IX.

# Ueber die Theorie der Reflexion und Refraction des Lichtes.

Von

H. A. Lorentz.

## Dritte Mittheilung.

§ 1. Nach der elektromagnetischen Lichttheorie, deren Anwendung auf isolirende Körper ich früher besprochen habe,* müssen die Metalle, ihrem Leitungsvermögen zufolge, eigenthümliche optische Eigenschaften besitzen. Zu untersuchen, ob auch in dieser Hinsicht die Theorie mit der Erfahrung übereinstimme, ist der Zweck der gegenwärtigen Mittheilnng.

Um die Bewegungsgleichungen der Elektricität für leitende Medien aufzustellen, haben wir zunächst den Leitungsstrom zu betrachten, der in denselben unter dem Einflusse einer elektromotorischen Kraft geweckt wird und dessen Intensität, so weit unsere Erfahrung reicht, durch das Ohm'sche Gesetz bestimmt wird. Nehmen wir vorläufig die unbeschränkte Giltigkeit dieses Gesetzes an und beschränken wir uns auf isotrope Medien, so haben wir für die Componenten des Leitungsstromes zu setzen

$$1)\qquad u_1 = \frac{X}{\varkappa}, \quad v_1 = \frac{Y}{\varkappa}, \quad w_1 = \frac{Z}{\varkappa},$$

wo $X$, $Y$, $Z$, wie früher, die Componenten der elektromotorischen Kraft vorstellen und mit $\varkappa$ der Widerstand des Mediums bezeichnet ist. Letztere Grösse lässt sich durch Messungen bestimmen; nur ist dabei zu beachten, dass man, wenn, wie wir früher annahmen, die Luft die Fähigkeit der dielektrischen Polarisation besitzt, durch Messungen in der Luft nicht den wahren Werth von $\varkappa$ erhält. Es ist vielmehr, wenn $\varkappa'$ den gemessenen Werth vorstellt, der wahre Werth

$$2)\qquad \varkappa = \frac{\varkappa'}{1 + 4\pi\varepsilon_0}.$$

* Diese Zeitschrift Bd. XXII, S. 1 und 205.

Ausser der erwähnten Wirkung einer elektromotorischen Kraft ist es aber nicht unwahrscheinlich, dass auch in leitenden Medien durch eine solche Kraft eine Polarisation der Theilchen hervorgerufen wird, und wir wollen annehmen, dass diese den nämlichen Gesetzen folge, wie die in dielektrischen Körpern geweckte Polarisation. Sind demnach, wie in der ersten Mittheilung, $\xi$, $\eta$, $\zeta$ die Componenten dieser Polarisation, so setzen wir auch für einen Leiter

3) $$\xi = \varepsilon X, \quad \eta = \varepsilon Y, \quad \zeta = \varepsilon Z$$

oder nach 1)

4) $$\xi = \varepsilon \varkappa u_1, \quad \eta = \varepsilon \varkappa v_1, \quad \zeta = \varepsilon \varkappa w_1 .$$

Die Aenderung dieser Polarisation bildet nun wieder einen (dem dielektrischen analogen) Strom mit den Componenten $\frac{\partial \xi}{\partial t}$, $\frac{\partial \eta}{\partial t}$, $\frac{\partial \zeta}{\partial t}$ oder $\varepsilon \varkappa \frac{\partial u_1}{\partial t}$, $\varepsilon \varkappa \frac{\partial v_1}{\partial t}$, $\varepsilon \varkappa \frac{\partial w_1}{\partial t}$. Für den Gesammtstrom, dessen Componenten wir in der ersten Mittheilung mit $u$, $v$, $w$ bezeichneten, haben wir somit

5) $$u = u_1 + \varepsilon \varkappa \frac{\partial u_1}{\partial t}, \quad v = v_1 + \varepsilon \varkappa \frac{\partial v_1}{\partial t}, \quad w = w_1 + \varepsilon \varkappa \frac{\partial w_1}{\partial t}.$$

§ 2. Es bleiben nun die Gleichungen 28) und 29) und ebenso auch I) und II) der ersten Mittheilung ungeändert bestehen. Beachten wir, dass das Medium isotrop ist, und setzen wir für $\xi$, $\eta$, $\zeta$ die Werthe 4), so werden die letztgenannten Gleichungen

a) $$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial w_1}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial z} &= \frac{1 + 4\pi\vartheta}{\varkappa} A \frac{\partial L}{\partial t}, \\ \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial w_1}{\partial x} &= \frac{1 + 4\pi\vartheta}{\varkappa} A \frac{\partial M}{\partial t}, \\ \frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} &= \frac{1 + 4\pi\vartheta}{\varkappa} A \frac{\partial N}{\partial t}, \end{aligned} \right.$$

b) $$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = - \frac{1}{\varkappa} \Delta \varphi + \frac{A^2}{\varkappa} k \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

Bei der Ableitung der Gleichungen III) haben wir hier statt $u = \frac{\partial \xi}{\partial t}$, $v = \frac{\partial \eta}{\partial t}$, $w = \frac{\partial \zeta}{\partial t}$ die Werthe 5) zu setzen; wir erhalten dadurch

c) $$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} &= A \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} - 4\pi \varepsilon \varkappa \frac{\partial u_1}{\partial t} - 4\pi u_1 \right], \\ \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} &= A \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t} - 4\pi \varepsilon \varkappa \frac{\partial v_1}{\partial t} - 4\pi v_1 \right], \\ \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} &= A \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial t} - 4\pi \varepsilon \varkappa \frac{\partial w_1}{\partial t} - 4\pi w_1 \right]. \end{aligned} \right.$$

Auch die Gleichungen IV) und 23) der ersten Mittheilung bleiben ungeändert; eliminirt man aus ihnen wieder $\chi$, so ergiebt sich

$$\text{d)} \qquad \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = 0.$$

Schliesslich ist diesen Relationen noch die Gleichung 7) der erwähnten Mittheilung hinzuzufügen. Benützt man dabei die Werthe 5) und setzt man zur Abkürzung $\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = P$, so wird

$$\text{e)} \qquad P + \varepsilon \varkappa \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} (\varDelta \varphi).$$

§ 3. Um zunächst zu untersuchen, wie sich in einem unbegrenzten leitenden Medium transversale elektrische Schwingungen mit ebenen Wellen ausbreiten können, geben wir aus von den symbolischen Ausdrücken*

$$\text{6)} \qquad [u_1] = 0, \quad [v_1] = a e^{-i\frac{2\pi}{T}(t - xR + \text{p})}, \quad [w_1] = 0,$$

wobei vorausgesetzt ist, dass die Fortpflauzungsrichtung der $x$-, die Schwingungsrichtung aber der $y$-Axe parallel läuft. Da nun $P = 0$ ist, wird den Gleichungen b) und e) genügt, wenn man auch $\varphi = 0$ nimmt. Ebenso werden die Formeln a) befriedigt durch

$$[L] = 0, \quad [M] = 0, \quad [N] = -\frac{\varkappa R}{A(1 + 4\pi\vartheta)} a e^{-i\frac{2\pi}{T}(t - xR + \text{p})},$$

welche Ausdrücke auch der Relation d) Genüge leisten.

Bringt man schliesslich diese Werthe in c) über, so geben die erste und dritte dieser Gleichungen $0 = 0$; die zweite aber liefert die Bedingung

$$\text{7)} \qquad R^2 = 4\pi\varepsilon A^2 (1 + 4\pi\vartheta) + i \cdot \frac{2T}{\varkappa} A^2 (1 + 4\pi\vartheta).$$

Es ist also $R$ eine complexe Grösse. Setzt man dieselbe $= q + ri$, so können $q$ und $r$ aus den Constanten des Mediums und der Schwingungsdauer bestimmt werden und wir gelangen zu folgender particulärer Lösung der Bewegungsgleichungen:

$$[v_1] = a e^{-\frac{2\pi}{T} r x - i \frac{2\pi}{T}(t - qx + \text{p})},$$

$$[N] = -(q + ri) \frac{\varkappa}{A(1 + 4\pi\vartheta)} a e^{-\frac{2\pi}{T} r x - i \frac{2\pi}{T}(t - qx + \text{p})}.$$

Nimmt man blos den reellen Theil, so findet man für die wirkliche Bewegung

$$v_1 = a e^{-\frac{2\pi}{T} r x} \cos \frac{2\pi}{T} (t - qx + \text{p}).$$

§ 4. Es erhellt aus diesem Ausdrucke, dass bei der Fortpflauzung der elektrischen Schwingungen im leitenden Medium die Amplitude in der Fortpflanzungsrichtung immer kleiner, dass also das Licht absorbirt

* Vergl. die zweite Mittheilung, § 2.

wird. Dies war vorherzusehen, da, wie man weiss, in einem Leiter die Energie der elektrischen Bewegungen immer theilweise in Wärme umgesetzt wird.

Wirklich sind alle metallischen Leiter sehr wenig durchsichtig, und sind die meisten Körper, welche das Licht ungeschwächt durchlassen, Isolatoren. Eine Ausnahme bilden die Elektrolyte, deren viele fast vollkommen durchsichtig sind, und welche jedenfalls viel mehr Licht durchlassen, als es nach obigen Gleichungen der Fall sein müsste. Auch für die Metalle scheint dies zu gelten; wenigstens hat Maxwell, der zuerst auf den Zusammenhang zwischen Leitungsfähigkeit und Undurchsichtigkeit aufmerksam machte, die Durchsichtigkeit eines dünnen Goldblättchens viel grösser gefunden, als man es nach der Theorie erwarten dürfte.*

Ohne Zweifel liegt der Grund dieser Abweichungen in der Mangelhaftigkeit unserer Anschauungen über das Wesen des elektrischen Stromes. Nur wenn die Wissenschaft in dieser Beziehung viel weiter fortgeschritten ist, darf man anf eine völlig befriedigende Uebereinstimmung der Theorie mit den Thatsachen hoffen. Indess lässt sich wenigstens ein Umstand angeben, der vielleicht als die Ursache der erwähnten Abweichnngen zu betrachten ist.

Das Ohm'sche Gesetz, dessen allgemeine Giltigkeit wir oben voraussetzten, ist nur für stationäre Ströme mit voller Gewissheit bewiesen. Für veränderliche Ströme aber ist es sehr gut möglich, dass dieses Gesetz einer Modification bedarf, wie dies denn auch bereits von Weber, Kirchhoff und Lorberg angenommen worden ist.

Es ist nämlich nicht unwahrscheinlich, dass bei dem Auftreten einer elektromotorischen Kraft der elektrische Strom nicht unmittelbar entsteht mit der vollen, durch das Ohm'sche Gesetz bedingten Intensität, sondern eine gewisse Zeit braucht, um bis zu dieser Intensität anzuschwellen.** Diese Zeit mag sehr kurz sein, so dass für unsere Beobachtungsmittel die Intensität augenblicklich ihren grössten Werth zu erreichen scheint; dennoch ist es möglich, dass bei raschen periodischen Aenderungen der elektromotorischen Kraft, wie bei den Lichterscheinungen, der erwähnte Zeitraum nicht mehr verschwindet gegen die Zeit, während welcher diese Kraft in der nämlichen Richtung wirkt. Dies wird zur Folge haben, dass die Stromintensität in jedem Augenblick kleiner ist, als sie nach dem Ohm'schen Gesetze sein müsste; die Bewegung wird also etwa so vor sich gehen, als wäre der Widerstand für rasch oscillirende Ströme grösser als für stationäre. Dann muss aber, wie man

* *Maxwell, Electricity and Magnetism,* §§ 798—800.

** Dieses Anschwellen ist wohl zu unterscheiden von der beobachteten Erscheinung, dass beim Schliessen einer galvanischen Kette in einem Punkte des Schliessungsbogens die elektromotorische Kraft und dadurch der Strom eine gewisse Zeit braucht, um in voller Stärke aufzutreten.

leicht findet, auch die Absorption geringer sein, als wenn das Ohm'sche Gesetz allgemein giltig wäre.

Natürlich könnte dieser Gegenstand nur dann in völlig befriedigender Weise behandelt werden, wenn man mehr über das eigentliche Wesen des elektrischen Stromes wüsste. Indessen hat man aus der Vorstellung, dass bei dieser Erscheinung ein Stoff sich in Strömung befinde, dessen Bewegung durch einen der Reibung ähnlichen Widerstand gehemmt wird, Gleichungen abgeleitet, welche auch die Abweichung vom Ohm'schen Gesetz wiedergeben. Es sind dann nämlich die Formeln 1) umzugestalten in folgende:*

$$8)\qquad X = \varkappa u_1 + g\frac{\partial u_1}{\partial t},\quad Y = \varkappa v_1 + g\frac{\partial v_1}{\partial t},\quad Z = \varkappa w_1 + g\frac{\partial w_1}{\partial t},$$

wo $g$ ein Coefficient ist, der mit der Masse des bewegten Stoffes zusammenhängt. Je kleiner diese Masse ist, um so kleiner wird auch $g$, um so geringer werden folglich auch die erwähnten Abweichungen.

Allerdings muss bei den Elektrolyten $g$ einen merklichen Werth haben, da sich hier bei einem elektrischen Strome auch die gewöhnliche Materie mit bewegt. Es ist möglich, dass hierdurch bei diesen Körpern die Abweichung vom Ohm'schen Gesetze so beträchtlich wird, dass das Licht fast nicht absorbirt wird.

§ 5. Viel genauer, als die Absorption des Lichtes in den Metallen, hat man die Eigenschaften des von denselben reflectirten Lichtes messend verfolgt. Es soll nun untersucht werden, wie nach der elektromagnetischen Lichttheorie diese Reflexion vor sich gehen muss.

Dazu brauchen wir zunächst die Formeln für eine schwingende Bewegung, welche sich in einer Richtung fortpflanzt, die in der $xz$-Ebene liegt und gegen die $x$-Axe unter einem beliebigen Winkel $\alpha$ geneigt ist. Steht dann die Richtung der elektrischen Schwingungen senkrecht zu der genannten Ebene, so findet man aus der Untersuchung des § 3 für den Bewegungszustand leicht folgende symbolische Ausdrücke:

$$[v_1] = a e^{-i\psi},$$

$$[L] = \frac{\varkappa R}{A(1+4\pi\vartheta)} a \sin\alpha . e^{-i\psi},\quad [N] = -\frac{\varkappa R}{A(1+4\pi\vartheta)} a \cos\alpha . e^{-i\psi},$$

$$\psi = \frac{2\pi}{T}(t - xR\cos\alpha - zR\sin\alpha + \mathrm{p}).$$

Liegt dagegen die Schwingungsrichtung in der $xz$-Ebene, so ist zu setzen

$$[u_1] = -a\sin\alpha . e^{-i\psi},\quad [w_1] = a\cos\alpha . e^{-i\psi},$$

$$[M] = \frac{\varkappa R}{A(1+4\pi\vartheta)} a e^{-i\psi},$$

* Vergl. Weber, Elektrodynamische Massbestimmungen, Abh. d. k. sächs. Gesellsch. d. Wissensch. Bd. VI, S. 593—597.

wobei $\psi$ wieder die nämliche Function ist, wie in den vorhergehenden Formeln.

Die hier angegebenen Werthe genügen den Bewegungsgleichungen für jeden Werth des Winkels $\alpha$ und sogar auch, wenn $\alpha$, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ complexe Grössen sind.

§ 6. Es müssen weiter die Bedingungen gesucht werden, welche an der Grenze von einem isotropen Nichtleiter und einem Metalle gelten. Es sind dies die Gleichungen A), B), 8) und 24) der ersten Mittheilung; nur sind diese noch etwas zu vereinfachen. Es möge dabei wieder angenommen werden, dass die Grenzfläche mit der $yz$-Ebene des Coordinatensystems zusammenfalle; ausserdem sei der Isolator das erste, der Leiter das zweite Medium, so dass die Accente bei denjenigen Grössen, welche für beide mit denselben Buchstaben bezeichnet sind, sich auf das Metall beziehen.

Es werden dann die Gleichungen A) und B)

9) $$\frac{\xi}{\varepsilon}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\varkappa u_1+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)',$$

10) $$\frac{\eta}{\varepsilon}=\varkappa v_1,\quad \frac{\zeta}{\varepsilon}=\varkappa w_1,$$

11) $$L+\frac{\partial\chi}{\partial x}=L'+\left(\frac{\partial\chi}{\partial x}\right)',$$

12) $$M=M',\quad N=N'.$$

In der Formel 8) der ersten Mittheilung ist für $u$, $v$, $w$ zu setzen $\frac{\partial\xi}{\partial t}$, $\frac{\partial\eta}{\partial t}$, $\frac{\partial\zeta}{\partial t}$, für $u'$, $v'$, $w'$ dagegen nach 5) $u_1+\varepsilon'\varkappa\frac{\partial u_1}{\partial t}$, $v_1+\varepsilon'\varkappa\frac{\partial v_1}{\partial t}$, $w_1+\varepsilon'\varkappa\frac{\partial w_1}{\partial t}$. Es folgt mithin

13) $$\frac{\partial\xi}{\partial t}-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)=u_1+\varepsilon'\varkappa\frac{\partial u_1}{\partial t}-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)'.$$

Endlich giebt 24)

14) $$\vartheta L-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\chi}{\partial x}=\vartheta' L'-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\chi}{\partial x}\right)'.$$

Es lässt sich nun aus 11) und 14) $\chi$ wegschaffen; setzen wir auch hier $(1+4\pi\vartheta'):(1+4\pi\vartheta)=1$, was nur bei den magnetischen Metallen einen erheblichen Fehler verursacht, so ergiebt sich

15) $$L=L'.$$

Wenn man 9) nach $t$ differenzirt, kann man aus dieser Gleichung mittelst 13) $\varphi$ eliminiren; man erhält dadurch

16) $$\left(1+\frac{1}{4\pi\varepsilon}\right)\frac{\partial\xi}{\partial t}=u_1+\varepsilon'\varkappa\left(1+\frac{1}{4\pi\varepsilon'}\right)\frac{\partial u_1}{\partial t},$$

welche Gleichung man statt 9) nehmen kann.

Für den Isolator können wir nun, wie früher, $\frac{1}{\varepsilon}$ gegen die Einheit vernachlässigen; man darf somit im ersten Gliede von 16) die Grösse $\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{\partial\xi}{\partial t}$ fortlassen. Ueber die Zahl $\varepsilon'$ wissen wir vorläufig Nichts; indess ist es leicht zu zeigen, dass im zweiten Gliede der Gleichung die Grösse $\frac{\varkappa}{4\pi}\frac{\partial u_1}{\partial t}$ so klein ist gegen $u_1$, dass sie vernachlässigt werden darf. Denn nach 2) lässt sich diese Grösse auch so schreiben:

$$17)\qquad \frac{1}{1+4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\varkappa'}{4\pi}\frac{\partial u_1}{\partial t},$$

und wenn man nun berücksichtigt, dass bei den Lichterscheinungen $[u_1]$ durch eine Exponentialgrösse, wie im vorhergehenden Paragraphen, dargestellt wird, findet man aus den Werthen von $\varkappa'$ und $T$ leicht, dass bei den Metallen bereits $\frac{\varkappa'}{4\pi}\frac{\partial u_1}{\partial t}$ sehr klein gegen $u_1$ ist. Um so mehr ist dies mit dem Ausdrucke 17) der Fall, da noch $\varepsilon_0$ eine sehr grosse Zahl ist.

Die Gleichung 16) gestaltet sich demnach zur folgenden um:

$$18)\qquad \frac{\partial\xi}{\partial t}=u_1+\varepsilon'\varkappa\frac{\partial u_1}{\partial t},$$

und die Bedeutung hiervon ist, dass auch an der Grenze keine Anhäufung von Elektricität entstehen kann.

Es muss dann weiter, wie auch aus 13) folgt,

$$19)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)'$$

sein.

Wir wollen nun zeigen, dass man auch hier den Grenzbedingungen genügen kann, wenn man blos Transversalschwingungen in die Rechnung aufnimmt. Da bei diesen überall $\varphi=0$ ist, haben wir nur die Gleichungen 10), 12), 15) und 18) zu berücksichtigen.

§ 7. Ist zunächst das einfallende Licht in der Einfallsebene ($xz$-Ebene) polarisirt, so kann man es vorstellen durch die Gleichungen *

$$[\eta_0]=e^{-i\psi_0},\quad [L_0]=\frac{4\pi A}{R}\sin\alpha.e^{-i\psi_0},\quad [N_0]=-\frac{4\pi A}{R}\cos\alpha.e^{-i\psi_0},$$
$$\psi_0=\frac{2\pi}{T}(t-xR\cos\alpha-zR\sin\alpha+\mathrm{p}),\qquad R=\frac{1}{\mathrm{v}}.$$

Ebenso schreiben wir für das reflectirte Licht

$$[\eta]=a\,e^{-i\psi},\quad [L]=\frac{4\pi A}{R}\sin\alpha.a\,e^{-i\psi},\quad [N]=\frac{4\pi A}{R}\cos\alpha.a\,e^{-i\psi},$$

* Vergl. die beiden ersten Mittheilungen.

$$\psi = \frac{2\pi}{T}(t + x R \cos\alpha - z R \sin\alpha + \mathfrak{p}),$$

und für die Bewegung im Metalle (§ 5)

$$[v'] = a' e^{-i\psi'}, \quad [L'] = \frac{\varkappa R'}{A(1+4\pi\vartheta')} \sin\alpha' . a' e^{-i\psi'},$$

$$[N'] = -\frac{\varkappa R'}{A(1+4\pi\vartheta')} \cos\alpha' . a' e^{-i\psi'},$$

$$\psi' = \frac{2\pi}{T}(t - x R' \cos\alpha' - z R' \sin\alpha' + \mathfrak{p}).$$

Es kann nun den Grenzbedingungen genügt werden, wenn

$$20) \qquad R \sin\alpha = R' \sin\alpha'$$

ist, welche Gleichung dem Brechungsgesetze bei nichtleitenden Medien entspricht.

Es wird dann nämlich an der Grenzfläche ($x = 0$) $\psi_0 = \psi = \psi'$ und man erhält aus der ersten der Gleichungen 10)

$$21) \qquad \frac{1+a}{\varepsilon} = \varkappa a'.$$

Der Gleichung 18), der zweiten von 10) und der ersten von 12) wird durch die angegebenen Werthe genügt. Die zweite der Formeln 12) liefert aber die Relation

$$\frac{4\pi A}{R}(1-a)\cos\alpha = \frac{\varkappa R'}{A(1+4\pi\vartheta')} a' \cos\alpha',$$

welche, wenn man sie mit $A(1+4\pi\vartheta) = A'(1+4\pi\vartheta')$ multiplicirt, folgende Gestalt annimmt:

$$R\frac{1-a}{\varepsilon}\cos\alpha = R' \varkappa a' \cos\alpha'$$

oder nach 20)

$$22) \qquad \frac{1-a}{\varepsilon}\sin\alpha' \cos\alpha = \varkappa a' \sin\alpha \cos\alpha'.$$

Schliesslich ergiebt sich aus 15)

$$\frac{4\pi A}{R}(1+a)\sin\alpha = \frac{\varkappa R'}{A(1+4\pi\vartheta')} a' \sin\alpha'$$

und dies führt nach einiger Umformung wieder auf 21) zurück. Aus 21) und 22) folgt aber

$$a = -\frac{\sin(\alpha - \alpha')}{\sin(\alpha + \alpha')}$$

und man hat demnach für das reflectirte Licht

$$A) \qquad [\eta] = -\frac{\sin(\alpha - \alpha')}{\sin(\alpha + \alpha')} e^{-i\frac{2\pi}{T}(t + x R\cos\alpha - z R \sin\alpha + \mathfrak{p})}.$$

§ 8. Ist zweitens das einfallende Licht senkrecht zur Einfallsebene polarisirt, so kann man für die einfallende, reflectirte und durchgelassene Bewegung der Reihe nach setzen

$$[\xi_0] = -\sin\alpha \,.\, e^{-i\psi_0}, \quad [\zeta_0] = \cos\alpha \,.\, e^{-i\psi_0}, \quad [M_0] = \frac{4\pi A}{R}\, e^{-i\psi_0},$$

$$[\xi] = -\sin\alpha \,.\, a\, e^{-i\psi}, \quad [\zeta] = -\cos\alpha \,.\, a\, e^{-i\psi}, \quad [M] = \frac{4\pi A}{R}\, a\, e^{-i\psi},$$

$$[u_1] = -\sin\alpha' . a' e^{-i\psi'}, \quad [w_1] = \cos\alpha' . a' e^{-i\psi'}, \quad [M'] = \frac{\varkappa R'}{A(1+4\pi\vartheta')}\, a' e^{-i\psi'},$$

wo $\psi_0$, $\psi$, $\psi'$ die nämliche Bedeutung haben, wie oben.

Um den Grenzbedingungen genügen zu können, muss man auch hier die Relation 20) und die daraus für $x = 0$ folgende Gleichheit von $\psi_0$, $\psi$, $\psi'$ annehmen.

Aus der zweiten der Gleichungen 10) erhält man dann

23) $$\frac{1-a}{\varepsilon} \cos\alpha = \varkappa a' \cos\alpha.$$

Ebenso aus der ersten von 12)

$$\frac{4\pi A}{R}(1+a) = \frac{\varkappa R'}{A(1+4\pi\vartheta')}\, a'$$

oder nach einiger Umformung

24) $$\frac{1+a}{\varepsilon} \sin\alpha' = \varkappa a' \sin\alpha.$$

Endlich giebt die Gleichung 18), wenn man sie durch $i e^{-i\psi}$ dividirt,

$$(1+a)\frac{2\pi}{T}\sin\alpha = a'\sin\alpha'\left(\varepsilon'\varkappa . \frac{2\pi}{T} + i\right).$$

Aus den Werthen von $R$ und $R'$ folgt nun aber

$$R'^2 = 4\pi\varepsilon' A^2(1+4\pi\vartheta') + i . \frac{2T}{\varkappa} . A^2(1+4\pi\vartheta')$$

$$= R^2\left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} + i\frac{T}{2\pi} . \frac{1}{\varkappa\varepsilon}\right) = R^2 \frac{T}{2\pi} . \frac{1}{\varkappa\varepsilon}\left(\varepsilon'\varkappa . \frac{2\pi}{T} + i\right)$$

und man kann demzufolge obige Gleichung auch so schreiben:

$$(1+a)\sin\alpha = a'\sin\alpha' . \frac{R'^2}{R^2}\varkappa\varepsilon,$$

was vermöge der Relation 20) mit 24) identisch ist.

Da auch alle übrigen Grenzbedingungen befriedigt sind, haben wir es nur noch mit 23) und 24) zu thun. Man findet daraus

$$a = \frac{tg(\alpha-\alpha')}{tg(\alpha+\alpha')}$$

und man hat folglich für die totale dielektrische Polarisation im reflectirten Lichte

B) $$[\varrho] = \frac{tg(\alpha-\alpha')}{tg(\alpha+\alpha')}\, e^{-i\frac{2\pi}{T}(t + xR\cos\alpha - zR\sin\alpha + p)}.$$

§ 9. Die symbolischen Ausdrücke A) und B) haben genau die gleiche Form wie diejenigen, welche für das an isolirenden Körpern reflectirte Licht gelten. Sobald man aber, um die wirkliche Bewegung zu erhalten, nur den reellen Theil nimmt, hört die Uebereinstimmung auf; denn bei den Metallen wird $R'$, mithin auch $\alpha'$ complex, während diese Grösse bei Nichtleitern reell ist.

Um nun für die Metallreflexion den reellen Theil von A) und B) zu bestimmen, lässt sich eine Rechnung anwenden, welche Eisenlohr* bei der Ableitung der von Cauchy für die Metallreflexion angegebenen Gleichungen benützt hat. Eisenlohr erhält nämlich diese Gleichungen, indem er in den Formeln, welche für isolirende Körper gelten, für den Brechungsexponenten eine complexe Grösse $\vartheta e^{i\varepsilon}$ setzt. Nun ist aber nach der Gleichung 20) in der That das Verhältniss $\sin\alpha : \sin\alpha'$ eine constante, aber complexe Grösse. Setzen wir dieselbe $= \sigma e^{i\tau}$, so werden die Constanten $\sigma$ und $\tau$ mit den von Eisenlohr eingeführten Grössen $\vartheta$ und $\varepsilon$ übereinstimmen.

Wir haben also

$$\sin\alpha' = \frac{\sin\alpha}{\sigma} e^{-i\tau}$$

und demzufolge

$$\cos\alpha' = \sqrt{1 - \frac{\sin^2\alpha}{\sigma^2} e^{-2i\tau}} = v e^{i\omega},$$

wobei $v$ und $\omega$ leicht aus $\alpha$, $\sigma$ und $\tau$ zu berechnen sind.

Durch Substitution der Werthe von $\sin\alpha'$ und $\cos\alpha'$ wird nun

$$-\frac{\sin(\alpha-\alpha')}{\sin(\alpha+\alpha')} = b + b'i, \quad \frac{tg(\alpha-\alpha')}{tg(\alpha+\alpha')} = c + c'i,$$

wenn

$$b = \frac{1-m^2}{1+2m\cos(\tau+\omega)+m^2}, \quad b' = -\frac{2m\sin(\tau+\omega)}{1+2m\cos(\tau+\omega)+m^2}, \quad m = \frac{\sigma v}{\cos\alpha},$$

$$c = -\frac{1-m'^2}{1+2m'\cos(\tau-\omega)+m'^2}, \quad c' = \frac{2m'\sin(\tau-\omega)}{1+2m'\cos(\tau-\omega)+m'^2}, \quad m' = \frac{\sigma\cos\alpha}{v}$$

ist.

Bringt man diese Werthe in A) und B) über, so ergiebt sich für den reellen Theil dieser Ausdrücke

$$\eta = \sqrt{b^2+b'^2}\cos(\psi - d_p), \quad \varrho = \sqrt{c^2+c'^2}\cos(\psi - d_s),$$

wenn

$$d_p = arctg\,\frac{b'}{b}, \quad d_s = arctg\,\frac{c'}{c}$$

gesetzt wird.

Eine leichte Rechnung ergiebt dann für die Intensität des reflectirten Lichtes, wenn das einfallende Licht in oder senkrecht zu der Einfallsebene polarisirt ist,

25) $$J_p = b^2 + b'^2 = tg(f - \tfrac{1}{4}\pi), \quad J_s = c^2 + c'^2 = tg(g - \tfrac{1}{4}\pi),$$

26) $$cotf = \cos(\tau+\omega)\sin(2\,arccotm), \quad cotg = \cos(\tau-\omega)\sin(2\,arctgm'),$$

während man zur Bestimmung der Phase folgende Gleichungen hat:

27) $$tg\,d_p = \sin(\tau+\omega)\,tg(2\,arccotm), \quad tg\,d_s = \sin(\tau-\omega)\,tg(2\,arctg\,m').$$

---

* Pogg. Ann. 104, S. 368.

§ 10. Da die Grössen $d_p$ und $d_s$ verschiedene Werthe haben, wird bei einer beliebigen linearen Polarisation des einfallenden Lichtes das reflectirte Licht elliptisch polarisirt sein. Mittelst des Babinet'schen Compensators ist man dann im Stande, das Amplitudenverhältniss $k=\sqrt{\frac{J_s}{J_p}}$ und den Phasenunterschied $d_s - d_p$ zu bestimmen. Da man vorzugsweise diese Grössen gemessen hat, wollen wir noch die theoretischen Werthe derselben angeben. Setzt man $(b+b'i):(c+c'i)=q+q'i$, so findet man leicht $k=\sqrt{q^2+q'^2}$ und $tg(d_s-d_p)=\frac{q'}{q}$. Andererseits folgt aus den ursprünglichen Werthen von $b+b'i$ und $c+c'i$

$$q+q'i=-\frac{cos(\alpha+\alpha')}{cos(\alpha-\alpha')},$$

und zur Bestimmung von $q$ und $q'$ hat man hierin die Werthe von $sin\alpha'$ und $cos\alpha'$ zu substituiren. Nach einiger Rechnung findet man dann schliesslich, wenn $k=tgh$ gesetzt wird,

28) $$cos\,2h=cos(\tau+\omega)\,sin\left\{2\,arctg\left(\frac{sin^2\alpha}{\sigma v\,cos\,\alpha}\right)\right\},$$

29) $$tg(d_s-d_p)=sin(\tau+\omega)\;tg\left\{2\,arctg\left(\frac{sin^2\alpha}{\sigma v\,cos\,\alpha}\right)\right\}.$$

Dies sind aber die Formeln, welche Cauchy für die Metallreflexion angegeben hat und deren Richtigkeit Jamin und Quincke geprüft haben. Es hat sich dabei herausgestellt, dass diese Gleichungen in genügender Weise mit den Versuchen übereinstimmen, wenn man nur den Constanten $\sigma$ und $\tau$ passende Werthe beilegt. Diese Werthe wollen wir nun einer näheren Betrachtung unterziehen.

Für einen bestimmten Einfallswinkel $A$ (Haupteinfallswinkel) wird der Phasenunterschied $d_s-d_p=\frac{1}{2}\pi$ (eine viertel Wellenlänge) und man hat den Werth $H$, den $h$ oder $arctg\,k$ für diesen Fall annimmt, das Hauptazimuth genannt. Aus den Grössen $A$ und $H$ lassen sich nun, wie z. B. Eisenlohr (a. a. O.) zeigt, $\sigma$ und $\tau$ (bei ihm $\vartheta$ und $\varepsilon$) berechnen. So gelten z. B. für die Reflexion auf Silber in Luft folgende Werthe, welche aus den Messungen von Jamin abgeleitet sind:

| Linie des Spectrums. | *D.* | *E.* | *F.* | *H.* |
|---|---|---|---|---|
| $A$ | 72° 30′ | 71° 30′ | 69° 34′ | 66° 12′ |
| $H$ | 40 9 | 40 19 | 39 46 | 39 50 |
| $\tau$ | 79 15 | 79 29 | 77 54 | 77 16 |
| $log\,\sigma$ | 0,4595 | 0,4283 | 0,3703 | 0,2740 |

§ 11. Um nun diese Resultate mit unserer Theorie zu vergleichen, bemerken wir, dass einerseits nach 20) $\frac{R'^2}{R^2} = \sigma^2 e^{2i\tau}$, andererseits

$$\frac{R'^2}{R^2} = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} + i\frac{T}{2\pi}\cdot\frac{1}{\varkappa\varepsilon} \tag{30}$$

ist. Es muss also

$$\sigma^2 \cos 2\tau = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \text{ und } \sigma^2 \sin 2\tau = \frac{T}{2\pi}\cdot\frac{1}{\varkappa\varepsilon}$$

sein. Aus der ersten dieser Gleichungen erhellt nun aber, dass die hier entwickelte Theorie in ihrer jetzigen Gestalt nicht mit den Beobachtungen im Einklange steht. Da nämlich die Annahme eines negativen Werthes von $\varepsilon'$ als ganz unzulässig erscheint, müsste nach der Theorie jedenfalls $\cos 2\tau$ positiv sein. Nun ist aber oft, wie z. B. in der angeführten Tabelle, $\tau > 45^0$, mithin $\cos 2\tau$ negativ.

Es ist nun beachtenswerth, dass auch hier, wie bei der Untersuchung des § 4, die Uebereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung herbeigeführt werden kann, wenn man die damals erörterte Abweichung vom Ohm'schen Gesetze in Betracht zieht.

Es behalten dann alle Gleichungen, welche im Anfange der ersten Mittheilung entwickelt wurden, ihre Giltigkeit und man hat nur in der gegenwärtigen Mittheilung an die Stelle von 1) die Gleichungen 8) zu setzen. Da nun auch diese linear sind, ist dann noch immer, wie früher, die Anwendung symbolischer Ausdrücke gerechtfertigt. Bei schwingenden Bewegungen haben wir nun für die Stromcomponenten Gleichungen von der Form

$$[u_1] = a e^{-i\frac{2\pi}{T}(t-D)}, \quad [v_1] = b e^{-i\frac{2\pi}{T}(t-D)}, \quad [w_1] = c e^{-i\frac{2\pi}{T}(t-D)},$$

wo $D$ von $t$ unabhängig ist. Es folgt dann aus 8)

$$[X] = \left(\varkappa - ig\frac{2\pi}{T}\right)[u_1], \quad Y = \left(\varkappa - ig\frac{2\pi}{T}\right)[v_1], \quad Z = \left(\varkappa - ig\frac{2\pi}{T}\right)[w_1],$$

und diese Formeln unterscheiden sich von den früher angewandten nur dadurch, dass an die Stelle von $\varkappa$ die Grösse $\varkappa - ig\frac{2\pi}{T}$ getreten ist. Wir haben demnach in unseren Formeln nur diese Verwechselung vorzunehmen, um symbolische Ausdrücke zu erhalten, welche den modificirten Bewegungsgleichungen genügen. Gleiches gilt dann auch von den reellen Theilen dieser Ausdrücke.

In den Untersuchungen der vorhergehenden Paragraphen ändert sich also nur der Werth von $\frac{R'^2}{R^2}$. Statt 30) ist nämlich zu setzen

$$\frac{R'^2}{R^2} = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} + i\cdot\frac{T}{2\pi}\cdot\frac{1}{\left(\varkappa - ig\frac{2\pi}{T}\right)\varepsilon}$$

oder, wenn man zur Abkürzung $\frac{2\pi g}{\varkappa T} = s$ setzt,

$$\frac{R'^2}{R^2} = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} + i \cdot \frac{T}{2\pi\varkappa\varepsilon} \cdot \frac{1}{1-is}.$$

Soll nun dies $= \sigma^2 e^{2i\tau}$ sein, so muss man haben

$$31) \quad \sigma^2 \cos 2\tau = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} - \frac{T}{2\pi\varkappa\varepsilon} \cdot \frac{s}{1+s^2}, \quad \sigma^2 \sin 2\tau = \frac{T}{2\pi\varkappa\varepsilon} \cdot \frac{1}{1+s^2}$$

und es kann nun wirklich $\cos 2\tau$ negativ werden.

Für die Reflexion in Luft haben wir $\varepsilon = \varepsilon_0$. Setzen wir dann $\frac{\varepsilon'}{\varepsilon_0} = K$ und beachten wir die Gleichung 2), für welche, da $\varepsilon_0$ sehr gross ist, gesetzt werden darf $\varkappa \varepsilon_0 = \frac{\varkappa'}{4\pi}$, so werden die Gleichungen 31)

$$32) \quad \sigma^2 \cos 2\tau = K - \frac{2T}{\varkappa'} \cdot \frac{s}{1+s^2}, \quad \sigma^2 \sin 2\tau = \frac{2T}{\varkappa'} \cdot \frac{1}{1+s^2}.$$

Hierbei ist noch zu bemerken, dass in dem elektrostatischen Masssystem $\varkappa'$ in gleicher Weise von der Wahl der Einheiten abhängig ist, wie eine Zeit, so dass $\frac{2T}{\varkappa'}$ eine reine Verhältnisszahl ist, welche von dieser Wahl völlig unabhängig ist.

Für Silber kann man ohne grossen Fehler annehmen

$$\varkappa' = \frac{1}{5 \cdot 10^{17}} \text{ Secunde,}$$

und aus den im vorhergehenden Paragraphen für $\sigma$ und $\tau$ angeführten Werthen lassen sich dann mittelst der Gleichungen 32) $s$ und $K$ berechnen. Legt man dabei die Angaben für die Linie $D$ des Spectrums zu Grunde, so findet man nahezu $s = 25$, $K = 67$. In gleicher Weise ergiebt sich aus den für die Linie $H$ gegebenen Zahlen $s = 29$, $K = 42$.

Diese Rechnungen stimmen insofern überein, dass sie beide zu einer sehr grossen Polarisationsfähigkeit der Silbermolecüle und ausserdem für rasch oscillirende Ströme, wie die Lichtschwingungen, zu erheblichen Abweichungen vom Ohm'schen Gesetze führen.

So befremdend dieses Resultat auf den ersten Anblick erscheinen mag, glaube ich doch nicht, dass es mit irgend einer bekannten Thatsache in Widerspruch tritt. Denn einerseits wird man bei den Versuchen über stationäre Ströme, welche man am genauesten ausgeführt hat, nicht leicht Etwas von der Polarisation der Metalltheilchen bemerken. Was andererseits die Abweichung vom Ohm'schen Gesetze betrifft, ist es leicht aus den oben für $s$ erhaltenen Werthen abzuleiten, dass bei veränderlichen Strömen, welche langsam genug verlaufen, um als solche beobachtet werden zu können, diese Abweichung geradezu unmerklich sein muss.

Dass dennoch die für $s$ und $K$ angegebenen Werthe keinen Anspruch auf Genauigkeit haben können, geht aus der Vergleichung der für die beiden Spectrallinien gefundenen Wertbe hervor. Denn erstens müssten nach der Theorie die beiden Werthe von $K$ einander gleich sein; zweitens müssten die für $s$ gefundenen Zahlen sich umgekehrt verhalten wie die Schwingungsdauer, und diese Proportion ergiebt, wenn man für die $D$-Linie $s = 25$ setzt, für die $H$-Linie $s = 38$, während wir oben für letztere $s = 29$ erhielten.

Es kann also die Theorie gewiss nicht als endgiltig festgesetzt betrachtet werden. Wir haben denn auch die Abweichung vom Ohm'schen Gesetze nur besprochen, da aus ihr möglicherweise die Abweichungen, welche wir zwischen der Theorie und der Erfahrung finden, entspringen können. Sehr gut ist es möglich, dass man bei weiterer Untersuchung andere Ursachen für dieselben kennen lernen wird. Jedenfalls wird aber gerade die weitere Erforschung der optischen Eigenschaften der Metalle von Wichtigkeit sein für das bessere Verständniss der elektrischen Erscheinungen.