1 Elektrostatica en magnetostatica

wet van Gauss

$$\text{div}\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho \Leftrightarrow \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0}\int_{V_S} \rho\, dV$$

wet van Ampère

$$\text{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j} \Leftrightarrow \oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_{S_C} \vec{j}\cdot d\vec{S}$$

1.1 Ladingsverdelingen met hoge symmetrie

1.1.1 Spiegelsymmetrie

$\rho = \rho(|z|) \Rightarrow \vec{E} = \hat{z}E(|z|)\,\text{sign}(z)$

$$\text{Gauss} \Rightarrow \vec{E} = \hat{z}\frac{1}{\epsilon_0}\int_0^z \rho(|z'|)dz'$$

1.1.2 Bolsymmetrie

$\rho = \rho(r) \Rightarrow \vec{E} = \hat{r}E(r)$

$$\text{Gauss} \Rightarrow \vec{E} = \hat{r}\frac{1}{\epsilon_0 r^2}\int_0^r \rho(r')r'^2 dr'$$

1.1.3 Cylindersymmetrie

$\rho = \rho(R) \Rightarrow \vec{E} = \hat{R}E(R)$

$$\text{Gauss} \Rightarrow \vec{E} = \hat{R}\frac{1}{\epsilon_0 R}\int_0^R \rho(R')R'dR'$$

1.2 Stroomverdelingen met hoge symmetrie

1.2.1 Spiegelsymmetrie

$\vec{j} = \hat{y}j(|x|) \Rightarrow \vec{B} = \hat{z}B(|x|)\,\text{sign}(x)$

$$\text{Ampère} \Rightarrow \vec{B} = -\hat{z}\mu_0\int_0^x j(|x'|)dx'$$

1.2.2 Cylindersymmetrie (spoel)

$\vec{j} = \hat{\phi} j(R) \Rightarrow \vec{B} = \hat{z} B(R)$

$$\text{Ampère} \Rightarrow \vec{B} = \hat{z}\mu_0 \int_R^\infty j(R')dR'$$

1.2.3 Cylindersymmetrie (draad)

$\vec{j} = \hat{z} j(R) \Rightarrow \vec{B} = \hat{\phi} B(R)$

$$\text{Ampère} \Rightarrow \vec{B} = \hat{\phi}\mu_0 \frac{1}{R} \int_0^R j(R')R'dR'$$

2 Elektrodynamica

2.1 Geleidende plaat

- $\vec{j} = \hat{z} j_0$ voor $|x| < W/2$; $j = 0$ voor $|x| > W/2$; op $t = 0$ wordt de stroom plotseling aangezet. Vraag: *Bereken het magnetische veld.*

- uit symmetrie: $\vec{B} = \hat{y} B(x, t)$; voor $t \to \infty$ geeft de magnetostatica de tijdsonafhankelijke oplossing

  $$B_\infty(x) = \mu_0 j_0 \tfrac{1}{2} W \,\mathrm{sign}(x) \quad \text{voor } |x| > W/2$$

  Hoe bouwt dit magnetische veld zich op in de tijd?

- golfvergelijking in vacuüm:

  $$\frac{\partial^2}{\partial x^2} B = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} B, \quad |x| > W/2$$

  algemene oplossing: $B(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$, met $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ de lichtsnelheid

- benadering: stel $B(\pm W/2, t) = \pm\mu_0 j_0 \frac{1}{2} W \theta(t)$, waarbij de stapfunctie $\theta(t)$ abrupt van 0 naar 1 springt bij $t = 0$ (verwaarloos dus het opbouwen van het veld binnenin de plaat)

- rechts van de plaat ($x > W/2$) is er alleen een golf die naar rechts beweegt, dus $g = 0$; de functie f vinden we uit de randvoorwaarde op $x = W/2$,

$$\begin{aligned} B(x,t) &= f(x-ct) = f(W/2 - c[t + \tfrac{1}{2}W/c - x/c]) \\ &= \mu_0 j_0 \tfrac{1}{2} W \theta(t + \tfrac{1}{2}W/c - x/c) \approx \mu_0 j_0 \tfrac{1}{2} W \theta(t - x/c) \end{aligned}$$

- links van de plaat vinden we $B(x,t) = -\mu_0 j_0 \frac{1}{2} W \theta(t + x/c)$

2.2 Condensator

- een cirkelvormige condensator wordt met wisselspanning opgeladen; Vraag: *Bereken het elektrische en magnetische veld.* Cylindersymmetrie: $\vec{E} = \hat{z} E(R,t)$, $\vec{B} = \hat{\phi} B(R,t)$.

- tussen de platen is vacuüm, dus we mogen de golfvergelijking toepassen; in cylindersymmetrie luidt die voor het elektrische veld:

$$\frac{\partial^2}{\partial R^2} E + \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R} E = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} E$$

  het bijbehorende magnetische veld vinden we uit $\partial E/\partial R = \partial B/\partial t$

- als de wisselspanning frequentie ω heeft, zullen E en B ook met die frequentie oscilleren; zoek een oplossing van de vorm

$$E(R,t) = \mathrm{Re}\{E'(R) e^{i\omega t}\}, \quad B(R,t) = \mathrm{Re}\{B'(R) e^{i\omega t}\}$$

- de golfvergelijking voor de complexe functie E' wordt

$$\frac{d^2}{dR^2} E' + \frac{1}{R}\frac{d}{dR} E' + (\omega/c)^2 E' = 0$$

  de complexe functie B' volgt dan uit $dE'/dR = i\omega B'$

- de oplossing is een Besselfunctie:

$$E'(R) = a J_0(\omega R/c), \quad B'(R) = (ia/c) J_1(\omega R/c)$$

  we hebben gebruikt dat de Besselfuncties J_1 en J_0 aan elkaar gerelateerd zijn door $J_1(x) = -(d/dx) J_0(x)$; de variabele a is een complexe constante

- schrijft $a = \alpha e^{i\delta}$, met α en δ reëel; dan volgen de elektrische en magnetische velden

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \hat{z}\alpha J_0(\omega R/c)\cos(\omega t + \delta)\\ \vec{B} &= \hat{\phi}(\alpha/c)J_1(\omega R/c)\cos(\omega t + \delta + \pi/2)\end{aligned}$$

het E en B veld variëren 90 graden uit fase in de tijd

3 Geleiders

3.1 Perfekte geleider

- een perfekte geleider vult de halfruimte $x > 0$; langs het grensvlak $x = 0$ wordt op $t = 0$ een uniform magneetveld $\hat{z}B_0$ aangelegd; *Bereken de stationaire veldverdeling in de geleider.* De perfekte geleider (elektronendichtheid n) voldoet aan $d\vec{j}/dt = \alpha\vec{E}$, met $\alpha = e^2 n/m$.

- magnetostatica: $\vec{B} = \hat{z}B(x)$, $B(0) = B_0$, $\vec{j} = \hat{y}j(x)$; uit $d\vec{j}/dt = 0$ volgt $\vec{E} = 0 \Rightarrow \rho = 0$. De wet van Ampère luidt

$$\text{rot}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j} \Rightarrow \frac{d}{dx}B(x) = -\mu_0 j(x)$$

Omdat we maar 1 vergelijking hebben voor 2 onbekenden kunnen we dit probleem niet oplossen. We moeten de voorgeschiedenis in rekening brengen.

- Aanloopproces: $\vec{E} = \hat{y}E(x,t) = \alpha^{-1}\partial\vec{j}/\partial t \neq 0$. Combineer deze materiaalvergelijking met de tweede Maxwellvergelijking

$$\begin{aligned}&\text{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}E = -\frac{\partial}{\partial t}B\\ &\Rightarrow \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}j = -\frac{\partial}{\partial t}B\end{aligned}$$

Het resultaat is een tweede vergelijking tussen j en B,

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial x}j = -B$$

- Samen met de wet van Ampère levert dit op

$$\left.\begin{array}{l}\partial j/\partial x = -\alpha B \\ \partial B/\partial x = -\mu_0 j\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2}B = \mu_0 \alpha B$$

- algemene oplossing

$$B(x) = C_1 e^{-x/\lambda} + C_2 e^{x/\lambda}, \quad \lambda = 1/\sqrt{\mu_0 \alpha}$$

randvoorwaarden: $C_1 = B_0$, $C_2 = 0 \Rightarrow B(x) = B_0 e^{-x/\lambda}$; de bijbehorende stroomverdeling is

$$j(x) = -\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial}{\partial x}B = \frac{B_0}{\mu_0 \lambda}e^{-x/\lambda}$$

3.2 Niet-perfekte (Ohmse) geleider

- de materiaalvergelijking is nu $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ met σ het geleidingsvermogen; we veronderstellen dat het aangelegde magneetveld met frequentie ω oscilleert: $\vec{B} = \hat{z} B_0 \sin \omega t$ voor $x = 0$.
- combinatie van de Maxwellvergelijkingen met de materiaalvergelijking levert op

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}E &= -\frac{\partial}{\partial t}B \\ -\frac{\partial}{\partial x}B &= \mu_0 j + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}E = \mu_0 \sigma E + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}E\end{aligned}$$

- oplossen in complexe notatie:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}E' &= -i\omega B' \\ -\frac{d}{dx}B' &= \mu_0 \sigma E' + \epsilon_0 \mu_0 i\omega E' \approx \mu_0 \sigma E'\end{aligned}$$

- combinatie van deze twee vergelijkingen levert op

$$\frac{d^2}{dx^2}E' = i\omega \mu_0 \sigma E'$$
$$\frac{d^2}{dx^2}B' = i\omega \mu_0 \sigma B'$$

randvoorwaarde $B'(0) = -iB_0$; oplossing $B'(x) = -iB_0 \exp(-x\sqrt{i\omega\mu_0\sigma})$

- terug naar de reëele velden,

$$\begin{aligned} B(x,t) &= \text{Re}\{-iB_0 e^{i\omega t} e^{-x\sqrt{i\omega\mu_0\sigma}}\} \\ &= B_0 e^{-x/\delta}\sin(\omega t - x/\delta), \quad \delta = (\mu_0\sigma\omega/2)^{-1/2} \end{aligned}$$

het bijbehorende elektrische veld volgt uit

$$E' = -\frac{1}{\mu_0\sigma}\frac{d}{dx}B'$$
$$\Rightarrow E = \frac{\omega\delta}{\sqrt{2}}B_0 e^{-x/\delta}\sin(\omega t - x/\delta + \pi/4)$$

het elektrische veld loopt dus 45 graden in fase achter bij het magnetische veld

4 Wet van Biot en Savart

- uitgangspunt is de algemene oplossing van de Poissonvergelijking voor de (tijdsonafhankelijke) vectorpotentiaal $\vec{A}$ in de ijk div$\vec{A} = 0$,

$$\vec{A}(\vec{r}) = \int d\vec{r}'\, \frac{\mu_0\vec{j}(\vec{r}')}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

- bereken het magnetische veld uit $\vec{B} = \text{rot}\,\vec{A}$,

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &= -\int d\vec{r}'\, \frac{\mu_0\vec{j}(\vec{r}')}{4\pi} \times \frac{\partial}{\partial\vec{r}}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \\ &= \int d\vec{r}'\, \frac{\mu_0\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \end{aligned}$$

Hier hebben we gebruik gemaakt van de formule

$$\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\frac{1}{|\vec{r}|} = -\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

en substitutie van $\vec{r} \to \vec{r} - \vec{r}'$

- nu maken we de benadering van een *dunne draad*: $d\vec{r}' = Sd\ell$, $\vec{j}S = I\hat{u}_t$, $\hat{u}_r = (\vec{r}-\vec{r}')/|\vec{r}-\vec{r}'|$, $r_\ell = |\vec{r}-\vec{r}'|$

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int d\ell\, \frac{\hat{u}_t \times \hat{u}_r}{r_\ell^2}$$

5 Magnetische dipool

- De vektorpotentiaal in dipoolbenadering is gegeven door

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r^3}\int(\vec{r}\cdot\vec{r}')\vec{j}(\vec{r}')d\vec{r}'$$

  We willen dit herschrijven in dezelfde vorm als de elektrische dipool:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r^3}\vec{\mu}\times\vec{r}$$

- Allereerst gebruiken we div $\vec{j} = 0$ om te substitueren $\vec{j} = \mathrm{rot}\,\vec{\omega}$:

$$\begin{aligned}
\frac{4\pi}{\mu_0}r^3\vec{A} &= \int(\vec{r}\cdot\vec{r}')\frac{\partial}{\partial\vec{r}'}\times\vec{\omega}(\vec{r}')d\vec{r}' \\
&= -\int\left(\frac{\partial}{\partial\vec{r}'}(\vec{r}\cdot\vec{r}')\right)\times\vec{\omega}(\vec{r}')d\vec{r}' \\
&= -\int\vec{r}\times\vec{\omega}(\vec{r}')d\vec{r}' \\
&= -\vec{r}\times\vec{\mu} = \vec{\mu}\times\vec{r},
\end{aligned}$$

  waarbij $\vec{\mu} = \int\vec{\omega}(\vec{r})d\vec{r}$.

- Bewering: $\vec{\mu} = \frac{1}{2}\int\vec{r}\times\vec{j}(\vec{r})d\vec{r}$. We bewijzen het in omgekeerde richting:

$$\begin{aligned}
\vec{\mu} &\equiv \frac{1}{2}\int\vec{r}\times\vec{j}(\vec{r})d\vec{r} \\
&= \frac{1}{2}\int\vec{r}\times\left(\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\times\vec{\omega}(\vec{r})\right)d\vec{r} \\
&= \frac{1}{2}\int\left(\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\vec{\omega}(\vec{r})\right)\cdot\vec{r}d\vec{r} - \frac{1}{2}\int\vec{r}\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\vec{\omega}(\vec{r})d\vec{r} \\
&= -\frac{1}{2}\int\left(\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\vec{r}\right)\cdot\vec{\omega}(\vec{r})d\vec{r} + \frac{1}{2}\int\left(\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\cdot\vec{r}\right)\vec{\omega}(\vec{r})d\vec{r} \\
&= -\frac{1}{2}\int\vec{\omega}(\vec{r})d\vec{r} + \frac{3}{2}\int\vec{\omega}(\vec{r})d\vec{r} \\
&= \int\vec{\omega}(\vec{r})d\vec{r}.
\end{aligned}$$

  Q.E.D.

6 Inhomogene golfvergelijking

- We zoeken de algemene oplossing van de inhomogene golfvergelijking
$$\frac{\partial^2}{\partial \vec{r}^2}\Phi(\vec{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi(\vec{r},t) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\vec{r},t)$$
Bewering: deze oplossing is te vinden uit de algemene oplossing van de Poisson vergelijking door de geretardeerde tijd $t_R = t - |\vec{r}-\vec{r}'|/c$ te introduceren:
$$\Phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}',t_R)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,d\vec{r}'$$

- We zullen dit bewijzen door substitutie. Bereken eerst grad Φ, gebruikend van $\partial t_R/\partial \vec{r} = -c^{-1}(\vec{r}-\vec{r}')/|\vec{r}-\vec{r}'|$. Dat levert op
$$\begin{aligned}4\pi\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\Phi(\vec{r},t) &= \int d\vec{r}'\left[\rho(\vec{r}',t_R)\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right.\\ &\qquad\left.-\frac{1}{c}\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}\frac{\partial}{\partial t_R}\rho(\vec{r}',t_R)\right]\end{aligned}$$

- Nu nemen we nog een gradiënt en vinden zo de Laplaciaan van Φ.
$$\begin{aligned}4\pi\varepsilon_0\frac{\partial^2}{\partial \vec{r}^2}\Phi(\vec{r},t) &= \int d\vec{r}'\left[\rho(\vec{r}',t_R)\Delta\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right.\\ &\qquad -\frac{\partial}{\partial t_R}\rho(\vec{r}',t_R)\frac{1}{c}\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\cdot\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\\ &\qquad -\frac{\partial}{\partial t_R}\rho(\vec{r}',t_R)\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\cdot\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}\\ &\qquad\left.+\frac{1}{c^2}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\frac{\partial^2}{\partial t_R^2}\rho(\vec{r}',t_R)\right].\end{aligned}$$

- Dit vereenvoudigen we door gebruik te maken van de formules
$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}$$
$$\Delta \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}')$$

Merk op dat $\partial/\partial t_R = \partial/\partial t$ en $\delta(\vec{r}-\vec{r}')\rho(\vec{r}', t_R) = \delta(\vec{r}-\vec{r}')\rho(\vec{r}, t)$. Je vindt dan

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial \vec{r}^2}\Phi(\vec{r},t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d\vec{r}' \Big[-4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}')\rho(\vec{r}',t_R) \\
&\quad + \frac{1}{c^2}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\frac{\partial^2}{\partial t_R^2}\rho(\vec{r}',t_R)\Big] \\
&= -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\vec{r},t) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi(\vec{r},t).
\end{aligned}$$

Q.E.D.

7 Bewegende puntlading

7.1 Dipool van Hertz

- Ga uit van de Liénard-Wiechert potentialen

$$\begin{aligned}
\Phi(\vec{r},t) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\left.\frac{1}{|\vec{r}-\delta\vec{r}| - c^{-1}\vec{v}\cdot(\vec{r}-\delta\vec{r})}\right|_{t_R} - \frac{1}{r}\right) \\
c\vec{A}(\vec{r},t) &= \frac{\vec{v}(t_R)}{c}\Phi(\vec{r},t)
\end{aligned}$$

- Benaderingen tot op eerste orde in de kleine parameters $\delta r/r$ en v/c:

$$\frac{1}{r}|\vec{r}-\delta\vec{r}| = 1 - \frac{\delta r}{r}\cos\theta + \mathcal{O}\left(\frac{\delta r}{r}\right)^2,$$
$$\frac{1}{r}\frac{1}{c}\vec{v}\cdot(\vec{r}-\delta\vec{r}) = \frac{v}{c}\cos\theta + \mathcal{O}\left(\frac{v}{c}\frac{\delta r}{r}\right)$$
$$\frac{v}{r}(t-t_R) = \frac{1}{c}\frac{v}{r}|\vec{r}-\delta\vec{r}(t_R)| = \frac{v}{c} + \mathcal{O}\left(\frac{\delta r}{r}\frac{v}{c}\right)$$

- Substitutie in de potentiaal

$$
\begin{aligned}
\frac{4\pi\varepsilon_0}{q}\Phi(\vec{r},t) &= \left.\frac{1}{r-\delta r\cos\theta - r(v/c)\cos\theta}\right|_{t-r/c} - \frac{1}{r} \\
&= \frac{1}{r}\left(\frac{\delta r}{r}\cos\theta + \frac{v}{c}\cos\theta\right)_{t-r/c} \\
&= \frac{1}{r^3}\left(\vec{p}\cdot\vec{r} + \frac{r}{c}\dot{\vec{p}}\cdot\vec{r}\right)_{t-r/c}
\end{aligned}
$$

- Nu hetzelfde voor de vectorpotentiaal

$$
\begin{aligned}
c\vec{A}(\vec{r},t) &= \left(\frac{\vec{v}}{c}\right)_{t-r/c}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{[r-\delta r\cos\theta - r(v/c)\cos\theta]_{t-r/c}} \\
&= \frac{1}{c}\vec{v}(t-r/c)\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}
\end{aligned}
$$

oftewel $\vec{A} = (\mu_0/4\pi)r^{-1}\dot{\vec{p}}(t-r/c)$.

7.2 Elektromagnetische straling

- Bereken de elektrische en magnetische velden uit de dipoolpotentialen. Voor straling neem je alleen de termen mee die afvallen als $1/r$. Eerst het magnetische veld.

$$
\begin{aligned}
\vec{B}(\vec{r},t) &\approx \frac{\mu_0}{4\pi r}\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\times\dot{\vec{p}}(t-r/c) \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi r}\left(\frac{\partial}{\partial\vec{r}}(t-r/c)\right)\times\ddot{\vec{p}}(t-r/c) \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi r}\frac{1}{c}\hat{r}\times\ddot{\vec{p}}(t-r/c)
\end{aligned}
$$

- Nu het elektrische veld.

$$
\begin{aligned}
\vec{E}(\vec{r},t) &= -\nabla\Phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \\
&\approx -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\dot{\vec{p}}(t-r/c)\right)\cdot\hat{r} - \frac{\mu_0}{4\pi r}\ddot{\vec{p}}(t-r/c) \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\frac{1}{c^2}\hat{r}\ddot{\vec{p}}(t-r/c)\cdot\hat{r} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\frac{1}{c^2}\ddot{\vec{p}}(t-r/c) \\
&= c\vec{B}\times\hat{r}
\end{aligned}
$$

8 Stelling van Poynting

- De door de elektromagnetische krachten verrichtte arbeid per tijdseenheid en per volume-eenheid is $\vec{E} \cdot \vec{j}$. We willen dit uitdrukken in termen van de elektrische en magnetische velden (zonder lading of stroom):
$$\vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \vec{B}) \cdot \vec{E} - \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$
- Vereenvoudig dit gebruik makend van
$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{B})$$
Het resultaat is de stelling van Poynting:
$$\begin{aligned} \vec{j} \cdot \vec{E} &= -\frac{1}{\mu_0}\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) + \frac{1}{\mu_0}\vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{\partial |\vec{E}|^2}{\partial t} \\ &= -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0}{2}|\vec{E}|^2 + \frac{1}{2\mu_0}|\vec{B}|^2\right) - \frac{1}{\mu_0}\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) \\ &= -\frac{\partial}{\partial t}(u_E + u_B) - \nabla \cdot \vec{j}_u \end{aligned}$$

9 Golfpijp

- Differentiaalvergelijking en randvoorwaarde voor TE golf $\vec{E} = \hat{y}\mathrm{Re}\, E'(z)e^{i(kx-\omega t)}$ in rechthoekige golfpijp
$$\frac{d^2}{dz^2}E'(z) = (k^2 - \omega^2/c^2)E'(z), \quad E'(0) = 0 = E'(b).$$
- Oplossing: $E'(z) = C\sin(n\pi z/b)$, met mode-index $n = 1, 2, 3, \ldots$ en dispersierelatie $k^2 + (n\pi/b)^2 = (\omega/c)^2$. Dit is een lopende golf als $n < \omega b/\pi c$. De afkapfrequentie is $\omega_c = c\pi/b$. Het elektrische en magnetische veld is
$$\begin{aligned} \vec{E} &= \hat{y}C\sin\left(\frac{n\pi z}{b}\right)\cos(\omega t - kx) \\ \vec{B} &= \hat{x}\frac{n\pi}{\omega b}C\cos\left(\frac{n\pi z}{b}\right)\sin(\omega t - kx) \\ &\quad + \hat{z}\frac{k}{\omega}C\sin\left(\frac{n\pi z}{b}\right)\cos(\omega t - kx) \end{aligned}$$

- Fasesnelheid $v_{\text{fase}} = \omega/k = c[1-(n\pi c/\omega b)^2]^{-1/2}$, groepsnelheid $v_{\text{groep}} = d\omega/dk = c[1-(n\pi c/\omega b)^2]^{1/2}$.

10 Elektromagnetische impuls

- We willen de elektromagnetische krachtdichtheid $\mathcal{F} = \rho\vec{E} + \vec{j}\times\vec{B}$ schrijven in termen van alleen $\vec{E}$ en $\vec{B}$. Invullen van de Maxwellvergelijkingen geeft

$$\mathcal{F} = \varepsilon_0 \left(\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\cdot\vec{E}\right)\vec{E} + \left(\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\times\vec{B} - \varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}\right)\times\vec{B}$$

- Dit willen we nu omschrijven in de vorm van een balansvergelijking, $\mathcal{F}$ = divergentie van iets plus d/dt van iets anders. We maken gebruik van de relaties

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}\times\vec{B}) &= \left(\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}\right)\times\vec{B} + \vec{E}\times\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}\right)\times\vec{B} - \vec{E}\times\left(\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\times\vec{E}\right) \\
\vec{E}\times\left(\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\times\vec{E}\right) &= \left(\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\vec{E}\right)\cdot\vec{E} - \vec{E}\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\vec{E} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\vec{r}}|\vec{E}|^2 - \vec{E}\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\vec{E} \\
\vec{B}\times\left(\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\times\vec{B}\right) &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\vec{r}}|\vec{B}|^2 - \vec{B}\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\vec{B}
\end{aligned}$$

- Substitutie geeft

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} &= \varepsilon_0\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\cdot\vec{E}\right)\vec{E} - \vec{E}\times\left(\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\times\vec{E}\right)\right\} \\
&\quad - \varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}\times\vec{B}) - \frac{1}{\mu_0}\vec{B}\times\left(\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\times\vec{B}\right) \\
&= \varepsilon_0\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\cdot\vec{E}\right)\vec{E} + \vec{E}\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\vec{E}\right\} \\
&\quad + \frac{1}{\mu_0}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\cdot\vec{B}\right)\vec{B} + \vec{B}\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\vec{B}\right\}
\end{aligned}$$

$$- \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\vec{E} \times \vec{B}) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \left(\varepsilon_0 |\vec{E}|^2 + \frac{1}{\mu_0}|\vec{B}|^2 \right)$$

De term met divergentie $\vec{B}$ is nul, maar is toegevoegd vanwege de symmetrie.

- Definieer nu de Maxwell stresstensor $\mathbf{T}$ met elementen

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta} &= \varepsilon_0 \left(E_\alpha E_\beta - \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}|\vec{E}|^2 \right) \\ &\quad + \frac{1}{\mu_0} \left(B_\alpha B_\beta - \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}|\vec{B}|^2 \right) \end{aligned}$$

De balansvergelijking voor impuls wordt dan

$$\mathcal{F} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot \mathbf{T} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{j}_u$$

11 Relativistische wet van Newton

- De tweede wet van Newton in de relativiteitstheorie luidt

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{p} = \frac{d}{dt}\frac{d}{d\tau}\vec{r}$$

We willen bewijzen dat de arbeid $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{l}$ gelijk is aan de toename van de relativistische energie $E = mc^2(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$.

- Integreer de kracht langs een pad van $\vec{r}_i$ op tijd t_i naar $\vec{r}_f$ op tijd t_f.

$$\begin{aligned} W &= \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{l} = \int_{t_i}^{t_f} \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \frac{d\vec{l}}{dt} dt = \int_{t_i}^{t_f} \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{v} dt \\ &= \int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{d}{dt} \frac{m\vec{v}}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \right) \cdot \vec{v} dt \\ &= \int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{md\vec{v}/dt}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} + \frac{(m/c^2)(\vec{v} \cdot d\vec{v}/dt)\vec{v}}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \right) \cdot \vec{v} dt \\ &= \int_{t_i}^{t_f} \frac{m\vec{v} \cdot d\vec{v}/dt}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} dt \\ &= \int_{t_i}^{t_f} \frac{d}{dt} \left(\frac{mc^2}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \right) dt \\ &= E_f - E_i \end{aligned}$$

QED

12 Nogmaals de bewegende puntlading

- Het elektrische en magnetische veld van een bewegende puntlading kunnen we uitrekenen via de Liénard-Wiechert potentialen. Een equivalente, maar meer directe berekening gebruikt de Lorentztransformatie vanuit het ruststelsel. Als de puntlading q in stelsel S een snelheid v in de x-richting heeft, dan is hij in rust in het stelsel S' dat zich met een snelheid $v_R = v$ t.o.v. S beweegt. In S' (met de puntlading in de oorsprong) geldt

$$\vec{B}' = 0, \quad \vec{E}' = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}'}{|\vec{r}'|^3}$$

- De inverse Lorentztransformate van S' naar S geeft het elektrische veld

$$\begin{pmatrix} E'_x \\ E'_y \\ E'_z \end{pmatrix} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{-3/2} \begin{pmatrix} x' \\ \gamma y' \\ \gamma z' \end{pmatrix}$$

- Nu moeten we nog $\vec{r}'$ omschrijven naar $\vec{r}$. Definieer $\vec{r}_0 = (vt, 0, 0)$. Dan geldt

$$x' = \gamma(x - x_0), \quad y' = y - y_0, \quad z' = z - z_0$$

  Gebruik ook dat

$$\gamma^2(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \gamma^2|\vec{r} - \vec{r}_0|^2\cos^2\theta + |\vec{r} - \vec{r}_0|^2\sin^2\theta$$

  waarbij θ de hoek is tussen de vector $\vec{r} - \vec{r}_0$ en de x-as.

- Invullen geeft

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\gamma(\vec{r} - \vec{r}_0)}{[\gamma^2|\vec{r} - \vec{r}_0|^2\cos^2\theta + |\vec{r} - \vec{r}_0|^2\sin^2\theta]^{3/2}}$$

  Teller en noemer delen door γ^3 levert het eindantwoord op:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3}\frac{1 - v^2/c^2}{[1 - (v/c)^2\sin^2\theta]^{3/2}}$$

- Het bijbehorende magneetveld volgt het snelst uit $\vec{B} = (1/c^2)\vec{v} \times \vec{E}$.