Leningrad
16. Jan. 1930.

Lieber Павел Сигизмундович!

Dear Pawel Sigismundovich

Ich habe mir Ihre Frage über die Vertauschungsrelationen

I have thought about your question regarding the commutation relations

$$(1) \qquad bb^+ - b^+b = 1$$

$$(2) \qquad Ne^{i\theta} - e^{i\theta}N + e^{i\theta} = 0$$

and I have proven the following:

überlegt, und folgendes bewiesen.

I. Aus (1) folgt: die verschiedenen

I. From (1) follows: the distinct eigenvalues of N=b†b are integers 0,1,2,... (without additive constant).

Eigenwerte von $N = b^+b$ sind ganze Zahlen $0, 1, 2, \dots$ (ohne additive Konstante). Diese Eigenwerte sind entweder alle

These eigenvalues are either all simple or they have the same multiplicity.

einfach oder aber sie besitzen die gleiche Vielfachheit. Eine Lösung von (1) ist z. B. ~~auch~~ (für doppelte Eigenwerte):

A solution of (1) is for example (for double eigenvalues):

$$b = \left|\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & & \\ & & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & & \\ & & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & & \\ & & & & 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} \end{array}\right| \qquad N = \left|\begin{array}{ccccccc} 0 & & & & & & \\ & 0 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 2 & & \\ & & & & & 2 & \\ & & & & & & \ddots \end{array}\right|$$

where b (at fixed N) is determined up to a unitary transformation

wobei b (bei unverändertem N) nur bis auf eine unitäre Transformation

$$T = \left|\begin{array}{cccc} T_1 & & & \\ & T_2 & & \\ & & T_3 & \\ & & & \ddots \end{array}\right| \qquad (T_1, T_2 \dots = \text{zweireihige unitäre Matrizen})$$

(T_1,T_2 ... = 2x2 unitary matrices)

festgelegt ist.

II. The following is given (U=e^iθ)

II Es sei gegeben ($U = e^{i\theta}$)

1) $NU - UN + U = 0$

3) There exists a smallest eigenvalue N_1

2) $N = N^+$, 3) Es gibt einen kleinsten Eigenwert N_1

4) $(U^+U)_{ik} = \delta_{ik}$ für $i \geqslant 2$ $k \geqslant 2$

Dann folgt Then it follows that:

1) $UU^+ = 1$ $\quad (U^+U)_{i1} = 0 \quad (U^+U)_{1i} = 0 \quad i = 1, 2, 3, \ldots$

2) Die verschiedenen Eigenwerte von N sind

The distinct eigenvalues of N are

$N_1, \quad N_1 + 1, \quad N_1 + 2, \quad \ldots$

3) Die Matrix U ist ~~kla~~ (falls die Eigenwerte von N einfach sind) bis auf Phasenfaktoren gleich

The matrix is U (for simple eigenvalues of N) is given up toa phase factor by

$$U = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ & & & & & \ddots \end{vmatrix}$$

III. Es sei gegeben III. The following is given

1) $NU - UN + U = 0$

[illegible] ← 2) $N = N^+$ 3) $UU^+ = 1$, $U^+U = 1$

It then follows only that, if N' is an eigenvalue, then also

Dann folgt nur

Wenn N' ein Eigenwert ist, so sind auch

$-\infty \ldots N' - n \ldots N' - 1 \quad N', \quad N' + 1, \ldots N' + n, \ldots + \infty$

are eigenvalues (so there is no smallest eigenvalue)

Eigenwerte (so daß es keinen kleinsten Eigenwert gibt).

Mehr läßt sich nicht behaupten, denn es ist z.B.

More can not be concluded, see for example this solution:

$$N = \begin{vmatrix} \ddots & & & & & & \\ & e-1 & & & & & \\ & & \pi - 1 & & & & \\ & & & e & & & \\ & & & & \pi & & \\ & & & & & e+1 & \\ & & & & & & \pi + 1 \end{vmatrix} \qquad U = \begin{vmatrix} \ddots & & & & & & & & \\ & 0 & 0 & 1 & 0 & & & & \\ & & 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ & & & 0 & 0 & 1 & 0 & & \\ & & & & 0 & 0 & 1 & 0 & \\ & & & & & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 1 \\ & & & & & & & 0 & \ddots \end{vmatrix}$$

Hauptdiag

eine Lösung

IV Die Beziehung zum linearen Oszillator

IV. Relationshipt to a linear oscillator. Set

Man setze

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(b+b^+)=q \qquad \frac{1}{i\sqrt{2}}(b-b^+)=p \qquad (i=\sqrt{-1})$$

Then q\†=q, p†=p and because bb†-b†b=1

Dann ist $q^+=q$ $p^+=p$ und wegen $bb^+-b^+b=1$

$$pq-qp=\frac{1}{i} \qquad p^2+q^2=bb^++b^+b$$

$$N=b^+b=\frac{1}{2}(p^2+q^2)-\frac{1}{2}=E-\frac{1}{2}$$

where E can be interpreted as the energy operator of the linear oscillator. The eigenvalues of E are

wo E als Energieoperator des linearen Oszillators gedeutet werden kann. Die Eigenwerte von E sind

$$E=\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \dots\ n+\frac{1}{2},\ \dots$$

und folglich die von N:

and consequently those of N:

$$N=0,\ 1,\ 2,\ \dots$$

Proof of I.
From N=b†b it follows that the eigenvalues of N cannot be negative. Assume that N is a diagonal matrix, and that the eigenvalues are distinct and ordered in increasing series

Beweis von I.

Aus $N=b^+b$ folgt zunächst, daß die Eigenwerte von N nicht negativ sind. Wir nehmen an, daß N Diagonalmatrix ist, und daß die Eigenwerte verschieden und in steigender Reihenfolge geordnet sind

$$N_1<N_2<N_3<\dots$$

[The assumption that the eigenvalues are distinct is not essential and can be relaxed.]

[Die Annahme, das die Eigenwerte verschieden sind ist nicht wesentlich und man kann sich von ihr befreien)

Wir multiplizieren $b^+b-bb^++1=0$ rechts mit b

We multiply bb†h-b†b+1=0 from the right with b

$$Nb-bN+b=0$$

d.h.

$$(*) \qquad (N_i-N_j+1)\,b_{ij}=0$$

Daraus folgt wegen $N_1<N_2<\dots$ erstens

$$b_{ij}=0 \quad \text{falls} \quad i\geqslant j$$

It then follows because N_1<N_2<... firstly that b_ij=0 if i≥j secondly: if i<j at most 1 element from b_ij differs from zero.

zweitens: für $i < j$ ist höchstens 1 Element b_{ij} von Null verschieden

Nun ist nach der Definition von $N = b^+ b$

From the definition N=b†b it also follows that

$$N_i = \sum_{j=1} b^+_{ij}\, b_{j\,i}$$

also hence

because N_2≠N_1 because only one b_ij≠0

$$N_1 = 0 \qquad (\text{da } N_2 \neq N_1) \qquad (\text{da nur ein } b_{2j} \neq 0 \text{ ist})$$

$$N_2 = b^+_{21}\, b_{12}\,; \quad b_{12} \neq 0 \text{ und } b_{13} = b_{14} = \dots = 0$$

$$N_3 = b^+_{32}\, b_{23}\,; \quad b_{23} \neq 0 \text{ und } b_{24} = b_{25} = \dots = 0$$

- - - - - - - - - - -

$$N_i = b^+_{i,i-1}\, b_{i-1,i}\,; \quad b_{i-1,i} \neq 0 \text{ und } b_{i-1,i+1} = b_{i-1,i+2} = \dots = 0$$

- - - - - - - -

Aus $b_{i-1,i} \neq 0 \quad (i = 2, 3, \dots)$ folgt

From follows

$$N_{i-1} - N_i + 1 = 0$$

and because

und wegen $N_1 = 0$

$$N_i = 0, 1, 2, 3, \dots \,; \quad N_i = i - 1 = b^+_{i,i-1}\, b_{i-1\,i}$$

Thus all is proven

Damit ist alles bewiesen

If you allow for degenerate eigenvalues, all considerations remain valid, if you take for N_1, N_2,...

Falls man die Möglichkeit mehrfach Eigenwerte zuläßt, bleiben alle Überlegungen gültig; nur hat man unter $N_1\, N_2 \dots$ verschiedene Eigenwerte

the distinct eigenvalues and for b_ij matrices.

~~zu~~ und unter b_{ij} Matrizen zu verstehen.

Aus

$$i - 1 = N_i = b b^+ - 1 = b_{i,i+1}\, b^+_{i+1\,i} - 1$$

folgt follows

$$b_{i,i+1}\, b^+_{i+1,i} = i = b^+_{i+1,i}\, b_{i,i+1}$$

folglich ist die Matrix

hence the matrix

$$u_2 = \frac{b_{2,2+1}}{\sqrt{2}}$$

unitär $\quad u_2^+ u_2 = u_2 u_2^+ = 1$

unitary

also u_2 und $b_{2,2+2}$ quadratisch, also: N_2 und N_{2+1} haben die gleiche Vielfachheit.

hence u_2 and b_2,2+2 are quadratic, and thus N_2 and N_2+1 have the same multiplicity

<u>Beweis von II</u>

Proof of II.
Let N_1 be the smallest eigevalue of N. Order the other in increasing series

Der kleinste Eigenwert von N sei N_1; die übrigen ordnen wir in steigender Reihenfolge

$$N_1 < N_2 < N_3 < \cdots$$

From Aus

$$NU - UN + U = 0$$

hence firstly

folgt

follows

$$(N_i - N_j + 1)\, U_{ij} = 0$$

also <u>erstens</u> $U_{ij} = 0 \quad i \geq j$

und zweitens unter U_{ij} $i < j$ ist nur ein Element $\neq 0$.

and secondly for U_ij with i<j only a single element is ≠0.

Nun ist

Then we have

$$(U^+U)_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} U^+_{ik} U_{kj}$$

also

moreover

$$(U^+U)_{11} = 0$$

$$\begin{array}{l|l|l}
1 = (U^+U)_{22} = U^+_{21} U_{12} & U_{13} = U_{14} = \cdots = 0 & U_{12} \neq 0 \\
1 = (U^+U)_{33} = U^+_{32} U_{23} & U_{24} = U_{25} = \cdots = 0 & U_{23} \neq 0 \\
\text{— — — — — —} & & \\
1 = (U^+U)_{ii} = U^+_{i,i-1} U_{i-1\,i} & U_{i-1,\,i+1} = \cdots = 0 & U_{i-1\,i} \neq 0
\end{array}$$

From Aus $U_{i-1\,i} \neq 0$ folgt follows

$$N_{i-1} - N_i + 1 = 0$$

und folglich

and hence

$$N' = N_1\,,\ N_1 + 1,\ N_1 + 2,\ \ldots.$$

Bezüglich der Viefachheit gilt die gleiche Bemerkung, wie unter I.

With respect to multiplicity the same remark as in I applies.

~~A~~ Beweis von III

Proof of III

with U unitary follows

Aus From $U^+(N+1)U = N$ U unitär

folgt: $N+1$, folglich ~~da~~ hence also auch: $N+2$ $N+3$ --

und $N-1$, $N-2$ ....

besitzen dieselben Eigenwerte wie N_1, w. z. Bw.

have the same eigenvalues as N_1.

I think everything is now proven what needed to be proven.

Ich glaube, jetzt ist alles bewiesen was man beweisen konnte.

An additional remark on II.

Noch eine Bemerkung zu II

Der Operator U ~~da~~ mit der Matrix

The operator U with the matrix

$$U = \begin{vmatrix} 0100 - - \\ 0010 - - \\ 0001 \\ \vdots \end{vmatrix}$$

means that applied to a function of N' it replaces N' by N'+1.

bedeutet, an eine Funktion von N' angewandt: ersetzen von N' durch $N'+1$. Der Operator U^+ mit der Matrix

The operator U with the matrix

$$U^+ = \begin{vmatrix} 0000 - - \\ 1000 \\ 0100 \\ 0010 \end{vmatrix}$$

means: replace N' by N'-1 provided that N' is not equal to N_1.

bedeutet: ersetzen von N' durch $N'-1$ <u>wenn nicht gerade $N' = N_1$ ist</u>

$$U f(N') = f(N'+1) \qquad N' = N_1, N_2 \ldots$$

$$U^+ f(N') = f(N'-1) \qquad N' = N_2\ N_3 \ldots$$

$$\underline{\underline{U^+ f(N_1) = 0}}$$

Denn $f(N')$ ist nur für $N' \geqq N_1$ definiert!

Because f(N') is only defined for N'≥N_1.

Daraus folgt offenbar It thus follows directly

$$U U^+ f(N_1) = 0$$

$$U U^+ f(N') = f(N') \qquad N' = N_2 \, N_3 \dots$$

Das macht die Bedingung 4) verständlich.

This makes requirement 4) understandable. Symbolically you can write

~~U~~ Man kann symbolisch setzen

$$U = e^{\frac{\partial}{\partial N}} \qquad U^+ = e^{-\frac{\partial}{\partial N}}$$

Daraus der Zusammenhang mit $U = e^{i\theta}$ $U^+ = e^{-i\theta}$.

Hence the relationship with U=e^iθ U†=e^-iθ

Die Liste der übrigen Fragen habe ich

.The list of your other question I have not yet received from your assistants

von Ihren Zuhörern noch nicht erhalten; wenn ich sie erhalte, werde ich darüber nachdenken.

When I receive it I will think about it.

Ihr herzlich ergebener

Sincerely your,

V. Fock.

Leningrad (8)
Masterskaja 12 W. 3

$$\Sigma \qquad \boxed{\Sigma a_r^2} = 2 \cancel{\ } \quad \left| a_r a_r^* \right| = \Sigma$$

$$\left| a_r a_r^* \right| \rightarrow \Sigma_r$$

$\hat{a}_r$	$\hat{\hat{a}}_r = \Sigma \hat{a}_r$	
$a_0 = 0 \rightarrow t$	Z_0 $\quad 0 \rightarrow t$ $-$	$b_{mn}\, \varphi_n(1)\, \varphi_m(\;)$ b_{mn}

Lorentz tegen D? Lector