Leningrad
16. Jan. 1930.

Lieber Павел Сигизмундович!

Ich habe mir Ihre Frage über die Vertauschungsrelationen

(1) $\quad b b^{+} - b^{+} b = 1$

(2) $\quad N e^{i\theta} - e^{i\theta} N + e^{i\theta} = 0$

überlegt, und folgendes bewiesen.

I. Aus (1) folgt: die verschiedenen Eigenwerte von $N = b^{+}b$ sind ganze Zahlen 0, 1, 2, .... (ohne additive Konstante). Diese Eigenwerte sind entweder alle einfach oder aber sie besitzen die gleiche Vielfachheit. Eine Lösung von (1) ist z. B. ~~auch~~ (für doppelte Eigenwerte):

$$b = \left|\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & & \\ & & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & & \\ & & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & & \\ & & & & 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} \end{array}\right| \qquad N = \left|\begin{array}{ccccccc} 0 & & & & & & \\ & 0 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 2 & & \\ & & & & & 2 & \\ & & & & & & \ddots \end{array}\right|$$

wobei $\underline{b}$ ~~nur~~ (bei unverändertem $N$) nur bis auf eine unitäre Transformation

$$T = \left|\begin{array}{cccc} T_1 & & & \\ & T_2 & & \\ & & T_3 & \\ & & & \ddots \end{array}\right| \qquad (T_1, T_2 \ldots = \text{zweireihige unitäre Matrizen})$$

festgelegt ist.

$\underline{\text{II}}$ Es sei gegeben ($U = e^{i\theta}$)

1) $NU - UN + U = 0$

2) $N = N^+$, 3) Es gibt einen kleinsten Eigenwert $N_1$

4) $(U^+U)_{ik} = \delta_{ik}$ für $i \geqslant 2$ $k \geqslant 2$

Dann folgt

1) $UU^+ = 1$ $(U^+U)_{i1} = 0$ $(U^+U)_{1i} = 0$ $i = 1, 2, 3, \ldots$

2) Die verschiedenen Eigenwerte von $N$ sind $N_1$, $N_1 + 1$, $N_1 + 2$, ....

3) Die Matrix $U$ ist ~~bis~~ (falls die Eigenwerte von $N$ einfach sind) bis auf Phasenfaktoren gleich

$$U = \left|\begin{matrix} 0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1 \\ &&&&&\ddots \end{matrix}\right|$$

$\underline{\text{III}}$. Es sei gegeben

1) $NU - UN + U = 0$

wo benutzt? 2) $N = N^+$ 3) $UU^+ = 1$, $U^+U = 1$

Dann folgt nur

Wenn $N'$ ein Eigenwert ist, so sind auch

$-\infty$ ... $N' - n$ ... $N' - 1$, $N'$, $N' + 1$, ... $N' + n$, ... $+\infty$

Eigenwerte (so daß es keinen kleinsten Eigenwert gibt).

Mehr läßt sich nicht behaupten, denn es ist z.B.

$$N = \left|\begin{matrix} \ddots \\ & e-1 \\ && \pi-1 \\ &&& e \\ &&&& \pi \\ &&&&& e+1 \\ &&&&&& \pi+1 \end{matrix}\right| \qquad U = \left|\begin{matrix} \ddots \\ 0&0&1&0 \\ &0&0&1&0 \\ &&0&0&1&0 \\ &&&0&0&1&0 \\ &&&&0&0&1&0 \\ &&&&&0&0&1&0 \\ &&&&&&0&0&1 \\ &&&&&&&0&&\ddots \end{matrix}\right|$$

Hauptdiag

eine Lösung

## IV Die Beziehung zum linearen Ossillator

Man setze

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(b+b^+)=q \qquad \frac{1}{i\sqrt{2}}(b-b^+)=p \qquad (i=\sqrt{-1})$$

Dann ist $q^+=q$ $p^+=p$ und wegen $bb^+-b^+b=1$

$$pq-qp=\frac{1}{i} \qquad p^2+q^2=bb^++b^+b$$

$$N=b^+b=\frac{1}{2}(p^2+q^2)-\frac{1}{2}=E-\frac{1}{2}$$

wo $E$ als Energieoperator des linearen Ossillators gedeutet werden kann. Die Eigenwerte von $E$ sind

$$E=\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \dots\ n+\frac{1}{2},\ \dots$$

und folglich die von $N$:

$$N=0,\ 1,\ 2,\ \dots$$

---

Beweis von I.

Aus $N=b^+b$ folgt zunächst, daß die Eigenwerte von $N$ nicht negativ sind. Wir nehmen an, daß $N$ Diagonalmatrix ist, und daß die Eigenwerte verschieden und in steigender Reihenfolge geordnet sind

$$N_1<N_2<N_3<\dots$$

[Die Annahme, das die Eigenwerte verschieden sind ist nicht wesentlich und man kann sich von ihr befreien)

Wir multiplisieren $b^+b-bb^++1=0$ rechts mit $b$

$$Nb-bN+b=0$$

d.h.

$$(*)\qquad (N_i-N_j+1)\,b_{ij}=0$$

Daraus folgt wegen $N_1<N_2<\dots$

erstens $\qquad b_{ij}=0$ falls $i\geqslant j$

zweitens: für $i < j$ ist höchstens 1 Element $b_{ij}$ von Null verschieden

Nun ist nach der Definition von $N = b^+ b$

$$N_i = \sum_{j=1}^{\infty} b^+_{ij}\, b_{ji}$$

also

$$N_1 = 0 \qquad (\text{da } N_2 \neq N_1) \qquad (\text{da nur ein } b_{1j} \neq 0 \text{ ist})$$

$$N_2 = b^+_{21}\, b_{12}\,; \quad b_{12} \neq 0 \text{ und } b_{13} = b_{14} = \dots = 0$$

$$N_3 = b^+_{32}\, b_{23}\,; \quad b_{23} \neq 0 \text{ und } b_{24} = b_{25} = \dots = 0$$

- - - - - - -

$$N_i = b^+_{i,i-1}\, b_{i-1,i}\,; \quad b_{i-1,i} \neq 0 \text{ und } b_{i-1,i+1} = b_{i-1,i+2} = \dots$$

. . . . . . .

Aus $b_{i-1,i} \neq 0$ $(i = 2, 3, \dots)$ folgt

$$N_{i-1} - N_i + 1 = 0$$

und wegen $N_1 = 0$

$$N = 0, 1, 2, 3, \dots\,; \quad N_i = i - 1 = b^+_{i,i-1}\, b_{i-1\,i}$$

Damit ist alles bewiesen

Falls man die Möglichkeit mehrfach Eigenwerte zuläßt, bleiben alle Überlegungen gültig; nur hat man unter $N_1\, N_2 \dots$ verschiedene Eigenwerte ~~zu~~ und unter $b_{ij}$ Matrizen zu verstehen.

Aus

$$i - 1 = N_i = b b^+ - 1 = \cancel{bb}\; b_{i,i+1}\, b^+_{i+1\,i} - 1$$

folgt

$$b_{i,i+1}\, b^+_{i+1,i} = i = b^+_{i+1,i}\, b_{i,i+1}$$

folglich ist die Matrix

$$u_2 = \frac{b_{2,2+1}}{\sqrt{2}}$$

unitär $\quad u_2^+ u_2 = u_2 u_2^+ = 1$

also $u_2$ und $b_{2,2+2}$ quadratisch, also: $N_2$ und $N_{2+1}$ haben die gleiche Vielfachheit.

<u>Beweis von II</u>

Der kleinste Eigenwert von $N$ sei $N_1$; die übrigen ordnen wir in steigender Reihenfolge

$$N_1 < N_2 < N_3 < \cdots$$

Aus $NU - UN + U = 0$

folgt $(N_i - N_j + 1)\, U_{ij} = 0$ also erstens $U_{ij} = 0 \quad i \geqq j$

und zweitens unter $U_{ij} \quad i < j$ ist nur ein Element $\neq 0$.

Nun ist

$$(U^+U)_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} U^+_{ik} U_{kj}$$

also

$$(U^+U)_{11} = 0$$

$$1 = (U^+U)_{22} = U^+_{21} U_{12} \quad \Big| \quad U_{13} = U_{14} = \cdots = 0 \quad \Big| \quad U_{12} \neq 0$$

$$1 = (U^+U)_{33} = U^+_{32} U_{23} \quad \Big| \quad U_{24} = U_{25} = \cdots = 0 \quad \Big| \quad U_{23} \neq 0$$

— — — — — — —

$$1 = (U^+U)_{ii} = U^+_{i,i-1} U_{i-1\,i} \quad \Big| \quad U_{i-1,\,i+1} = \cdots = 0 \quad \Big| \quad U_{i-1\,i} \neq 0$$

Aus $U_{i-1\,i} \neq 0$ folgt

$$N_{i-1} - N_i + 1 = 0$$

und folglich

$$N' = N_1,\ N_1 + 1,\ N_1 + 2,\ \ldots$$

Bezüglich der Viefachkeit gilt die gleiche Bemerkung, wie unter I.

~~A~~ Beweis von III

Aus $U^+(N+1)U = N$ $\quad U$ unitär

folgt: $N+1$, folglich ~~ba~~ auch: $N+2$ $N+3 \ldots$
und $N-1$, $N-2 \ldots$

besitzen dieselben Eigenwerte wie $N_1$ w. z. b. w.

Ich glaube, jetzt ist alles bewiesen was man beweisen konnte.

Noch eine Bemerkung zu II

Der Operator $U$ ~~ba~~ mit der Matrix

$$U = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \\ \vdots & \vdots & & & \end{vmatrix}$$

bedeutet, an eine Funktion von $N'$ angewandt: ersetzen von $N'$ durch $N'+1$. Der Operator $U^+$ mit der Matrix

$$U^+ = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot \end{vmatrix}$$

bedeutet: ersetzen von $N'$ durch $N'-1$ wenn nicht gerade $N' = N_1$ ist

$$U f(N') = f(N'+1) \qquad N' = N_1, N_2 \ldots$$
$$U^+ f(N') = f(N'-1) \qquad N' = N_2\ N_3 \ldots$$
$$U^+ f(N_1) = 0$$

Denn $f(N')$ ist nur für $N' \geq N_1$ definiert!

Daraus folgt offenbar

$$U U^+ f(N_1) = 0$$
$$U U^+ f(N') = f(N') \qquad N' = N_2 \, N_3 \ldots$$

Das macht die Bedingung 4) verständlich.

~~U~~ Man kann symbolisch setzen

$$U = e^{\frac{\partial}{\partial N}} \qquad U^+ = e^{-\frac{\partial}{\partial N}}$$

Daraus der Zusammenhang mit $U = e^{i\theta}$ $U^+ = e^{-i\theta}$.

---

Die Liste der übrigen Fragen habe ich von Ihren Zuhörern noch nicht erhalten; wenn ich sie erhalte, werde ich darüber nachdenken.

Ihr herzlich ergebener

V. Fock.

Leningrad (8)
Masterskaja 12 W. 3

$$Z \qquad \boxed{\sum \overset{2}{a}{}_r^2} = \cancel{2} \quad \left| \frac{a_r a_r^*}{\phantom{x}} \right| = Z$$

$$\tilde{\Sigma}_r$$

| $\overset{1}{a}_r$ | $\overset{Z}{a}_r = Z \overset{1}{a}_r$ | |
|---|---|---|
| $a_0 = 0 \to t$ | $Z_0 \quad 0 \to t$ | $b_{mn} \varphi(l) \varphi_m \varphi_n$ |
| | | $b_{mn}$ |

Lorentz tegen D? Lector