IX.

Ueber die Theorie der Reflexion und Refraction des Lichtes.

Von

H. A. LORENTZ.

Zweite Mittheilung.

§ 1. In einer früheren Mittheilung* habe ich, mit Zugrundelegung der Maxwell'schen Hypothese über die Natur der Lichtschwingungen, die Theorie der Reflexion und Brechung des Lichtes an nichtleitenden Körpern behandelt. Es wurde dabei immer vorausgesetzt, dass auch gebrochene Wellen entstehen. Dies ist jedoch nicht immer der Fall, da bekanntlich das Licht total reflectirt werden kann, und ich werde jetzt untersuchen, wie sich in diesem Falle der Vorgang der Reflexion gestaltet. Dabei werde ich mich auf isotrope Medien beschräuken.

In § 19 der erwähnten Mittheilung sind Bewegungszustände untersucht worden, welche sowohl den Bewegungsgleichungen der Elektricität in den beiden Medien, als auch den Bedingungen, welche an der Grenzebene derselben (der yz-Ebene) gelten, genügen. War das Licht z. B. in der Einfallsebene polarisirt, so konnte man für die einfallende, reflectirte und gebrochene Bewegung der Reihe nach setzen

$$\eta_0 = \quad cos \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{\mathrm{v}} cos\,\alpha - \frac{z}{\mathrm{v}} sin\,\alpha + \mathrm{p}\right),$$

$$\eta \;= a\, cos \frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{x}{\mathrm{v}} cos\,\alpha - \frac{z}{\mathrm{v}} sin\,\alpha + \mathrm{p}\right),$$

$$\eta' = a'\, cos \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{\mathrm{v}'} cos\,\alpha' - \frac{z}{\mathrm{v}'} sin\,\alpha' + \mathrm{p}\right),$$

während $a = -\dfrac{sin(\alpha-\alpha')}{sin(\alpha+\alpha')}$, $a' = \dfrac{sin^2\alpha}{sin^2\alpha'}(1+a)$ war.

---

* Diese Zeitschrift, Bd. XXII S. 1.

Es sei nun der Brechungsexponent $\frac{\mathrm{v}}{\mathrm{v}'} = \frac{1}{n}$, so dass $\sin\alpha' = n \sin\alpha$ gesetzt werden kann. Ist dann $n > 1$, so findet totale Reflexion statt, sobald $\sin\alpha > \frac{1}{n}$ wird. In diesem Falle wird $\sin\alpha' > 1$ und $\cos\alpha'$ imaginär, nämlich $\cos\alpha' = i\sqrt{n^2 \sin^2\alpha - 1}$. Dennoch werden obige Ausdrücke noch immer den Bewegungsgleichungen und den Grenzbedingungen genügen, wenn man nur die allgemein giltigen Sätze über complexe Grössen berücksichtigt.

Den Werthen von $\sin\alpha'$ und $\cos\alpha'$ zufolge werden zunächst a und a' complexe Grössen; wir setzen also

$$a = b + ci, \quad a' = b' + c'i, \tag{1}$$

wo b, c, b', c' reell sind. Während nun die Gleichung für das einfallende Licht ungeändert bleibt, hat man für das reflectirte Licht zu schreiben

$$\eta = (b + ci) \cos\frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{x}{\mathrm{v}}\cos\alpha - \frac{z}{\mathrm{v}}\sin\alpha + \mathrm{p}\right) \tag{2}$$

und für das gebrochene Licht

$$\eta' = (b' + c'i) \cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{\mathrm{v}'}\sqrt{n^2 \sin^2\alpha - 1}\,.\,i - \frac{z}{\mathrm{v}}\sin\alpha + \mathrm{p}\right)$$

oder, wenn man $\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{z}{\mathrm{v}}\sin\alpha + \mathrm{p}\right) = \chi$ und $\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{1}{\mathrm{v}'}\sqrt{n^2 \sin^2\alpha - 1} = r$ setzt,

$$\begin{aligned} \eta' = \; & \tfrac{1}{2}\{b'(e^{rx} + e^{-rx})\cos\chi - c'(e^{rx} - e^{-rx})\sin\chi\} \\ & + i\,.\,\tfrac{1}{2}\{b'(e^{rx} - e^{-rx})\sin\chi + c'(e^{rx} + e^{-rx})\cos\chi\}. \end{aligned} \tag{3}$$

Die Werthe von η_0, η und η' nebst den zugehörigen Werthen der magnetischen Kraft, welche leicht anzugeben sind, bilden noch immer eine Lösung der Gleichungen des Problems. Nun sind aber sowohl die Bewegungsgleichungen, als auch die Grenzbedingungen linear und homogen in Bezug auf die Functionen ξ, η, ζ, L, M, N, φ und ihre Differentialquotienten. Daraus geht hervor, dass, wenn eine Lösung dieser Gleichungen aus einem System complexer Grössen besteht, auch die reellen oder imaginären Theile für sich den Gleichungen genügen werden. Wir erhalten in dieser Weise zwei Lösungen, nämlich

$$\text{a)}\quad \left\{\begin{aligned} \eta_0 &= \cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{\mathrm{v}}\cos\alpha - \frac{z}{\mathrm{v}}\sin\alpha + \mathrm{p}\right), \\ \eta &= b\cos\frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{x}{\mathrm{v}}\cos\alpha - \frac{z}{\mathrm{v}}\sin\alpha + \mathrm{p}\right), \\ \eta' &= \tfrac{1}{2}\Big\{b'(e^{rx} + e^{-rx})\cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{z}{\mathrm{v}}\sin\alpha + \mathrm{p}\right) \\ &\qquad - c'(e^{rx} - e^{-rx})\sin\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{z}{\mathrm{v}}\sin\alpha + \mathrm{p}\right)\Big\} \end{aligned}\right.$$

und

$$\text{b)}\quad \left\{\begin{aligned} \eta_0 &= 0, \\ \eta &= c \cos\frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{x}{\mathrm{v}}\cos\alpha - \frac{z}{\mathrm{v}}\sin\alpha + \mathrm{p}'\right), \\ \eta' &= \tfrac{1}{2}\left\{b'(e^{rx} - e^{-rx})\sin\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{z}{\mathrm{v}}\sin\alpha + \mathrm{p}'\right)\right. \\ &\quad \left. + c'(e^{rx} + e^{-rx})\cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{z}{\mathrm{v}}\sin\alpha + \mathrm{p}'\right)\right\}. \end{aligned}\right.$$

In dem zweiten System ist hierbei an die Stelle von p eine andere Grösse p′ gesetzt, was natürlich erlaubt ist.

Aus den particulären Lösungen a) und b) lassen sich beliebig viele andere Lösungen ableiten. Ist aber das einfallende Licht, also η_0 gegeben, so darf man nur noch die Werthe b), mit einer willkürlichen Constante C multiplicirt, zu den Werthen a) addiren. Um nun zu entscheiden, welche der verschiedenen Lösungen, die man in dieser Weise erhält, mit der Wirklichkeit übereinstimmt, bemerken wir, dass, bei dem Uebergange des Lichtes aus dem ersten in das zweite Medium, in letzterem jedenfalls kein Schwingungszustand entstehen kann, wobei die Amplitude bei wachsender Entfernung von der Grenze immer grösser wird. Da nun im zweiten Medium x positiv ist, müssen dann alle Glieder, welche e^{rx} enthalten, verschwinden, und dies ist nur möglich, wenn $p' = p - \frac{1}{4}T$ und $C = 1$ gesetzt wird. Dadurch finden wir für die reflectirten und gebrochenen Schwingungen

$$\text{4)}\quad \begin{aligned} \eta &= b\cos\frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{x}{\mathrm{v}}\cos\alpha - \frac{z}{\mathrm{v}}\sin\alpha + p\right) \\ &\quad + c\sin\frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{x}{\mathrm{v}}\cos\alpha - \frac{z}{\mathrm{v}}\sin\alpha + p\right), \end{aligned}$$

$$\text{5)}\quad \eta' = b'e^{-rx}\cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{z}{\mathrm{v}}\sin\alpha + p\right) + c'e^{-rx}\sin\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{z}{\mathrm{v}}\sin\alpha + \mathrm{p}\right).$$

Von diesen Gleichungen stimmt wirklich die erste mit den von Fresnel abgeleiteten Resultaten überein. Die zweite aber zeigt, dass zwar im zweiten Medium kein gebrochenes Lichtbündel auftritt, dass aber dennoch auch in dieses Medium die Lichtbewegung eindringt, aber mit stark abnehmender Amplitude. Denn wenn l die Wellenlänge im zweiten Medium ist, hat man $rx = 2\pi\frac{x}{l}\sqrt{n^2\sin^2\alpha - 1}$ und man ersieht hieraus, dass nur dort, wo x einer geringen Anzahl von Wellenlängen gleich ist, η' einen merklichen Werth haben kann.

In ganz gleicher Weise lässt sich auch der Fall behandeln, dass das einfallende Licht senkrecht zur Einfallsebene polarisirt ist; man erhält dabei ähnliche Gleichungen wie oben.

Die hier abgeleiteten Resultate stimmen im Wesentlichen überein mit denjenigen, welche Eisenlohr im 104. Bande von Pogg. Ann. (S. 350 und 360) entwickelt hat.

§ 2. Die Untersuchung der totalen Reflexion hat uns nun zu einem Bewegungszustande im zweiten Medium geführt, der völlig verschieden ist von der gewöhnlich auftretenden Wellenbewegung. Es können in einem Problem mehrere dieser Bewegungszustände zu gleicher Zeit vorkommen. Es kann z. B. die eingedrungene Bewegung durch ein drittes Medium — dessen Grenzfläche mit dem zweiten der ersten Grenzfläche parallel ist — gestört werden und zu einer ähnlichen reflectirten Bewegung Anlass geben. Letztere kann dann wieder bei Entfernung von der spiegeln den Fläche nicht immer intensiver werden, so dass in den Ausdrücken für dieselbe keine Factoren wie e^{-rx} auftreten dürfen.

Die Lösung von Problemen dieser Art wird einfacher, wenn man von einer andern particulären Lösung der Bewegungsgleichungen ausgeht. Bisher stellte diese immer unmittelbar ein polarisirtes Lichtbündel mit ebenen Wellen vor. War z. B. das Licht in der Einfallsebene polarisirt, so setzten wir für irgend einen der Bewegungszustände (vergl. erste Mittheilung, § 19)

$$6)\qquad \begin{gathered} \eta = a \cos \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{\mathrm{v}}\cos\alpha - \frac{z}{\mathrm{v}}\sin\alpha + \mathrm{p}\right), \\ L = 4\pi A \mathrm{v} \sin\alpha . \eta, \quad N = -4\pi A \mathrm{v} \cos\alpha . \eta, \end{gathered}$$

wobei α für eine einfallende oder durchgelassene Bewegung spitz, für eine reflectirte aber stumpf war. An die Stelle von 6) wollen wir nun complexe Grössen setzen, wobei die goniometrische Function durch eine exponentiale ersetzt ist, und zwar so, dass man 6) erhält, wenn man nur die reellen Theile nimmt. Diesen Anforderungen wird durch folgende Grössen genügt:

$$7)\qquad \begin{gathered} [\eta] = a e^{\pm i \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{\mathrm{v}}\cos\alpha - \frac{z}{\mathrm{v}}\sin\alpha + \mathrm{p}\right)}, \\ [L] = 4\pi A \mathrm{v} \sin\alpha . [\eta], \quad [N] = -4\pi A \mathrm{v} \cos\alpha . [\eta], \end{gathered}$$

wodurch, wie man leicht findet, die Bewegungsgleichungen ebensowohl befriedigt werden, wie durch 6). Man kann nun bei irgend einem Problem zunächst für jedes Lichtbündel Ausdrücke wie 7) nehmen, darin Alles so bestimmen, dass die Grenzbedingungen erfüllt werden, und schliesslich überall nur die reellen Theile nehmen. Es kann nun, wie wir sahen, für ein Lichtbündel $\cos\alpha$ imaginär werden, und zwar kann diese Grösse für ein gebrochenes Bündel die Gestalt ki, für ein reflectirtes die Gestalt $-ki$ annehmen, wenn k positiv ist. Im ersten Falle erscheint dann im reellen Theile von 7) ein Factor wie $e^{\pm rx}$, im zweiten Falle ein Factor $e^{\mp rx}$ (r positiv). Die Bedingung, dass die Amplitude bei wachsender Entfernung von der brechenden oder reflectirenden Fläche nicht immer zunehmen darf, wird also jedenfalls erfüllt, wenn man in 7) das untere Zeichen nimmt.

Wir werden im Folgenden die symbolischen Werthe wie 7) durch die Klammern [ ] von den wirklichen Werthen unterscheiden, welche man erhält, wenn man von den symbolischen Werthen nur den reellen Theil nimmt.

Mittelst des hier geschilderten Verfahrens lassen sich nun die partielle und die totale Reflexion in ganz gleicher Weise behandeln. Man wähle nämlich für die verschiedenen Lichtbündel Ausdrücke wie 7), bestimme dann a und a' aus den Grenzbedingungen und nehme endlich nur die reellen Theile. Ist dabei $\cos\alpha'$ reell, so gelangt man zu den in der ersten Mittheilung entwickelten Resultaten, im Gegenfalle zu den Gleichungen für die totale Reflexion. Es versteht sich von selbst, dass diese Methode auch für den Fall anwendbar ist, dass das Licht eine zur Einfallsebene senkrechte Polarisation hat.

§ 3. Da die Genauigkeit der Fresnel'schen Formeln für das total reflectirte Licht durch die Versuche von Jamin und Quincke bestätigt worden ist, haben wir nur noch zu untersuchen, ob auch die Ergebnisse der Theorie für das bei der totalen Reflexion ins zweite Medium eindringende Licht mit den Beobachtungen im Einklange stehen. Dass wirklich dieses Eindringen stattfindet, hat bereits Newton durch folgenden bekannten Versuch nachgewiesen. Es werden zwei gleichschenklige, rechtwinklige Glasprismen, von welchen das eine eine leicht convex gewölbte Hypotenusenfläche hat, mit den Hypotenusenflächen aneinander gedrückt. Lässt man dann ein Lichtbündel auf die eine Kathetenfläche des ersten Prismas fallen, so wird das eingedrungene Licht durch die Hypotenusenfläche reflectirt und tritt durch die andere Kathetenfläche aus. Ist nun bei der inneren Reflexion der Einfallswinkel grösser als der Grenzwinkel, so wird dennoch an der Stelle, wo der Abstand der beiden Prismen am kleinsten ist, das Licht nur partiell reflectirt und auch theilweise durchgelassen. Sieht man also gegen diese Stelle hin, so erscheint sie im reflectirten Licht dunkel in der Mitte der hell glänzenden Hypotenusenfläche, im durchgelassenen Lichte dagegen hell auf dunklem Grunde. Es geht daraus hervor, dass auch bei den Einfallswinkeln der totalen Reflexion die Lichtbewegung eine sehr dünne Luftschicht durchsetzen und so in das zweite Glasstück übergehen kann.

Quincke hat diese Erscheinung zum Gegenstande ausführlicher Untersuchungen gemacht. In einer ersten Versuchsreihe* bestimmte er die grösste Tiefe, bis zu welcher das Licht bei der totalen Reflexion einzudringen vermag, und welche durch den Abstand der beiden Prismenflächen am Rande des erwähnten hellen oder dunklen Fleckes gegeben wird. Da dieser Abstand von der Intensität des einfallenden Lichtes abhängt, besteht der Werth dieser Messungen für unsere Theorie nicht in den absoluten Zahlenwerthen, welche sie ergeben, sondern vielmehr

* Pogg. Ann. 127, S. 1.

darin, dass sie angeben, welchen Einfluss verschiedene Umstände auf das Phänomen haben. Hierüber fand nun Quincke Folgendes:

a) die Tiefe, bis zu welcher das Licht eindringt, nimmt mit wachsendem Einfallswinkel ab;

b) bei Einfallswinkeln, welche den Grenzwinkel nur wenig übersteigen, breitet sich das senkrecht zur Einfallsebene polarisirte Licht, bei grösseren Einfallswinkeln das in dieser Ebene polarisirte am weitesten in das zweite Medium aus;

c) die erwähnte Tiefe nimmt mit wachsender Wellenlänge zu. Demzufolge erscheint der Rand des centralen Fleckens im reflectirten Lichte violett, im durchgelassenen Lichte röthlich gefärbt;

d) bringt man zwischen die Prismen einen andern durchsichtigen Stoff (Wasser, Terpentin), der weniger lichtbrechend als das Glas ist, so dringt das Licht hierin um so tiefer ein, je mehr sich der Brechungsexponent dieses Stoffes dem des Glases nähert.

§ 4. Die Erklärung des beschriebenen Versuches ergiebt sich aus der Betrachtung der wiederholten Reflexionen, welche die Lichtbewegung an den Hypotenusenflächen der beiden Prismen erleidet. Dies ist bereits von Stokes gezeigt worden.* Da indess dieser Physiker über keine genauen Messungen zu verfügen hatte, möge eine eingehendere Prüfung der Theorie an den späteren Versuchen von Quincke hier eine Stelle finden. Dies erscheint um so weniger überflüssig, als nicht jede Theorie hier zu den nämlichen Resultaten führt. Denn es würden nach der älteren Undulationstheorie auch die Longitudinalschwingungen, welche man in die Rechnung aufnehmen muss, eine Rolle spielen können, während nach der Maxwell'schen Theorie solche Schwingungen nicht auftreten.

Man denke sich eine dünne Schicht eines durchsichtigen Mediums, zu beiden Seiten begrenzt durch die nämliche Glassorte mit dem Brechungsexponenten n (>1) gegen den zwischenliegenden Stoff. Es sei dabei für die erste Grenzfläche $x=0$, für die zweite $x=d$, also d die Dicke der Schicht. Ist weiter der Winkel, den ein Lichtstrahl mit der Normale der Grenzebenen bildet, im Glase α, im zwischenliegenden Medium α', so ist $\sin\alpha' = n \sin\alpha$, welche Gleichung zu einem complexen Werthe von α' führen kann.

Es sei nun für das einfallende Licht im ersten Glasstücke (vgl. § 2)

$$[q_0] = e^{-i\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{\mathrm{v}}\cos\alpha - \frac{z}{\mathrm{v}}\sin\alpha + p\right)},$$

wobei mit q_0 die dielektrische Polarisation angedeutet ist. Wir wollen dabei annehmen, es sei das einfallende Licht entweder in, oder senkrecht zu der Einfallsebene polarisirt; diese beiden Fälle lassen sich füg-

* *Cambridge Phil. Trans., vol. VIII, part 5, 1848.*

lieb zugleich behandeln. Es seien, wenn die Amplitude des einfallenden Lichtes $=1$ ist, die Amplituden des reflectirten und gebrochenen Lichtes a und a' bei dem Uebergange aus Glas in das zwischenliegende Medium, m und m' dagegen beim umgekehrten Uebergang. Man hat dann nach den Formeln der ersten Mittheilung für die beiden Hauptfälle resp.

$$a = -\frac{\sin(\alpha-\alpha')}{\sin(\alpha+\alpha')}, \quad a = \frac{tg(\alpha-\alpha')}{tg(\alpha+\alpha')},$$

während für beide Fälle

$$8) \qquad m = -a, \quad a'm' = 1 - a^2$$

ist.

Die einfallende Bewegung spaltet sich an der ersten Grenzfläche ($x=0$) in eine reflectirte und eine durchgelassene Bewegung, bei welcher die dielektrische Polarisation gegeben wird durch die Gleichungen

$$[q_1] = a e^{-i\frac{2\pi}{T}\left(t+\frac{x}{v}\cos\alpha - \frac{z}{v}\sin\alpha + p\right)},$$

$$[r_1] = a' e^{-i\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{x}{v'}\cos\alpha' - \frac{z}{v}\sin\alpha + p\right)}.$$

Die letzte Bewegung breitet sich gegen die zweite Grenzfläche hin aus und veranlasst dort eine durchgelassene Bewegung im zweiten Glasstücke

$$[q'_1] = a'm' e^{-i\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{x}{v}\cos\alpha - \frac{z}{v}\sin\alpha + p'\right)}$$

und eine reflectirte Bewegung in der Zwischenschicht

$$[r'_1] = a'm e^{-i\frac{2\pi}{T}\left(t+\frac{x}{v'}\cos\alpha' - \frac{z}{v}\sin\alpha + p''\right)}.$$

Die Grössen p' und p'' lassen sich hier bestimmen durch die Bedingung, dass an der zweiten Grenzfläche, also für $x=d$, die Exponenten in $[r_1]$, $[q'_1]$ und $[r'_1]$ einander gleich werden müssen. Daraus folgt

$$p' = p - \frac{d}{v'}\cos\alpha' + \frac{d}{v}\cos\alpha, \quad p'' = p - 2\frac{d}{v'}\cos\alpha'.$$

Aus r'_1 entsteht wieder an der ersten Trennungsfläche eine durchgelassene Bewegung q_2 im ersten Glasstücke und ein reflectirter Schwingungszustand r_2 in der Zwischenschicht. Dabei ist

$$[q_2] = a'mm'e^{-i\frac{2\pi}{T}\left(t+\frac{x}{v}\cos\alpha - \frac{z}{v}\sin\alpha + p''\right)}$$

und

$$9) \qquad [r_2] = a'm^2 e^{-i\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{x}{v'}\cos\alpha' - \frac{z}{v}\sin\alpha + p''\right)} = m^2 e^{2i\gamma}[r_1],$$

wenn

$$10) \qquad \gamma = \frac{2\pi}{T}\frac{d}{v'}\cos\alpha' = 2\pi\frac{d}{l}\cos\alpha'$$

gesetzt wird. Es ist hierbei l die Wellenlänge in der dünnen Schicht.

Man muss nun mit r_2 in ganz gleicher Weise verfahren, wie oben mit r_1. Nach 9) müssen aber die symbolischen Ausdrücke für die aus r_2 entstehenden Bewegungen sich von den symbolischen Werthen der aus r_1 entstehenden nur durch den Factor $m^2e^{2i\gamma}$ unterscheiden. Schreitet man in dieser Weise fort, so erhält man für die totale reflectirte Bewegung im ersten Glasstücke

$$[Q] = [q_1] + [q_2](1 + m^2 e^{2i\gamma} + m^4 e^{4i\gamma} + \ldots) = [q_1] + \frac{[q_2]}{1 - m^2 e^{2i\gamma}}.$$

Man setze nun zur Abkürzung

$$\frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{x}{\mathrm{v}} \cos\alpha - \frac{z}{\mathrm{v}} \sin\alpha + \mathrm{p}\right) = \psi;$$

es ist dann $[q_1] = \alpha e^{-i\psi}$, $[q_2] = \alpha' m m' e^{-i(\psi - 2\gamma)}$, und man findet, wenn man 8) berücksichtigt,

A) $$[Q] = \alpha \cdot \frac{1 - e^{2i\gamma}}{1 - \alpha^2 e^{2i\gamma}} e^{-i\psi}.$$

Ebenso hat man für die totale durchgelassene Bewegung im zweiten Glasstücke

$$[Q'] = [q'_1](1 + m^2 e^{2i\gamma} + m^4 e^{4i\gamma} + \ldots) = \frac{[q'_1]}{1 - m^2 e^{2i\gamma}}$$

und setzt man hier

$$\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{\mathrm{v}} \cos\alpha - \frac{z}{\mathrm{v}} \sin\alpha + \frac{d}{\mathrm{v}} \cos\alpha + \mathrm{p}\right) = \psi',$$

so wird dies

B) $$[Q'] = \frac{(1 - \alpha^2) e^{i\gamma}}{1 - \alpha^2 e^{2i\gamma}} e^{-i\psi'}.$$

Die hier eingeführten Grössen ψ und ψ' sind jederzeit reell und hängen nicht ab von der Lage der Polarisationsebene im einfallenden Lichte.

§ 5. Um aus den symbolischen Ausdrücken A) und B) die wirkliche Lichtbewegung abzuleiten, muss nur der reelle Theil genommen werden. Während man dadurch für kleinere Einfallswinkel auf die bekannten Interferenzphänomene (Newton'sche Ringe) zurückkommt, verhält sich die Sache anders, sobald der Einfallswinkel den Grenzwinkel übersteigt. Dann wird γ imaginär, so dass man setzen kann

11) $$\gamma = i\gamma', \quad \gamma' = 2\pi \frac{d}{l} \sqrt{n^2 \sin^2\alpha - 1}.$$

Weiter wird α eine complexe Grösse. Setzt man

12) $$\alpha = b + ci,$$

so findet man leicht für die beiden Hauptfälle, dass das Licht in und senkrecht zu der Einfallsebene polarisirt ist, resp.

13) $$b = \frac{1 + n^2 \cos 2\alpha}{n^2 - 1}, \quad c = -\frac{2n \cos\alpha \sqrt{n^2 \sin^2\alpha - 1}}{n^2 - 1},$$

14) $$b = \frac{\cos^2\alpha - n^2(n^2 \sin^2\alpha - 1)}{\cos^2\alpha + n^2(n^2 \sin^2\alpha - 1)}, \quad c = -\frac{2n \cos\alpha \sqrt{n^2 \sin^2\alpha - 1}}{\cos^2\alpha + n^2(n^2 \sin^2\alpha - 1)},$$

woraus für beide Fälle

15) $$b^2 + c^2 = 1$$

folgt.

Setzt man nun in A) und B)

$$a \cdot \frac{1-e^{2i\gamma}}{1-a^2 e^{2i\gamma}} = B + Ci, \quad \frac{(1-a^2)\, e^{i\gamma}}{1-a^2 e^{2i\gamma}} = D + Ei,$$

so ergiebt eine leichte Rechnung

$$16)\quad B = \frac{b\,(e^{2\gamma'}-1)^2}{(e^{2\gamma'}-1)^2 + 4c^2 e^{2\gamma'}}, \quad C = \frac{c\,(e^{2\gamma'}+1)(e^{2\gamma'}-1)}{(e^{2\gamma'}-1)^2 + 4c^2 e^{2\gamma'}},$$

$$17)\quad D = \frac{2c^2 e^{\gamma'}(e^{2\gamma'}+1)}{(e^{2\gamma'}-1)^2 + 4c^2 e^{2\gamma'}}, \quad E = -\frac{2bc\, e^{\gamma'}(e^{2\gamma'}-1)}{(e^{2\gamma'}-1)^2 + 4c^2 e^{2\gamma'}}.$$

Hieraus kann man noch ableiten, wenn man 15) berücksichtigt,

$$18)\quad B^2 + C^2 = \frac{(e^{2\gamma'}-1)^2}{(e^{2\gamma'}-1)^2 + 4c^2 e^{2\gamma'}}, \quad D^2 + E^2 = \frac{4c^2 e^{2\gamma'}}{(e^{2\gamma'}-1)^2 + 4c^2 e^{2\gamma'}}$$

und

$$19)\quad \frac{E}{D} = -\frac{B}{C}.$$

Die Gleichungen A) und B) werden schliesslich

$$[Q] = (B + Ci)\, e^{-i\psi}, \quad [Q'] = (D + Ei)\, e^{-i\psi'},$$

und hieraus folgt für die wirkliche Bewegung

$$20)\quad Q = \sqrt{B^2 + C^2}\cos(\psi - \delta), \quad Q' = \sqrt{D^2 + E^2}\cos(\psi' - \delta'),$$

wenn man

$$21)\quad \begin{aligned} \sin\delta &= \frac{C}{\sqrt{B^2 + C^2}}, & \cos\delta &= \frac{B}{\sqrt{B^2 + C^2}}, \\ \sin\delta' &= \frac{E}{\sqrt{D^2 + E^2}}, & \cos\delta' &= \frac{D}{\sqrt{D^2 + E^2}} \end{aligned}$$

setzt. Fügt man diesen Gleichungen noch die Relation 19) hinzu, und beachtet man, dass c negativ ist und folglich E und B gleiche, D und C entgegengesetzte Zeichen haben, so findet man

$$22)\quad \delta' = \delta + \tfrac{1}{2}\pi.$$

Die Grössen δ und δ' bestimmen die Phase, die Grössen $\sqrt{B^2 + C^2}$ und $\sqrt{D^2 + E^2}$ die Amplituden des gespiegelten und durchgelassenen Lichtes.

§ 6. Ueber die letzten Grössen ist zunächst zu bemerken, dass die Quadrate derselben die Intensität der beiden Lichtbündel angeben, auf die des einfallenden Lichtes als Einheit bezogen. Man hat also für diese Intensitäten $J = B^2 + C^2$, $J' = D^2 + E^2$, und demzufolge nach 18) $J + J' = 1$, was als eine erste Bestätigung der Theorie zu betrachten ist.

Setzt man zur Abkürzung

$$23)\quad e^{2\gamma'} = q,$$

so ist

$$24)\quad J = \frac{1}{1 + 4c^2 \dfrac{q}{(q-1)^2}}.$$

Wenn nun die Dicke der Schicht von 0 ab wächst bis zu einem Werthe, der als unendlich gross gegen die Wellenlänge angesehen werden darf, so nimmt nach 11) γ' von 0 bis ∞, also q von 1 bis ∞ zu. Man findet dann leicht, dass J allmälig wächst von 0 bis 1. Zu gleicher Zeit muss dann J' abnehmen von 1 bis 0, und hieraus erklärt sich die Erscheinung des centralen Fleckes bei dem erwähnten Versuche.

Die am Rande des Fleckes beobachtete Färbung ist eine Folge davon, dass für violettes Licht l kleiner und demzufolge bei gleichem d γ', q und J grösser sind als für rothes Licht.* Es muss also das violette Licht am meisten reflectirt, das rothe Licht am meisten durchgelassen werden. Dass diese Färbung besonders am Rande des Fleckes sichtbar sein muss, erklärt sich aus dem Umstande, dass für $d=0$ J und J' für alle Farben gleich sind.

Ich habe beispielsweise für einige Fälle die Intensität des reflectirten und durchgelassenen Lichtes berechnet. Es ist dabei angenommen worden, dass das Licht in der Einfallsebene polarisirt ist und dass der Abstand der beiden Glasstücke ein Viertel der Wellenlänge beträgt, welche in der Luft zu der Fraunhofer'schen Linie D gehört. Ich erhielt dann folgende Resultate:

a) Flintglas — Luft — Flintglas:

gelbes Licht (Linie D), $n=1{,}6160$, Grenzwinkel $= 38^0\,14'$, $\alpha = 45^0$,
$J=0{,}611$, $J'=0{,}389$;

b) bei der nämlichen Combination:

blaues Licht (Linie F), $n=1{,}628$, Grenzwinkel $= 37^0\,54'$, $\alpha = 45^0$,
$J=0{,}731$, $J'=0{,}269$.

Die Vergleichung dieser Resultate bestätigt das oben über den Einfluss der Wellenlänge Gesagte.

c) $\alpha = 70^0$, alles Uebrige wie bei *a)*, $J=0{,}933$, $J'=0{,}067$.

Dies stimmt überein mit § 3*a*.

d) Flintglas — Terpentin — Flintglas:

gelbes Licht (Linie D), $n=1{,}0911$, Grenzwinkel $= 66^0\,25'$, $\alpha = 70^0$,
$J=0{,}279$, $J'=0{,}721$.

Die Vergleichung von *d)* mit *c)* bestätigt das § 3*d* angegebene Resultat von Quincke.

§ 7. Unter übrigens gleichen Umständen ist die Amplitude und Phase des reflectirten und durchgelassenen Lichtes für die beiden Haupt-

* Eigentlich wäre hierbei zu berücksichtigen, dass, zufolge der Dispersion, auch c sich mit der Wellenlänge ändert. Allein diese Aenderung übt jedenfalls auf J einen viel kleineren Einfluss aus, als die von q.

fälle, welche wir in Bezug auf die Polarisation des Lichtes unterschieden haben, nicht die nämliche. Wir wollen nun mittels der Indices p und s andeuten, ob das Licht in oder senkrecht zu der Einfallsebene polarisirt ist, so dass z. B. für den ersten Fall die Amplituden und Phasen der beiden entstehenden Lichtbündel mit $\sqrt{B^2_p + C^2_p}$, $\sqrt{D^2_p + E^2_p}$, δ_p, δ'_p bezeichnet werden.

Ist nun das einfallende Licbt in beliebiger Weise linear polarisirt, so zeigen, der hervorgehobenen Verschiedenheit zufolge, die reflectirten und durchgelassenen Strahlen elliptische Polarisation. Mittels des Babinet'schen Compensators ist man dann im Stande, im reflectirten Lichte das Amplitudenverhältniss $k = \sqrt{\dfrac{B^2_s + C^2_s}{B^2_p + C^2_p}}$ und den Phasenunterschied $\delta_s - \delta_p$, und ebenso im durchgelassenen Licbte die Grössen $k' = \sqrt{\dfrac{D^2_s + E^2_s}{D^2_p + E^2_p}}$ und $\delta'_s - \delta'_p$ zu bestimmen.

Quincke hat wirklich in verschiedenen Fällen diese Messungen ausgeführt.* Den Phasenunterschied $\varDelta$ gab er dabei in Viertel-Wellenlängen an, so dass $\varDelta = \frac{2}{\pi}(\delta_s - \delta_p)$ und $\varDelta' = \frac{2}{\pi}(\delta'_s - \delta'_p)$ ist.

Aus den Gleichungen des § 5 lassen sich Formeln zur Berechnung von k, k', $\varDelta$, $\varDelta'$ ableiten. Zunächst findet man leicht aus 18)

$$k'^2 = \frac{D^2_s + E^2_s}{D^2_p + E^2_p} = \frac{1 + 4c^2_p \dfrac{q}{(q-1)^2}}{\dfrac{c^2_p}{c^2_s} + 4c^2_p \dfrac{q}{(q-1)^2}}.$$

Es sei nun G der Grenzwinkel der totalen Reflexion $\left(\sin G = \frac{1}{n}\right)$ und H der Polarisationswinkel beim Uebergang aus dem Glase in das zwischenliegende Medium $\left(\operatorname{tg} H = \frac{1}{n}\right)$, so hat man nach 13) und 14)

$$c_p = -2\frac{n^2}{n^2-1}\cos\alpha \sqrt{\sin(\alpha+G)\sin(\alpha-G)}, \quad c_s = c_p \frac{\sin^2 H}{\sin(\alpha+H)\sin(\alpha-H)}$$

und dies giebt, wenn noch

$$\tau = 16\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^2 \frac{q}{(q-1)^2}$$

gesetzt wird,

$$25)\quad k'^2 = \frac{1 + \tau\cos^2\alpha \sin(\alpha+G)\sin(\alpha-G)}{\left[\dfrac{\sin(\alpha+H)\sin(\alpha-H)}{\sin^2 H}\right]^2 + \tau\cos^2\alpha\sin(\alpha+G)\sin(\alpha-G)}.$$

---

* Pogg. Ann. 127, S. 199.

Zur Berechnung von q erhält man aus 23) und 11), wenn man

$$4\pi n \frac{d}{l} \log e = s$$

setzt, welche Grösse vom Einfallswinkel unabhängig ist,

$$\log q = s \sqrt{\sin(\alpha + G)\sin(\alpha - G)}.$$

Weiter folgt aus den Gleichungen 21)

$$\sin \tfrac{1}{2}\pi \Delta' = \sin(\delta'_s - \delta'_p) = \frac{E_s D_p - E_p D_s}{\sqrt{(D^2_p + E^2_p)(D^2_s + E^2_s)}} = k' \frac{E_s D_p - E_p D_s}{D^2_s + E^2_s},$$

worin die Werthe von D_p, D_s, E_p, E_s zu substituiren sind. Nach einiger Umformung findet man hierdurch

$$26)\quad \sin \tfrac{1}{2}\pi \Delta' = -2n^2 \sin^2\alpha \,.\, k' . \frac{q+1}{q-1} . \frac{\cos\alpha \sqrt{\sin(\alpha+G)\sin(\alpha-G)}}{1 + \tau\cos^2\alpha \sin(\alpha+G)\sin(\alpha-G)}.$$

Untersucht man das Licht, welches am äussersten Rande des centralen Fleckes durchgelassen wird, so wird man ohne erheblichen Fehler für k' den Grenzwerth nehmen können, welchem diese Grösse zustrebt bei fortwährend wachsendem Abstande der Glasstücke. Für $d = \infty$ und $\gamma' = \infty$ hat man aber $\tau = 0$, und also für den Fleckenrand

$$27)\quad k' = \frac{\sin^2 H}{\sin(\alpha + H)\sin(\alpha - H)}.$$

Für das reflectirte Licht will ich nur k angeben. Aus 18) folgt

$$28)\quad k = \sqrt{\frac{B^2_s + C^2_s}{B^2_p + C^2_p}} = \frac{c_p}{c_s}\sqrt{\frac{D^2_s + E^2_s}{D^2_p + E^2_p}} = \frac{\sin(\alpha + H)\sin(\alpha - H)}{\sin^2 H} k',$$

wobei k' sich auf das bei gleichdicker Zwischenschicht durchgelassene Licht bezieht.

§ 8. Quincke hat zunächst aus seinen Messungen abgeleitet, dass die Grössen Δ und Δ', welche den Phasenunterschied im reflectirten und durchgelassenen Lichte angeben, genau um 2, also um eine halbe Wellenlänge von einander verschieden sind.

Nach der oben entwickelten Theorie ist $\delta'_p = \delta_p + \frac{1}{2}\pi$, $\delta'_s = \delta_s + \frac{1}{2}\pi$, mithin $\Delta = \Delta'$. Dass nach Quincke diese Grössen nicht gleich, sondern um eine halbe Wellenlänge von einander verschieden sind, rührt lediglich davon her, dass er den Phasenunterschied im reflectirten Lichte Null nennt, wenn er nach unseren Formeln eine halbe Wellenlänge beträgt.

Lässt man die Dicke der Zwischenschicht fortwährend zunehmen, so nähert sich Δ' dem Werthe, den man bei dem Lichte beobachtet, das den Rand des Fleckes durchsetzt hat; Δ dagegen wird der Phasenunterschied beim gewöhnlichen, total reflectirten Lichte. Diese beiden Werthe müssen folglich gleich sein oder, bei den Angaben von Quincke, um 2 differiren. Auch dies wird durch die Messungen bestätigt, so dass die Theorie in richtiger Weise den Zusammenhang angiebt zwischen Δ beim gewöhnlichen total reflectirten Lichte und $\varDelta'$ für den Rand des Fleckes. Da nun, wie bekannt, was die erste Grösse betrifft, die Beobachtungen mit der Theorie im Einklange stehen, muss dies auch in Bezug auf die zweite Grösse der Fall sein. Wir haben uns also mit dem Phasenunterschied des am Fleckenrande durchgelassenen Lichtes nicht weiter zu beschäftigen.

Für eine Anzahl Fälle bat Quincke k' gemessen für Licht, das den Rand, und k' und $\varDelta'$ für Licht, das die Mitte des centralen Fleckes durchsetzt hat. Ich habe aus den Formeln des vorhergehenden Paragraphen diese Grössen für einige Fälle berechnet. Dabei habe ich, was die Mitte des Fleckes betrifft, zunächst aus dem Werthe von k' für den ersten Einfallswinkel $\log s$ berechnet und damit dann die übrigen gesuchten Grössen. Die Resultate dieser Rechnung sind in den folgenden Tabellen zusammengestellt, deren Nummern mit denen der entsprechenden Tabellen in der Abhandlung von Quincke übereinstimmen.

XIa.

Flintglas — Luft.

$$n = 1{,}6160,\ G = 38{,}^0\,14',\ H = 31^0 45';$$
$$\log s = 0{,}59051.$$

α.	Mitte k' beobachtet.	Mitte k' berechnet.	Mitte $\varDelta'$ beobachtet.	Mitte $\varDelta'$ berechnet.	Rand k' beobachtet.	Rand k' berechnet.
40⁰ 3′	1,589	1,589	− 0,399	− 0,381	2,049	2,019
41 18	1,507	1,499	− 0,394	− 0,433	1,817	1,745
43 8	1,378	1,352	− 0,470	− 0,492	1,557	1,453
46 52	1,120	1,075	− 0,526	− 0,556	1,132	1,083
51 10	0,883	0,846	− 0,596	− 0,566	0,889	0,839
63 1	0,562	0,538	− 0,463	− 0,447	0,581	0,535

XIIa.

Flintglas — Wasser.

$$n = 1{,}2096,\ G = 55^0 46',\ H = 39^0 35';$$
$$\log s = 0{,}00930.$$

α.	Mitte k' beobachtet.	Mitte k' berechnet.	Mitte $\varDelta'$ beobachtet.	Mitte $\varDelta'$ berechnet.	Rand k' beobachtet.	Rand k' berechnet.
56⁰ 2′	1,027	1,027	− 0,063	− 0,063	1,358	1,441
57 13	1,023	1,025	− 0,065	− 0,067	1,359	1,350
63 1	1,013	1,007	− 0,106	− 0,091	1,031	1,046

XIVa.

Crownglas — Luft.

$n = 1{,}5149,\ G = 41^0\,19',\ H = 33^0\,26';$

$\log s = 9{,}52214.$

α.	Mitte k' beobachtet.	Mitte k' berechnet.	Mitte Δ' beobachtet.	Mitte Δ' berechnet.	Rand k' beobachtet.	Rand k' berechnet.
$42^0\,22'$	1,008	1,008	− 0,047	− 0,054	2,000	2,016
43 41	0,993	1,007	− 0,047	− 0,058	1,663	1,750
45	1,216	1,007	− 0,270	− 0,062	1,394	1,545
49 37	1,031	1,002	− 0	− 0,072	1,077	1,097
58 3	0,963	0,983	− 0,025	− 0,118	0,738	0,729
70 6	0,941	0,895	− 0,117	− 0,199	0,552	0,523

Die Messungen für die Mitte des Fleckes für $\alpha = 45^0$ scheinen hier mit bedeutenden Fehlern behaftet zu sein.

XIIIa.

Flintglas — Terpentin.

$n = 1{,}0911,\ G = 66^0\,25',\ H = 42^0\,30'.$

α.	Rand k' beobachtet.	Rand k' berechnet.
$66^0\,49'$	1,115	1,175
68 26	1,080	1,118
69 28	1,037	1,085

XVa.

Crownglas — Wasser.

$n = 1{,}1339,\ G = 61^0\,52',\ H = 41^0\,25'.$

α.	Rand k' beobachtet.	Rand k' berechnet.
$62^0\,26'$	1,220	1,257
64 26	1,137	1,164
71 13	0,957	0,954

Schliesslich hat Quincke bei den beiden Flintglasprismen nebst dem durchgelassenen Lichte auch das am nämlichen Punkte der Luftschicht reflectirte Licht untersucht. Da wir bereits über Δ gesprochen haben, habe ich nur noch k', Δ' und k berechnet.

XIc.

Flintglas — Luft.

n, G und H wie bei XIa.

α.	Durchgelassen				Reflectirt	
	k'		Δ'		k	
	beobachtet.	berechnet.	beobachtet.	berechnet.	beobachtet.	berechnet.
38° 50′	1,437	1,389	− 0,237	− 0,300	0,583	0,583
51 10	0,937	0,866	− 0,499	− 0,523	0,960	1,032

Es wurde hierbei zunächst aus dem Werthe von k für den ersten Einfallswinkel die Dicke der Schicht berechnet und dadurch gefunden

$$log\left(4\,\pi\,\frac{d}{l}\right) = 0{,}56288.$$

Im Ganzen genommen scheinen mir die berechneten Werthe in den obigen Tabellen eine befriedigende Uebereinstimmung mit den beobachteten zu zeigen. Zwar sind die Abweichungen etwas grösser als die bei den Versuchen über das gewöhnliche total reflectirte Licht vorkommenden, allein ich glaube dies der grösseren Schwierigkeit der hier betrachteten Messungen zuschreiben zu dürfen.