethertheilchen, so hat man g_0, g, g' durch b_0, b, b' zu ersetzen und man erhält dann gerade die Gleichung 65).

Da also die Verschiebungen der Aethertheilchen in der einen Theorie und die Componenten der magnetischen Kraft in der andern in ganz gleicher Weise bestimmt werden, müssen beide auch nothwendig zu denselben Resultaten führen. Was dann aber die Wahl zwischen den beiden Theorien betrifft, glaube ich, dass man entschieden der elektromagnetischen Lichttheorie den Vorrang einräumen muss. Denn bei der aus ihr folgenden Lösung des Reflexionsproblems sind alle Bedingungen der Aufgabe berücksichtigt, während Neumann seine Gleichungen nur erhalten konnte, indem er einige Bedingungen (nämlich die Continuität des Druckes im Aether) aus der Acht liess.