Fluctuatie's bij electrische en optische verschijnselen.

J. VAN SLINGELANDT.

Fluctuatie's bij electrische en optische verschijnselen.

Fluctuatie's bij electrische en optische verschijnselen.

PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE AAN DE RIJKSUNIVERSITEIT TE LEIDEN, OP GEZAG VAN DEN RECTOR-MAGNIFICUS Dr. A. W. NIEUWENHUIS, HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER LETTEREN EN WIJSBEGEERTE, VOOR DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE TE VERDEDIGEN OP **VRIJDAG 19 DECEMBER 1919** DES NAMIDDAGS TE 2 UREN

DOOR **JOHANNES VAN SLINGELANDT,**
GEBOREN TE AMBARAWA. :: :: :: :: ::

Electr. drukkerij «de Industrie» J. Van Druten — Utrecht.
1919.

AAN DE NAGEDACHTENIS MIJNER OUDERS.

Het is mij een aangename taak bij de voltooiing van dit proefschrift mijn dank te betuigen aan U, hoogleeraren en oud-hoogleeraren van de faculteit der Wis- en Natunrkunde, en ook aan U, hooggeleerde Bolland, voor hetgeen Gij tot mijn academische vorming hebt bijgedragen.

Een voorrecht is het mij, in het bijzonder mijn hartelijken dank te mogen richten tot U, hooggeleerde Lorentz, hooggeachte promotor, voor de groote belangstelling, welke Gij mij steeds in alle opzichten betoond hebt, en voor de bereidwilligheid, welke ik bij het samenstellen van dit proefschrift Uwerzijds voortdurend mocht ondervinden.

INHOUD.

INLEIDING.

Tengevolge van de onregelmatigheden, die kunnen voorkomen in een stelsel, dat uit een zeer groot aantal deeltjes bestaat, vertoont in vele gevallen de waarde van een physische grootheid toevallige afwijkingen van de gemiddelde waarde, fluctuatie's, waarvan men de gevolgen bij verschillende verschijnselen bemerkt.

Een voorbeeld hiervan is de verstrooiing van het licht door de molekulen eener middenstof; de verstrooiing wordt veroorzaakt, doordat er in de dichtheid der middenstof plaatselijke toevallige afwijkingen van hare gemiddelde waarde zijn. In de hoofdstukken III en IV zal de verstrooiing van het licht behandeld worden.

De verstrooiing is vooral aanzienlijk in vloeistoffen in de nabijheid van haar kritisch punt; de dichtheidsafwijkingen zijn hierbij vrij groot en veroorzaken het verschijnsel, dat den naam „kritische opalescentie" draagt.

Andere verschijnselen, die door fluctuatie's in de waarde van een physische grootheid teweeggebracht worden, zijn de Brown'sche beweging en de spontane electriciteitsbeweging in geleiders; verder vermelden we de fluctuatie's in de emissie van α-deeltjes, in de zwarte straling, en in de hoeveelheid arbeidsvermogen van lichamen, die met elkaar in aanraking zijn en onderling energie kunnen uitwisselen.

De Brown'sche beweging wordt veroorzaakt door de fluctuatie's in de kracht, door de gezamenlijke molekulen van het suspensiemiddel uitgeoefend op het gesuspendeerde deeltje. De spontane electriciteitsbeweging in geleiders, die in Hoofdstuk II besproken zal worden, is een onregelmatige beweging der electronen, vergelijkbaar met de warmtebeweging der molekulen van een gas. De spontane electromotorische kracht, waarvan grootte en richting voortdurend veranderen, is te vergelijken met de fluctueerende kracht, die op het deeltje werkt, dat de Brown'sche beweging uitvoert.

HOOFDSTUK I.

De toevallige verdeeling van elementen over een bepaalde ruimte of over een zekeren tijd en de Brown'sche beweging.

§ 1. De verschijnselen, die door fluctuatie's in een physische grootheid teweeggebracht worden, zijn door verschillende natuurkundigen onderzocht. Wij zullen eenige vraagstukken, die zich hier voordoen, in het kort bespreken. [1]) Stel vooreerst, dat een gasmassa, bestaande uit n onderling gelijke molekulen, in een volume v is opgesloten. Dit volume wordt verdeeld gedacht in twee al dan niet gelijke volumina v_1 en v_2; het aantal molekulen in v_1, resp. v_2 noemen wij n_1, resp. n_2. De meest waarschijnlijke verdeeling der n molekulen over de volumina v_1 en v_2 is nu deze, dat

$$n_1 = \frac{v_1}{v} n, \quad n_2 = \frac{v_2}{v} n. \qquad (1)$$

Indien men de telling der aantallen n_1 en n_2 kon uitvoeren, zou men afwijkingen van de verdeeling (1) vinden. Zij het bedrag der afwijking ν, zoodat het aantal deeltjes in het eene deel der ruimte $\frac{v_1}{v} n + \nu$, en dat in het andere deel $\frac{v_2}{v} n - \nu$ is; dan wordt $\overline{\nu^2}$, dat is het gemiddelde van alle waarden, die men voor ν^2 zou vinden, wanneer men dezelfde gasmassa op een groot aantal oogenblikken, of vele onderling

[1]) Zie b.v. H. A. Lorentz, Théories statistiques en thermodynamique. Conférences faites au Collège de France en novembre 1912; ed. Teubner 1916, p. 35.

gelijke gasmassa's op hetzelfde oogenblik beschouwde, bepaald door

$$\overline{\nu^2} = \frac{n_1 n_2}{n}.$$

Is $v_1 = v_2$, dan wordt

$$\overline{\nu^2} = {}^1/_2\, n_1.$$

Is daarentegen v_1 een zeer klein deel van v, dan zal men met groote nauwkeurigheid hebben

$$\overline{\nu^2} = n_1. \tag{2}$$

§ 2. Dergelijke fluctuatie's in dichtheid verraden zich, zooals wij reeds opmerkten, doordat zij de verstrooiing van het licht en de kritische opalescentie teweegbrengen.

Prof. LORENTZ [1]) geeft in de genoemde voordrachten aan, hoe men op algemeene wijze voor een gas of een vloeistof of een mengsel van twee ideale gassen de fluctuatie's in dichtheid en temperatuur en die van deze of gene andere physische grootheid, welke daarvan het gevolg zijn, kan berekenen.

§ 3. De uitkomsten, die in § 1 vermeld werden, zijn van toepassing op tal van gevallen, waarin sprake is van de verdeeling van elementen over een zekeren tijd of over een bepaalde ruimte, mits die verdeeling door het toeval bepaald wordt.

Zoo kan men beschouwen de emissie van α-deeltjes door radioactieve stoffen. Stel, dat wij zulk een stof waarnemen gedurende een tijd T, die zeer lang is in vergelijking met het gemiddelde tijdsverloop tusschen twee opeenvolgende uitzendingen van een deeltje, maar zoo kort in vergelijking met den gemiddelden „levensduur" van de radioactieve stof, dat men deze als onveranderd kan beschouwen gedurende den waarnemingstijd T. Worden er in dit tijdsverloop N deeltjes uitgezonden, dan zal het aantal geëmitteerde deeltjes in een onderdeel τ van T gemiddeld bedragen

$$n = \frac{\tau}{T} N$$

[1]) l. c., p. 86.

Er zullen echter afwijkingen ν van dit gemiddelde aantal zijn. Is τ zeer klein in vergelijking met T, evenals in het vorige geval v_1 was in vergelijking met v_2, zoo zal men, overeenkomstig formule (2) hebben

$$\overline{\nu^2} = n. \qquad (3)$$

Waarnemingen hebben deze uitkomst bevestigd.

§ 4. *Fluctuatie's in energie.* [1]) Zijn twee lichamen C_1 en C_2 met de warmtecapaciteiten c_1 en c_2 met elkaar in contact, en kunnen zij onderling arbeidsvermogen uitwisselen, dan is de meest waarschijnlijke energieverdeeling die, waarbij de lichamen gelijke temperatuur hebben. Is E de totale energie der beide lichamen, dan worden de meest waarschijnlijke waarden van de energie E_1 van het eerste en van de energie E_2 van het tweede lichaam bepaald door

$$E_1 = \frac{c_1}{c_1 + c_2} E, \quad E_2 = \frac{c_2}{c_1 + c_2} E.$$

Er zullen afwijkingen van deze verdeeling der energie voorkomen. Zij ε de afwijking, zoodat de energie van het eerste lichaam $E_1 + \varepsilon$, en die van het tweede $E_1 - \varepsilon$ is; dan wordt het gemiddelde $\overline{\varepsilon^2}$ van de kwadraten der afwijkingen gegeven door

$$\overline{\varepsilon^2} = c_1 k T^2, \qquad (4)$$

als C_1 zoo klein is in vergelijking met C_2, dat $\frac{1}{c_2}$ verwaarloosd kan worden ten opzichte van $\frac{1}{c_1}$. In bovenstaande formule is T de absolute temperatuur en k de constante, die de gemiddelde kinetische energie van een molekuul bij de temperatuur T bepaalt, welke energie gelijk is aan $^3/_2\, k\, T$.

De besproken fluctuatie's in energie zijn zoo klein, dat zij totnogtoe niet experimenteel aangetoond konden worden.

§ 5. *Fluctuatie's in de zwarte straling.* [2]) Stellen wij ons

---

[1]) l. c. p. 40.

[2]) A. Einstein, La théorie du rayonnement et les quanta, Réunion Solvay, Paris, 1912, p. 419.

een systeem voor, bestaande uit een volume aether V en een ponderabel lichaam; de temperatuur zij T, de energie van de zwarte straling, beantwoordende aan het freguentie-interval $\nu, \nu + d\nu$ zij E. De energie van dit deel der zwarte staling is zeer klein in vergelijking met die van het geheele systeem. De fluctuatie's ε in de energiedichtheid voor het beschouwde interval $d\nu$ kunnen dus berekend worden met behulp van de formule (4).

Nu heeft men volgens de formule van Planck

$$E = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3\left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1\right)} V d\nu,$$

waarin c de snelheid van het licht in het luchtledige voorstelt, en h de constante van Planck is.

Daar volgens (4)

$$\overline{\varepsilon^2} = k T^2 \frac{dE}{dT}$$

en verder

$$\frac{d}{dT}\left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1\right)^{-1} = \frac{h\nu}{kT^2}\left\{\left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1\right)^{-1} + \left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1\right)^{-2}\right\}$$

is, vindt men

$$\overline{\varepsilon^2} = h\nu E + \frac{c^3}{8\pi\nu^2 d\nu}\frac{E^2}{V}. \tag{5}$$

Over den tweeden term, dien met E^2, zullen wij niet spreken. De interpretatie van den eersten term in het rechterlid van bovenstaande vergelijking, n.l. $h\nu E$, leidt tot de theorie der energiequanta. Men denke zich de energie, behoorende bij het frequentie-interval $\nu, \nu + d\nu$ verdeeld in onderling gelijke deelen q. Stel, dat om een of andere reden het aantal dezer quanta in het volume V fluctuatie's ondergaat, analoog aan die van het aantal gasmolekulen in een klein deel van het totale volume. Als nu n het gemiddelde aantal der quanta is, — bepaald hetzij voor één systeem, beschouwd gedurende een lang tijdsverloop, hetzij voor een groot aantal onderling gelijke systemen op één oogenblik — en n' de afwijking van dat gemiddelde n voorstelt, dan is weer

$$\overline{n'^2} = n$$

Dus is

$$\overline{\varepsilon^2} = \overline{n'^2 q^2} = n\, q^2 = q\, E.$$

Nu is q E gelijk aan den eersten term van de uitdrukking (5) voor $\overline{\varepsilon^2}$, als men stelt

$$q = h\, \nu,$$

waardoor de grootte van het quantum bepaald wordt.

§ 6. *De Brown'sche beweging van een in een vloeistof gesuspendeerd deeltje.* Mevrouw DE HAAS—LORENTZ [1]) behandelt in haar proefschrift uitvoerig de onregelmatige beweging, die een klein gesuspendeerd deeltje ten gevolge van de botsingen der vloeistofmolekulen uitvoert; zij bespreekt daarbij het werk van EINSTEIN, VON SMOLUCHOWSKI, LANGEVIN, PERRIN e. a.

De kracht, die op het deeltje werkt, kan men zich samengesteld denken uit twee deelen; het eene deel is de weerstand, dien het deeltje bij zijn beweging door de vloeistof ondervindt; het is de gemiddelde kracht. Het tweede deel bestaat uit de afwijkingen tusschen de werkelijke en die gemiddelde kracht. Daar de snelheid v van het deeltje klein gedacht wordt, kan de weerstand voorgesteld worden door

$$-\, w\, v,$$

waarin w onafhankelijk is van de snelheid.

Van het tweede deel F van de kracht nemen we aan, dat het niet afhangt van de snelheid, en zonder eenige regelmaat van oogenblik tot oogenblik verandert. Geheel vrij van bedenking is deze splitsing der totale kracht in twee deelen niet [2]), maar wij zullen ons daar niet verder in verdiepen, daar het er ons alleen om te doen is, de methode, die in het geval van de Brown'sche beweging tot zulke mooie uitkomsten heeft geleid, op eenige andere gevallen toe te passen. Als we ons

---

[1]) G. L. DE HAAS—LORENTZ, Over de theorie van de Brown'sche beweging en daarmede verwante verschijnselen, Leiden, 1912; Duitsche vertaling in «Die Wissenschaft», N°. 62, Braunschweig, 1913.

[2]) J. D. VAN DER WAALS Jr. en Mej. A. SNETHLAGE, Versl. Kon. Ak. v. Wet. Amsterdam Dl. XXIV, 2e ged. (1916), p. 1272.

bepalen tot den component van de beweging volgens één richting, is de bewegingsvergelijking

$$m\frac{dv}{dt} = - w\,v + F. \qquad (6)$$

Hierin is m de massa van het deeltje. Bovenstaande vergelijking wordt geïntegreerd over een tijdsdeel τ; dit tijdsdeel wordt zoo klein genomen, dat in het tweede lid der vergelijking v gedurende den tijd τ als constant beschouwd mag worden. De impuls X, dien het deeltje in den tijd τ ontvangt van de botsende molekulen, wordt gegeven door

$$X = \int_\tau F\,dt$$

De methode van EINSTEIN en HOPF [1]) toepassend, vindt men:

$$\overline{X^2} = 2\,w\,k\,T\,\tau. \qquad (7)$$

In deze vergelijking is $\overline{X^2}$ de gemiddelde waarde van X^2, bepaald voor een zeer groot aantal deeltjes. Om tot dit resultaat te geraken, heeft men gesteld

$$\tfrac{1}{2}\,m\,\overline{v^2} = \tfrac{1}{2}\,k\,T.$$

EINSTEIN [2]) leidde een formule af voor het gemiddelde kwadraat $\overline{s^2}$ van den door het deeltje in den tijd t bereikten afstand s, gerekend van een zekeren beginstand. De formule luidt

$$\overline{s^2} = \frac{2\,k\,T\,t}{w}.$$

De vergelijking (7) is op vele gevallen van toepassing. Zij geldt evenzeer voor de roteerende Brown'sche beweging, mits men aan $\overline{X^2}$ en w een analoge beteekenis toekent; zij geldt ook voor andere soorten van Brown'sche bewegingen, b.v. de spontane electriciteitsbeweging in geleiders, waarover wij in Hoofdstuk II zullen handelen.

§ 7. Wij staan nog even stil bij de Brown'sche beweging van een zeer klein bolvormig deeltje in een vloeistof. [3]) Is

---

1) EINSTEIN u. HOPF, Ann. de Physik 33 (1910), p. 1105.

2) A. EINSTEIN, Ann. d. Physik 19 (1906), p. 371.

3) H. A. LORENTZ, l. c., p. 52.

er aan het oppervlak van het deeltje geen glijding van de vloeistof, dan is volgens de formule van STOKES

$$w = 6 \pi a \zeta,$$

waarin a de straal van het bolvormige deeltje en ζ de wrijvingscoëfficiënt van het suspensiemiddel is. In verband met (7) vindt men dus

$$\overline{X^2} = 12 \pi a \zeta k T \tau.$$

Dat $\overline{X^2}$ evenredig is met den straal van den bol, komt doordat bij een vloeistof de impulsen op de oppervlakte-elementen van den bol noch onderling, noch van de kromming van het oppervlak onafhankelijk zijn. In het tegenovergestelde geval zou $\overline{X^2}$ evenredig zijn met het oppervlak van den bol.

Deze uitkomsten zouden geheel bevredigend zijn van het standpunt der kinetische theorie, als men ze kon terugvinden door de molekulaire krachten en bewegingen in het oog te vatten. Doch dit gelukt bij een vloeistof niet.

Echter gelukt het wel de overeenkomstige kwestie op te lossen voor een bolvormig deeltje, met straal a, dat zich beweegt in een zoo sterk verdund *gas*, dat van de onderlinge botsingen der gasmolekulen mag worden afgezien. Ter vereenvoudiging onderstelt prof. LORENTZ, dat het oppervlak van het deeltje volkomen glad is, dat zijne afmetingen groot zijn in vergelijking met die der molekulen en dat de botsingen met de molekulen veerkrachtig zijn. Ten gevolge van de onderlinge onafhankelijkheid van de stooten, die uitgeoefend worden op de verschillende oppervlakte-elementen en die een zelfde oppervlakte-element ontvangt van de verschillende molekulen of gedurende opeenvolgende tijdsdeelen τ, zijn $\overline{X^2}$ en w nu evenredig met a^2, in tegenstelling met hetgeen het geval was bij het in de vloeistof gesuspendeerde deeltje. Past men de wet van MAXWELL voor de snelheidsverdeeling der gasmolekulen toe, zoo worden de uitdrukkingen voor $\overline{X^2}$ en w zoodanig, dat tusschen deze grootheden weer de algemeene betrekking (7) bestaat.

HOOFDSTUK II.

De spontane electriciteitsbeweging in geleiders.

§ 1. Wij zullen in dit hoofdstuk eerst behandelen de spontane electriciteitsbeweging in één gesloten keten, dan die in een systeem van N gesloten ketens, waarbij wederkeerige inductie plaats heeft, en eindelijk die in een systeem van N ketens, elk met een condensator. Daarna zal het gemiddelde kwadraat van den electromotorischen impuls in een volume-element berekend worden. Wat hieronder verstaan wordt, zal nader worden verklaard.

Zij in het geval van één gesloten keten, r de weerstand van de keten, F de resultante der grillig veranderende krachten, die op de electriciteit werken en haar oorsprong vinden in de warmtebeweging, d. w. z. de „lijnintegraal der electrische kracht" of de „electromotorische kracht", waartoe zij aanleiding geven; verder X de spontane electromotorische impuls, bepaald door

$$X = \int_{\tau} F \, dt. \tag{8}$$

De integratie heeft hierbij plaats over een klein tijdsdeel τ; over de grootte van τ zal nader gesproken worden. [1])

Men vindt voor de gemiddelde waarde van X^2 de uitdrukking

$$\overline{X^2} = 2\, r\, k\, T\, \tau, \tag{9}$$

zooals wij in § 2 zullen zien. Het gemiddelde wordt hierbij genomen hetzij voor een groot aantal onderling gelijke ketens

[1]) Zie p. 11.

in dezelfde omstandigheden, hetzij, bij één keten, voor een groot aantal oogenblikken, telkens gedurende een even grooten tijd τ. Men lette op de overeenkomst tusschen de formules (7) en (9).

§ 2. *De spontane electriciteitsbeweging in een gesloten keten.* Terwijl Mevr. DE HAAS-LORENTZ [1]) deze kwestie in het kort behandelt, verwijzend naar de overeenkomstige oplossing van het vraagstuk der Brown'sche beweging van een gesuspendeerd deeltje, zullen wij, daar wij van laatstgenoemd vraagstuk slechts de uitkomsten vermeldden, de nu te behandelen kwestie wat uitvoeriger bespreken. De boven door F voorgestelde electromotorische kracht, die wij ons moeten voorstellen als onophoudelijk in richting wisselend, brengt in de keten een eveneens wisselenden electrischen stroom teweeg. Wij zullen met i de sterkte daarvan op zeker oogenblik aanduiden, en met e de hoeveelheid electriciteit, die sinds een bepaald oogenblik door een doorsnede van de keten is gegaan, terwijl het teeken van e aangeeft in welke richting de verplaatsing geschied is; is ten slotte L de coëfficiënt van zelfinductie van de keten, dan heeft men de vergelijkingen

$$i = \frac{de}{dt}$$

en

$$ri = -L\frac{di}{dt} + F. \tag{10}$$

Hierin hebben r en F de in § 1 genoemde beteekenis. De vergelijking (10) is analoog aan (6); i en L correspondeeren met v en m uit het vraagstuk der Brown'sche beweging. Wij passen nu een methode toe, welke nauw samenhangt met die van EINSTEIN en HOPF. Integreer de vergelijking (10) over het k^{de} van een aantal gelijke tijdsdeelen τ, welke tijdsdeelen zoo klein zijn, dat in het eerste lid i gedurende dien tijd τ als constant beschouwd mag worden. Is i_{k-1} de stroomsterkte aan het begin van het k^{de} tijdsdeel, dan vindt men

$$r\, i_{k-1}\, \tau = -L\,(i_k - i_{k-1}) + X_k,$$

[1]) G. L. DE HAAS-LORENTZ, l. c., p. 82; Duitsche vertaling, p. 85.

dus

$$i_k = \beta\, i_{k-1} + \frac{X_k}{L}, \tag{11}$$

waarin

$$\beta = 1 - \frac{r\,\tau}{L}. \tag{12}$$

Uit (11) volgt

$$i_1 = \beta\, i_0 + \frac{X_1}{L},$$

$$i_2 = \beta\, i_1 + \frac{X_2}{L} = \beta^2 i_0 + \frac{1}{L}(\beta X_1 + X_2),$$

$$i_3 = \beta\, i_2 + \frac{X_3}{L} = \beta^3 i_0 + \frac{1}{L}(\beta^2 X_1 + \beta X_2 + X_3), \text{ enz.}$$

Is i_n de waarde van i aan het einde van het n^{de} tijdsdeel, dan is

$$i_n = \beta^n i_0 + \frac{1}{L}(\beta^{n-1} X_1 + \beta^{n-2} X_2 + \ldots + X_n). \tag{13}$$

Men verheffe beide leden van deze vergelijking in de tweede macht en neme van elken term van de aldus verkregen vergelijking het gemiddelde voor een zeer groot aantal gelijke ketens; schrijft men $\overline{i^2}$ voor $\overline{i^2_n}$, waarbij $\overline{i^2_n}$ het gemiddelde van i^2_n voorstelt, dan komt er

$$\overline{i^2} = \beta^{2n}\, \overline{i_0^2} + \frac{1}{L^2}(\beta^{2(n-1)}\, \overline{X_1^2} + \beta^{2(n-2)}\, \overline{X^2_2} + \ldots + \overline{X^2_n});$$

immers

$$\overline{i_0\, X_k} = 0,$$

omdat X_k onafhankelijk is van i_0 en dus de factoren i_0 en X_k even goed tegengestelde als dezelfde teekens kunnen hebben. Hetzelfde geldt voor de impulsen X_k en X_l in twee verschillende tijdsintervallen τ, zoodat ook

$$\overline{X_k\, X_l} = 0$$

is. Wij laten nu n onbepaald toenemen. De term met i_0 kan dan verwaarloosd worden, omdat $\beta < 1$ is. Daar bovendien $\overline{X_1{}^2}, \overline{X_2{}^2}, \ldots, \overline{X_n{}^2}$ een gemeenschappelijke waarde hebben, welke we door $\overline{X^2}$ voorstellen, is

$$\overline{i^2} = \frac{1}{L^2}\, \frac{\overline{X^2}}{1 - \beta^2}. \tag{14}$$

Met het oog op (12) kan men voor $L^2(1-\beta^2)$ schrijven $2\,r\,L\,\tau$, daar de term met τ^2 verwaarloosd kan worden ten opzichte van dien met τ. Stelt men verder het gemiddelde $\frac{1}{2}L\overline{i^2}$ van de energie der electriciteitsbeweging gelijk aan de gemiddelde kinetische energie $\frac{1}{2}k\,T$, die bij dezelfde temperatuur T een gasmolekuul voor één vrijheidsgraad heeft, zoo vindt men uit (14) de betrekking

$$\overline{X^2} = 2\,r\,k\,T\,\tau. \qquad (9)$$

Dat de grootte van de impulsen met de temperatuur toeneemt, was te verwachten. Van de evenredigheid van $\overline{X^2}$ met het tijdsdeel τ kan men zich op de volgende wijze rekenschap geven: Zijn X_k, resp. X_l de impulsen gedurende de opeenvolgende tijdsdeelen τ_k, resp. τ_l, dan geldt voor het gemiddelde kwadraat van den impuls gedurende den tijd $\tau_k + \tau_l$ de vergelijking

$$\overline{(X_k + X_l)^2} = \overline{X_k^2} + \overline{X_l^2},$$

omdat

$$\overline{X_k X_l} = 0$$

is. Voor den dubbelen tijd $\tau_k + \tau_l$ is dus het gemiddelde van het kwadraat van den impuls tweemaal zoo groot als voor den enkelen tijd τ_k. Op dezelfde wijze kan men aantoonen, dat het voor n op elkaar volgende tijdsdeelen τ, tezamen genomen, n maal zoo groot is als voor één tijdsdeel.

Dat eindelijk $\overline{X^2}$, evenals r, evenredig is met de lengte van de keten, kan men aldus begrijpelijk maken: Zijn X_p en X_q de impulsen in twee opeenvolgende, gelijke deelen van de keten, en $X_{p,q}$ het deel van den impuls in de keten, dat beantwoordt aan X_p en X_q tezamen, dan is

$$\overline{X^2_{p,q}} = \overline{(X_p + X_q)^2} = \overline{X^2_p} + \overline{X^2_q},$$

omdat

$$\overline{X_p X_q} = 0$$

is.

Daar verder

$$\overline{X^2_p} = \overline{X^2_q}$$

is, heeft men

$$\overline{X^2_{p,q}} = 2\,\overline{X^2_p} = 2\,\overline{X^2_q}.$$

Hierin ligt de evenredigheid van $\overline{X^2}$ met de lengte van de keten opgesloten. Men kan de vergelijking (9) ook sneller vinden, door n.l. niet op n opeenvolgende tijdsdeelen τ de aandacht te vestigen, doch slechts op één interval. Uit

$$i_1 = \beta\, i_0 + \frac{X_1}{L}$$

volgt, als men geheel op dezelfde wijze te werk gaat als boven,

$$\overline{i^2_1} = \beta^2\, \overline{i^2_0} + \frac{\overline{X^2_1}}{L^2}.$$

Daar nu

$$\overline{i^2_1} = \overline{i^2_0} = \overline{i^2}$$

en

$$\overline{X^2_1} = \overline{X^2}$$

te stellen is, vindt men weer de vergelijking (14). De beschouwing van n tijdsdeelen heeft echter het voordeel, dat zij leidt tot de formule (13), waaraan men ziet hoe de invloed van i_0 en die der impulsen in den loop van den tijd zich minder doen gevoelen.

Mevr. DE HAAS—LORENTZ berekent ook de hoeveelheid electriciteit e, die in den tijd $t = n\,\tau$ door een doorsnede van de keten stroomt; de formule voor $\overline{e^2}$ luidt:

$$\overline{e^2} = \frac{2\,k\,T\,t}{r}.$$

Zij komt overeen met de uitdrukking van EINSTEIN (zie Hoofdstuk I, § 6) voor het gemiddelde kwadraat $\overline{s^2}$ van den door een gesuspendeerd deeltje in een bepaalden tijd bereikten afstand.

§ 3. *De spontane electriciteitsbeweging in een systeem van N gesloten ketens.*

Is i_k de stroomsterkte, F_k de electromotorische kracht in de k^{de} keten, r_k de weerstand en L_{kk} de coëfficiënt van zelfinductie van deze keten, en is $L_{kl} = L_{lk}$ de coëfficiënt van wederkeerige inductie der k^{de} en l^{de} keten, dan heeft men de N vergelijkingen:

$$\left.\begin{aligned}
&\left(r_1 + L_{11}\frac{d}{dt}\right)i_1 + L_{12}\frac{d\,i_2}{dt} + L_{13}\frac{d\,i_3}{dt} + \ldots + L_{1N}\frac{d\,i_N}{dt} = F_1\\
&L_{21}\frac{d\,i_1}{dt} + \left(r_2 + L_{22}\frac{d}{dt}\right)i_2 + L_{23}\frac{d\,i_3}{dt} + \ldots + L_{2N}\frac{d\,i_N}{dt} = F_2\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&L_{N1}\frac{d\,i_1}{dt} + L_{N2}\frac{d\,i_2}{dt} + L_{N3}\frac{d\,i_3}{dt} + \ldots + \left(r_N + L_{NN}\frac{d}{dt}\right)i_N = F_N
\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Integreer deze vergelijkingen over het meergenoemde tijdsdeel τ; stel de waarde van i_k aan het einde van τ voor door i'_k; schrijf verder, analoog aan vroegere notaties,

$$X_k = \int_\tau F_k\,dt.$$

Het resultaat van de integratie van de eerste der vergelijkingen (15) is

$$L_{11}\,i'_1 + L_{12}\,i'_2 + \ldots\ldots + L_{1N}\,i'_N =$$
$$= (L_{11} - r_1\,\tau)\,i_1 + L_{12}\,i_2 + \ldots\ldots + L_{1N}\,i_N + X_1. \quad (15a)$$

Verheft men beide leden dezer vergelijking tot de tweede macht en neemt men het gemiddelde hetzij over zeer vele gelijke systemen, elk van N ketens, hetzij voor één systeem, over vele verschillende oogenblikken, het telkens gedurende een even grooten tijd τ beschouwende, zoo vindt men:

$$\overline{(L_{11}\,i'_1 + L_{12}\,i'_2 + \ldots\ldots + L_{1N}\,i'_N)^2} =$$
$$= \overline{(L_{11}\,i_1 + L_{12}\,i_2 + \ldots\ldots + L_{1N}\,i_N)^2} -$$
$$- 2\,\overline{i_1\,(L_{11}\,i_1 + L_{12}\,i_2 + \ldots\ldots + L_{1N}\,i_N)}\,.\,r_1\,\tau + \overline{X^2_1}.$$

Immers de term met τ^2 mag verwaarloosd worden, terwijl gemiddelden zooals $\overline{i_k\,X_1}$ nul zijn. Daar verder

$$\overline{(L_{11}\,i'_1 + L_{12}\,i'_2 + \ldots + L_{1N}\,i'_N)^2} =$$
$$= \overline{(L_{11}\,i_1 + L_{12}\,i_2 + \ldots + L_{1N}\,i_N)^2},$$

en, volgens § 2 van dit hoofdstuk,

$$\overline{X^2_1} = 2\,r_1\,k\,T\,\tau$$

is, komt er

$$\overline{i_1\,(L_{11}\,i_1 + L_{12}\,i_2 + \ldots + L_{1N}\,i_N)} = k\,T. \quad (16)$$

Geheel op dezelfde wijze te werk gaande met de andere vergelijkingen van (15), vindt men nog $N - 1$ betrekkingen zooals (16), wanneer de eerste is

$$\overline{i_2 (L_{21} i_1 + L_{22} i_2 + \ldots + L_{2N} i_N)} = k\, T$$

en de laatste

$$\overline{i_N (L_{N1} i_1 + L_{N2} i_2 + \ldots + L_{NN} i_N)} = k\, T.$$

Telt men deze N vergelijkingen bij elkaar op en deelt men door 2, dan vindt men

$$\begin{aligned} &{}^1\!/_2 L_{11} \overline{i^2_1} + L_{12} \overline{i_1 i_2} + L_{13} \overline{i_1 i_3} + \ldots + L_{1N} \overline{i_1 i_N} + {}^1\!/_2 L_{22} \overline{i^2_2} + \\ &+ L_{23} \overline{i_2 i_3} + \ldots + L_{2N} \overline{i_2 i_N} + \ldots + {}^1\!/_2 L_{N-1, N-1} \overline{i^2_{N-1}} + \\ &+ L_{N-1, N} \overline{i_{N-1} i_N} + {}^1\!/_2 L_{NN} \overline{i^2_N} = {}^1\!/_2 N\, k\, T. \end{aligned}$$

Het gemiddelde van de magnetische energie is dus, zooals te verwachten was, gelijk aan de kinetische energie behoorende bij N vrijheidsgraden, bij de temperatuur T.

Wij merken op, dat men echter ook een voldoende aantal vergelijkingen kan vinden om de middelwaarden van alle tweede machten en producten van (twee) stroomsterkten te leeren kennen. Men heeft n.l. N vergelijkingen van den vorm (15*a*), en men kan deze niet alleen elk in de tweede macht verheffen, zooals wij reeds deden, maar men kan ze ook twee aan twee vermenigvuldigen. Wanneer men b.v. (15*a*) vermenigvuldigt met

$$\begin{aligned} L_{21} i'_1 + L_{22} i'_2 + \ldots + L_{2N} i'_N &= L_{21} i_1 + \\ + (L_{22} - r_2 \tau) i_2 + \ldots &+ L_{2N} i_N + X_2, \end{aligned}$$

resultaat van de integratie van de tweede der vergelijkingen (15) over het tijdsdeel τ, en vervolgens de middelwaarden neemt, dan vindt men op dezelfde wijze als bij het nemen van de middelwaarden na de kwadrateering van (15*a*)

$$\begin{aligned} &r_1 (L_{21} \overline{i^2_1} + L_{22} \overline{i_1 i_2} + \ldots + L_{2N} \overline{i_1 i_N}) + \\ &+ r_2 (L_{11} \overline{i_1 i_2} + L_{12} \overline{i^2_2} + \ldots + L_{1N} \overline{i_2 i_N}) = 0 \qquad (16a). \end{aligned}$$

Immers de middelwaarde van

$$(L_{11} i_1 + L_{12} i_2 + \ldots + L_{1N} i_N)\,(L_{21} i_1 + L_{22} i_2 + \ldots + L_{2N} i_N)$$

is gelijk aan die van

$$(L_{11} i'_1 + L_{12} i'_2 + \ldots + L_{1N} i'_N)\,(L_{21} i'_1 + L_{22} i'_2 + \ldots L_{2N} i'_N),$$

terwijl

$$\overline{X_1 X_2} = 0$$

is. Men verkrijgt $^1/_2\, N\,(N-1)$ vergelijkingen van den vorm (16*a*); daar men reeds N vergelijkingen van den vorm (16) had, heeft men in het geheel $^1/_2\, N\,(N+1)$ betrekkingen tusschen de middelwaarden der tweede machten en die der producten van (twee) stroomsterkten. Daar nu het aantal dezer tweede machten N is, en het aantal der producten $^1/_2\, N\,(N-1)$, is het totale aantal der onbekenden $^1/_2\, N\,(N+1)$ evenals dat der vergelijkingen, waaruit men ze moet bepalen.

Het geval van *twee* ketens zullen wij nader uitwerken.

Ter bepaling van $\overline{i^2_1}$, $\overline{i_1\, i_2}$ en $\overline{i^2_2}$ hebben wij nu, analoog aan (16) en (16*a*), de drie betrekkingen

$$L_{11}\,\overline{i^2_1} + L_{12}\,\overline{i_1\, i_2} = k\,T;\quad L_{21}\,\overline{i_1\, i_2} + L_{22}\,\overline{i^2_2} = k\,T;$$

$$r_1\, L_{21}\,\overline{i^2_1} + (r_1\, L_{22} + r_2\, L_{11})\,\overline{i_1\, i_2} + r_2\, L_{12}\,\overline{i^2_2} = 0.$$

Men vindt hieruit

$$\overline{i^2_1} = \frac{L_{22}\, k\, T}{L_{11}\, L_{22} - L^2_{12}};\quad \overline{i_1\, i_2} = -\frac{L_{12}\, k\, T}{L_{11}\, L_{22} - L^2_{12}};$$

$$\overline{i^2_2} = \frac{L_{11}\, k\, T}{L_{11}\, L_{22} - L^2_{12}}.$$

Uit deze uitkomsten volgt voor de gemiddelde magnetische energie

$$^1/_2\, L_{11}\,\overline{i^2_1} + L_{12}\,\overline{i_1\, i_2} + {}^1/_2\, L_{22}\,\overline{i^2_2} = k\,T,$$

welke waarde beantwoordt aan de kinetische energie behoorende bij twee vrijheidsgraden, bij de temperatuur T.

Naar aanleiding van de voor $\overline{i^2_1}$, $\overline{i_1\, i_2}$ en $\overline{i^2_2}$ gevonden uitkomsten merken wij nog het volgende op. Stel, dat de positieve richtingen voor i_1 en i_2 zoo gekozen worden, dat L_{12} positief is. Nu is $L_{11}\, L_{22} - L^2_{12}$ positief, omdat voor alle waarden der stroomsterkten i_1 en i_2 de magnetische energie $^1/_2\, L_{11}\, i^2_1 + L_{12}\, i_1\, i_2 + {}^1/_2\, L_{22}\, i^2_2$ positief is. Trouwens, als $L_{11}\, L_{22} - L^2_{12}$ negatief was, zouden $\overline{i^2_1}$ en $\overline{i^2_2}$ negatief zijn, wat onmogelijk is. Echter is $\overline{i_1\, i_2}$ negatief, hetgeen wil zeggen, dat i_1 en i_2 in meerdere mate tegengesteld dan gelijk teeken hebben. Zijn dus b.v. de beide ketens cirkels, waarvan de assen samenvallen, en kiest men in beide dezelfde richting als de positieve, (zoodat L_{12} positief is,) dan volgt uit het negatief zijn van $\overline{i_1 i_2}$, dat de spontane electriciteitsbewegingen in de beide ketens in meerdere mate tegengestelde dan dezelfde richting hebben.

§ 4. *De spontane electriciteitsbeweging in een systeem van N geleidende ketens, elk met een condensator.* Zijn voor de μ^{de} keten: C_μ de capaciteit van den condensator, ϕ_μ het potentiaalverschil tusschen de condensatorplaten, e_μ en $-e_\mu$ de ladingen dezer platen, terwijl de overige grootheden door dezelfde letters worden voorgesteld als in de vorige paragraaf, dan heeft men N vergelijkingen van den vorm

$$\frac{d\,e_\mu}{d\,t} - i_\mu = 0. \tag{17}$$

Men verkrijgt die N vergelijkingen door in (17) μ resp. gelijk te stellen aan 1, 2, ..., N. Naast deze N vergelijkingen heeft men er nog N andere van den vorm

$$L_{\mu 1}\frac{d\,i_1}{dt} + L_{\mu 2}\frac{d\,i_2}{dt} + \ldots + \left(r_\mu + L_{\mu\,\mu}\frac{d}{dt}\right) i_\mu + \ldots + \\ + L_{\mu N}\frac{d\,i_N}{dt} + \frac{e_\mu}{C_\mu} = F_\mu\,, \tag{18}$$

waarbij

$$\phi_\mu = \frac{e_\mu}{C_\mu}$$

gesteld is.

In de *vorige* paragraaf hadden wij de N vergelijkingen (15) met de N veranderlijken $i_1, i_2, \ldots, i_N$, en $^1/_2\, N\,(N + 1)$ betrekkingen ter bepaling van de $^1/_2\, N\,(N + 1)$ middelwaarden van de kwadraten en producten van (twee) stroomsterkten. In *deze* paragraaf hebben wij de $2\,N = P$ vergelijkingen (17) en (18) met de P veranderlijken $e_1, \ldots, e_N, i_1, \ldots, i_N$; wij kunnen dus nu $^1/_2\, P\,(P + 1)$ betrekkingen opstellen ter bepaling van de $^1/_2\, P\,(P + 1)$ middelwaarden $\overline{e^2_1}$, $\overline{e_1\, i_1}$, $\overline{e_1\, i_2}$, enz.

Wij zullen ook de oplossing dezer vergelijkingen aangeven, waarbij wij opmerken, dat wij, aangezien de vergelijkingen lineair zijn, er mee kunnen volstaan te laten zien, dat de voor de gemiddelden op te geven waarden aan alle betrekkingen voldoen.

Integreert men de vergelijking (17) over een tijdsdeel τ, en stelt men de waarde van e_μ aan het einde van dat tijdsdeel voor door e'_μ, dan vindt men

$$e'_\mu = e_\mu + i_\mu \tau. \qquad (17a)$$

Verheft men beide leden van (17a) in de tweede macht, en neemt men het gemiddelde, b.v. over vele verschillende oogenblikken, het systeem telkens gedurende een even grooten tijd τ beschouwende, dan vindt men

$$\overline{e_\mu \, i_\mu} = 0, \qquad (19)$$

omdat

$$\overline{e'^2_\mu} = \overline{e^2_\mu}$$

is, en de term met τ^2 verwaarloosd kan worden.

Men vermenigvuldige nu (17a) met de vergelijking

$$e'_\nu = e_\nu + i_\nu \tau, \qquad (17b)$$

die men krijgt door in (17a) den index μ te veranderen in ν, en die dus geldt voor een willekeurige andere keten, n.l. de ν^{de}. Men vindt, weer de middelwaarden nemend, en bedenkend, dat

$$\overline{e'_\mu \, e'_\nu} = \overline{e_\mu \, e_\nu}$$

is,

$$\overline{e_\mu \, i_\nu} + \overline{e_\nu \, i_\mu} = 0.$$

Het blijkt nu, dat aan alle verdere voorwaarden voldaan kan worden, als men stelt

$$\overline{e_\mu \, i_\nu} = 0. \qquad (20)$$

Integreert men de vergelijking (18) over een tijdsdeel τ, dan vindt men, dezelfde notaties als in de vorige paragraaf bezigend,

$$L_{\mu 1} i'_1 + L_{\mu 2} i'_2 + \ldots + L_{\mu\mu} i'_\mu + \ldots + L_{\mu N} i'_N = L_{\mu 1} i_1 +$$

$$+ L_{\mu 2} i_2 + \ldots + L_{\mu\mu} i_\mu + \ldots + L_{\mu N} i_N - r_\mu i_\mu \tau - \frac{e_\mu}{C_\mu}\tau + X_\mu.$$

Als men stelt

$$\left.\begin{array}{l} L_{11}\, i_1 + L_{12}\, i_2 + \ldots + L_{1\,N}\, i_N = p_1, \\ L_{21}\, i_1 + L_{22}\, i_2 + \ldots + L_{2\,N}\, i_N = p_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ L_{N\,1}\, i_1 + L_{N\,2}\, i_2 + \ldots + L_{N\,N}\, i_N = p_N, \end{array}\right\} \quad (21)$$

dan heeft men N vergelijkingen van den vorm

$$p'_\mu = p_\mu - r_\mu\, i_\mu\, \tau - \frac{e_\mu}{C_\mu}\tau + X_\mu, \qquad (18a)$$

waarin p'_μ de waarde van p_μ aan het einde van het tijdsdeel τ voorstelt.

Men verheffe beide leden der vergelijking (18*a*) in de tweede macht, en neme daarna het gemiddelde op dezelfde wijze als met (17*a*) geschiedde.

Daar uit (19), (20) en (21) volgt, dat

$$\overline{p_\mu\, e_\mu} = 0$$

is, en omdat verder

$$\overline{e_\mu\, X_\mu} = 0$$

is, vindt men op deze wijze

$$\overline{p_\mu\, i_\mu} = k\, T. \qquad (16')$$

Vermenigvuldigt men nu (18*a*) met de vergelijking, die men uit (18*a*) krijgt door den index μ te veranderen in ν, en neemt men daarna de middelwaarden, dan vindt men

$$r_\nu\, \overline{p_\mu\, i_\nu} + r_\mu\, \overline{p_\nu\, i_\mu} = 0, \qquad (16a')$$

waarin $\mu \neq \nu$ is.

Alle voorwaarden worden nu verkregen, als wij ook nog een vergelijking van het stel (18*a*) met een vergelijking (17*a*) vermenigvuldigen, zoowel voor gelijke als voor ongelijke indices, en daarna de middelwaarden te nemen. Omdat

$$\overline{p'_\mu\, e'_\mu} = \overline{p_\mu\, e_\mu}$$

is, komt er, bij gelijke indices (μ),

$$\overline{p_\mu\, i_\mu} - \frac{\overline{e^2_\mu}}{C_\mu} = 0,$$

of, in verband met (16′),

$$\frac{\overline{e^2_\mu}}{C_\mu} = k\, T.$$

Vermenigvuldigt men (18*a*) met (17*b*), dan vindt men met het oog op (20), en omdat

$$\overline{p'_\mu e'_\nu} = \overline{p_\mu e_\nu}$$

is,

$$\overline{p_\mu i_\nu} - \frac{\overline{e_\mu e_\nu}}{C_\mu} = 0 \quad (\mu \neq \nu).$$

Aan deze vergelijking en (16*a*′) wordt voldaan, als men neemt, voor $\mu \neq \nu$,

$$\overline{e_\mu e_\nu} = 0$$

en

$$\overline{p_\mu i_\nu} = 0. \qquad (16'')$$

In de vergelijkingen (16′) en (16″) komen, als men de waarde van p_μ (uit (21)) substitueert, de $^1/_2\, N\,(N+1)$ grootheden $\overline{i_1^2}$, $\overline{i_1 i_2}$, enz. voor. Maar het aantal vergelijkingen is grooter, en wel gelijk aan N^2 (omdat $\overline{p_\mu i_\nu}$ niet hetzelfde is als $\overline{p_\nu i_\mu}$). Wij moeten dus nog bewijzen, dat door geschikte waarden van $\overline{i_1^2}$, $\overline{i_1 i_2}$, enz. aan alle vergelijkingen (16′) en (16″) voldaan wordt.

Welke die waarden moeten zijn, kan men als volgt nagaan. Lost men uit (21) $i_1, i_2, \ldots, i_N$ op, dan krijgt men uitdrukkingen van den vorm

$$i_1 = \lambda_{11} p_1 + \lambda_{21} p_2 + \ldots + \lambda_{N1} p_N,$$
$$i_2 = \lambda_{12} p_1 + \lambda_{22} p_2 + \ldots + \lambda_{N2} p_N,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$i_N = \lambda_{1N} p_1 + \lambda_{2N} p_2 + \ldots + \lambda_{NN} p_N.$$

Hierin is, omdat $L_{\mu\nu} = L_{\nu\mu}$ is, $\lambda_{\nu\mu} = \lambda_{\nu\mu}$, terwijl tusschen de coëfficiënten L en λ de betrekkingen bestaan

$$\Sigma\,(a)\, L_{\mu a}\, \lambda_{\mu a} = 1 \qquad (22)$$

en, voor $\nu \neq \mu$,

$$\Sigma\,(a)\, L_{\mu a}\, \lambda_{\nu a} = 0, \qquad (22a)$$

waarin a resp. gelijk aan 1, 2, ..., N genomen moet worden.

Vermenigvuldigt men nu de aan (16′) en (16″) ontleende vergelijkingen

$$\overline{p_1 i_1} = k\,T,\ \overline{p_2 i_1} = 0, \ldots\ldots, \overline{p_N i_1} = 0$$

resp. met

$$\lambda_{11}, \lambda_{21}, \ldots\ldots, \lambda_{N1},$$

en telt men de resultaten op, dan vindt men, met het oog op (22) en (22*a*),

$$\overline{i_1^{\,2}} = \lambda_{11}\, k\, T.$$

Door nu dezelfde vergelijkingen resp. met

$$\lambda_{12}, \lambda_{22}, \ldots\ldots, \lambda_{N2}$$

te vermenigvuldigen, en weer de resultaten te sommeeren, krijgt men evenzoo

$$\overline{i_1\, i_2} = \lambda_{12}\, k\, T.$$

De gezochte middelwaarden moeten dus zijn

$$\overline{i^2_\mu} = \lambda_{\mu\,\mu}\, k\, T,$$

$$\overline{i_\mu\, i_\nu} = \lambda_{\mu\,\nu}\, k\, T.$$

Hierdoor wordt werkelijk aan de vergelijkingen (16′) en (16″) voldaan, want men heeft

$$\overline{p_\mu\, i_\nu} = \sum (a)\, L_{\mu\,a}\, \overline{i_a\, i_\nu} = \sum (a)\, L_{\mu\,a}\, \lambda_{\nu\,a}\, k\, T,$$

en dit is, blijkens (22) en (22*a*), gelijk aan k T voor $\nu = \mu$, en gelijk aan nul voor $\nu \neq \mu$.

Wij merken nog het volgende op. Door de N vergelijkingen van den vorm (16′) te sommeeren, en het resultaat door 2 te deelen, toont men aan, dat het gemiddelde van de totale magnetische energie gelijk is aan $^1/_2$ N k T. Dezelfde uitkomst vindt men voor het gemiddelde van de totale electrische energie, wanneer men de N vergelijkingen van den vorm

$$\frac{\overline{e^2_\mu}}{C_\mu} = k\, T$$

(zie boven) bij elkaar optelt en het resultaat door 2 deelt; immers $^1/_2\, \dfrac{\overline{e^2_\mu}}{C_\mu}$ is het gemiddelde van het electrische arbeidsvermogen voor de μ^{de} keten.

Wij wijzen er tenslotte op, dat de vergelijkingen (16′) en (16*a*′) van deze paragraaf resp. overeenkomen met de betrekkingen van den vorm (16) en (16*a*) van de vorige paragraaf.

§ 5. De *electromotorische impuls in een volume-element d S.* Wij zullen nu berekenen het gemiddelde kwadraat van den electromotorischen impuls, die in een volume-element d S moet bestaan, opdat voor het gemiddelde kwadraat van den totalen impuls in een keten de uitdrukking gelde

$$\overline{X^2} = 2\, r\, k\, T\, \tau,$$

die wij in § 2 gevonden hebben.

Bij deze berekening zal gebruik gemaakt worden van een door prof. LORENTZ [1]) afgeleide reciprociteitsstelling, die voor een willekeurig stelsel van lichamen geldt. Vooraf zegt prof. LORENTZ [2]): „Bestaat in zulk een (oneindig kleine) ruimte (d S), liggende aan het punt P, een electromotorische kracht $\mathfrak{a}\, e^{int}$, waarin $\mathfrak{a}$ een reëelen vector voorstelt, die in alle punten van dS dezelfde richting h en dezelfde grootte $|\mathfrak{a}|$ heeft, dan zeggen wij, dat in het punt P een „electromotorische werking" van de richting h bestaat, waarvan de amplitudo en de phase door het reëele deel van $|\mathfrak{a}|\, dS\, e^{int}$ bepaald wordt. Wij stellen die werking door het teeken

$$\mathfrak{a}\, dS\, e^{int}$$

voor." Dan volgt de bedoelde reciprociteitsstelling [3]):

„Wanneer een electromotorische werking, die in een punt P in de richting h plaats heeft, in een punt P′ een stroom teweegbrengt, waarvan de ontbondene volgens een willekeurige richting h′ de amplitudo μ en de phase ν heeft, dan zal een electromotorische werking in P′ in de richting h′, als zij in amplitudo en phase met de zooevengenoemde electromotorische werking overeenstemt, in het punt P een stroom doen ontstaan, waarvan de ontbondene volgens de richting h juist diezelfde amplitudo μ en diezelfde phase ν heeft."

Deze stelling, die voor periodieke verschijnselen is afgeleid, zal nu hier op grillig veranderende electriciteitsbewegingen

---

[1]) H. A. LORENTZ, Versl. Kon. Ak. van Wet. Amsterdam, d. XIV, 1e ged. (1905), p. 345 en p. 438. Ook: Math. Encycl. V. 13, p. 114. Bij MAXWELL komen eveneens reciprociteitsstellingen voor.

[2]) Genoemde Versl., p. 352.

[3]) l. c., p. 353.

worden toegepast; ten aanzien van dezen overgang merken wij het volgende op.

Wij vestigen onze aandacht op twee gelijke volume-elementen dS en dS′; zij h een bepaalde richting in dS en evenzoo h′ een richting in dS′. Wanneer wij nu over electromotorische krachten, electrische stroomen, enz. zullen spreken, zullen wij de ontbondenen van deze grootheden bedoelen volgens die richtingen h en h′.

Volgens de reciprociteitsstelling heeft men: Als een electromotorische kracht $a \cos(n t + p)$, in dS werkende, een stroom $b \cos(n t + q)$ in dS′ teweegbrengt, zal omgekeerd een in dS′ werkende electromotorische kracht $a \cos(n t + p)$ een stroom $b \cos(n t + q)$ in dS teweegbrengen. Hieruit volgt, daar het bovenstaande voor willekeurige waarden van n en p geldt, en daar men een grillig veranderlijke electromotorische kracht over een lang tijdsverloop door een Fourier-reeks kan voorstellen, deze stelling: Geeft een in dS werkende electromotorische kracht $f(t)$ aanleiding tot een stroom $\phi(t)$ in dS′, dan zal omgekeerd een electromotorische kracht $f(t)$, die in dS′ werkt, een stroom $\phi(t)$ in dS teweegbrengen. Dus: dezelfde electriciteitsbeweging, die in dS′ ontstaat, als in dS zekere met den tijd veranderlijke electromotorische kracht K werkt, zal men in dS krijgen, als men een in elk opzicht met K overeenkomende electromotorische kracht in dS′ laat werken.

Wij zullen ons voorstellen, wat bij ketens van kleine afmetingen geoorloofd zal zijn, dat een electromotorische kracht in één punt zich oogenblikkelijk in elk ander punt doet gevoelen. Dan is in het voorgaande sprake van de stroomen, die *gelijktijdig* met de electromotorische krachten bestaan.

§ 6. Men beschouwe een systeem, bestaande uit een geleider G van den vorm van een rechthoekig parallelepipedum, waarvan de lengte-afmeting zeer groot is in vergelijking met de andere afmetingen, en waarvan de uiteinden door een geleidenden draad D verbonden zijn; de weerstand van het parallelepipedum zij r, die van den draad r′.

Er zal in het volgende sprake zijn van de electriciteitsbeweging, die door de in het parallelepipedum G werkende impulsen wordt teweeggebracht. Men weet reeds, dat voor den totalen impuls in G in de richting der lengte geldt

$$\overline{X^2} = 2\,r\,k\,T\,\tau. \tag{9}$$

Immers, wij hebben allen grond om deze betrekking niet alleen op een geheele lineaire keten, maar ook op een deel daarvan toe te passen. Met deze laatste opmerking staat ook in verband hetgeen in § 2 van dit hoofdstuk gezegd werd ter toelichting van de evenredigheid van $\overline{X^2}$ met den weerstand (lengte) van den draad.

De lengterichting van G noemen wij de richting h; wij nemen aan, dat slechts die component van de electromotorische kracht F, die langs G in de lengterichting daarvan werkt, aanleiding geeft tot een electriciteitsbeweging in den draad. Wij bepalen onze aandacht tot dezen h-component van F, en letten dienovereenkomstig ook alleen op den h-component van de electromotorische krachten in de volume-elementen van G, waarover later sprake zal zijn.

Is i de sterkte van den stroom, die aan F beantwoordt, dan is

$$i = \frac{F}{r + r'}.$$

Integreert men deze vergelijking over een tijdsdeel τ, dan vindt men

$$\int_\tau i\,dt = \frac{X}{r + r'}, \tag{23}$$

als

$$X = \int_\tau F\,dt$$

is. Verheft men de vergelijking (23) in de tweede macht, en neemt men het gemiddelde, hetzij over vele systemen, gelijk aan het beschouwde, hetzij, voor één systeem, over vele oogenblikken, het telkens gedurende een even groot tijdsdeel τ beschouwende, dan komt er

$$\overline{\left(\int_\tau i\,dt\right)^2} = \frac{\overline{X^2}}{(r + r')^2}. \tag{24}$$

Daar wij $\overline{X^2}$ kennen (zie (9)), wordt uit de vergelijking (24) de geheele electriciteitsbeweging in den draad D, door de toevallige impulsen in het geheele parallelepipedum teweeggebracht, bekend.

Wij denken ons nu G verdeeld in onderling gelijke volume-elementen dS; zij e de onbekende, grillig veranderlijke electromotorische kracht, die in een bepaald element dS werkt. De grootte van de elementen zij zoodanig, dat in één element op één oogenblik e overal hetzelfde is. Wij nemen aan, dat de electromotorische krachten e, die in de verschillende volume-elementen dS werken, geheel onafhankelijk van elkaar zijn.

Zij i_e de stroom, die in den draad D veroorzaakt wordt door de electromotorische kracht e, in een element dS werkende. Duiden wij door S een sommatie aan over alle volume-elementen dS van G, dan kunnen wij voor het linkerlid der formule (24) schrijven

$$\overline{\left(\int_\tau i\,dt\right)^2} = S\,\overline{\left(\int_\tau i_e\,dt\right)^2}. \qquad (25)$$

Deze gelijkheid vindt haren grond in de onderlinge onafhankelijkheid der verschillende hoeveelheden doorgevoerde electriciteit $\int_\tau i_e\,dt$.

De electromotorische impuls x in dS hangt met de electromotorische kracht e samen volgens de betrekking

$$x = \int_\tau e\,dt.$$

Stel, dat $\varkappa$ den stroom voorstelt, die in D teweeggebracht wordt door de electromotorische kracht 1 in de richting h, werkende in dS, dan heeft men

$$i_e = \varkappa\, e.$$

Aan den impuls x beantwoordt de hoeveelheid doorgevoerde electriciteit

$$\int_\tau i_e\,dt = \varkappa \int_\tau e\,dt = \varkappa\, x.$$

Dus zal aan het gemiddelde kwadraat $\overline{x^2}$ van den impuls x beantwoorden het gemiddelde kwadraat van de hoeveelheid doorgevoerde electriciteit

$$\overline{\left(\int_\tau i_e\, dt\right)^2} = \varkappa^2 \overline{\left(\int_\tau e\, dt\right)^2} = \varkappa^2\, \overline{x^2}. \qquad (26)$$

Het gemiddelde is hier genomen hetzij over vele systemen, in elk der onderling gelijke parallelepipeda G telkens het volume-element dS in het oog vattend, dat dezelfde ligging in G heeft, hetzij, voor één systeem, over vele oogenblikken, het telkens gedurende een even groot tijdsinterval τ beschouwende.

Uit de vergelijkingen (24), (25) en (26) volgt nu

$$S\,(\varkappa^2\, \overline{x^2}) = \frac{\overline{X^2}}{(r + r')^2},$$

en dus, met het oog op (9),

$$S\,(\varkappa^2\, \overline{x^2}) = \frac{2\, r\, k\, T\, \tau}{(r + r')^2}.$$

Wij nemen nu aan, dat $\overline{x^2}$ voor alle elementen dS even groot is. Voor de laatste vergelijking kunnen wij dan schrijven

$$\overline{x^2}\, S\,(\varkappa^2) = \frac{2\, r\, k\, T\, \tau}{(r + r')^2}. \qquad (27)$$

§ 7. Om uit de vergelijking (27) $\overline{x^2}$ te kunnen afleiden, moeten wij $\varkappa$ kennen. Wilden wij deze grootheid rechtstreeks berekenen, dan zouden wij de electriciteitsbeweging in den draad D moeten kennen, die door de electromotorische kracht 1, werkende over de geheele uitgestrektheid van dS, wordt teweeggebracht. Dit is moeilijk, omdat bij de door zoodanige electromotorische kracht veroorzaakte electriciteitsbeweging de stroomlijnen, door dS in bepaalde richting loopende, voor een groot deel reeds door terugkeer binnen het parallelepipedum G gesloten zouden zijn.

Hier komt ons nu de hulpstelling te pas: men heeft n.l. het voordeel, dat bij de electriciteitsbeweging, die veroorzaakt wordt door een electromotorische kracht in een element van den draad, de stroomlijnen geacht kunnen worden in G evenwijdig aan de lengte daarvan te zijn en gelijkmatig over de doorsnede verdeeld, wegens de onderstelling over de afmetingen van G.

Men moet in het oog houden, dat in de reciprociteitsstelling sprake is van den stroom per eenheid van oppervlakte, terwijl in het voorgaande gesproken werd van den stroom over de geheele doorsnede van den draad.

Nu stelden wij: de electromotorische kracht 1, werkende over de uitgestrektheid van dS in de richting h, brengt in den draad een stroom $\varkappa$ teweeg, d. w. z. veroorzaakt daar een stroom per vlakte-eenheid gelijk aan $\frac{\varkappa}{\sigma}$, als σ de doorsnede van den draad is, welke doorsnede ondersteld wordt overal even groot te zijn. Dus zal een electromotorische kracht 1, werkende in een element van den draad met de grootte dS, in een element dS van G een stroom per vlakte-eenheid gelijk aan $\frac{\varkappa}{\sigma}$ teweegbrengen. Doordat wij dezen stroom kunnen berekenen, wordt $\varkappa$ bekend.

De lengte van het beschouwde element dS van den draad is $\frac{dS}{\sigma}$. Werkt over de uitgestrektheid van dit element de electromotorische kracht 1, dan is de lijnintegraal daarvan $\frac{dS}{\sigma}$. Dus de stroom in den draad en ook in het parallelepipedum G, gerekend over de geheele doorsnede, is

$$\frac{dS}{(r + r')\,\sigma}.$$

Daaruit volgt, dat, als Σ de doorsnede van G is, de stroom per vlakte-eenheid in het element dS in G gelijk is aan

$$\frac{dS}{(r + r')\,\sigma\,\Sigma}$$

Daar deze uitdrukking gelijk is aan $\frac{\varkappa}{\sigma}$, vinden wij, dat $\varkappa$ bepaald wordt door de vergelijking

$$\varkappa = \frac{dS}{(r + r')\,\Sigma}. \tag{28}$$

Dat $\varkappa$ voor alle volume-elementen van G even groot is, hangt, in verband met de reciprociteitsstelling, samen met het bovengezegde over de verdeeling der stroomlijnen in G bij de electriciteitsbeweging, die wordt veroorzaakt door een electromotorische kracht in den draad.

Nu volgt uit (27) en (28), dat

$$\overline{x^2}\, S\, (dS)^2 = 2\, r\, k\, T\, \tau \sum{}^2$$

is. Daar alle volume-elementen ondersteld werden even groot te zijn, kan men voor deze vergelijking schrijven, als N het aantal elementen van G is,

$$N\, \overline{x^2}\, (dS)^2 = 2\, r\, k\, T\, \tau \sum{}^2.$$

Is l de lengte en ρ de soortelijke weerstand van G, zoodat

$$r = \frac{\rho\, l}{\sum}$$

is, dan vindt men, omdat

$$N\, dS = l \sum$$

is,

$$\overline{x^2} = \frac{2\, \rho\, k\, T\, \tau}{dS}. \tag{30}$$

Dit is de gezochte uitdrukking voor het gemiddelde kwadraat van den electromotorischen impuls in een volume-element dS.

Naar aanleiding van het voorafgaande maken wij nog eenige opmerkingen. In de eerste plaats kan men zeggen, dat de formule (9) ook toegepast kan worden op een element dS van den draad, gelegen tusschen twee doorsneden op onderlingen afstand dl. Men heeft dan

$$dl = \frac{dS}{\sigma},$$

terwijl voor den weerstand r nu kan geschreven worden $\rho \dfrac{dl}{\sigma}$. Verder bedenke men, dat X in de formule (9) de tijdsintegraal van de langs dl werkende electromotorische kracht (lijnintegraal van de electromotorische kracht) is, terwijl x in de formule (30) de tijdsintegraal der in een punt werkende electromotorische kracht is, zoodat

$$X = x\, dl$$

is. Voor (9) kan men dus schrijven

$$\overline{x^2}\,(dl)^2 = 2\,\rho\,\frac{dl}{\sigma}\,k\,T\,\tau,$$

waaruit men weer de formule (30) vindt.

De eerder gegeven afleiding van deze formule heeft echter het voordeel, dat zij geldt voor een volume-element *binnen* het metaal.

In aansluiting hieraan kan men een tweede opmerking maken naar aanleiding van de omstandigheid, dat wij ons bij de afleiding van (30) tot de beschouwing van één richting bepaald hebben. Men moet zich voorstellen, dat in werkelijkheid de door (30) bepaalde impulsen in drie onderling loodrechte richtingen werken, zoodat, als de indices 1, 2, 3 die richtingen aanduiden, en dus x_1 de impuls in de richting 1 is, enz.,

$$\overline{x^2_1} = \overline{x^2_2} = \overline{x^2_3} = \frac{2\,\rho\,k\,T\,\tau}{dS} \tag{31}$$

is. Men kan hierbij de drie richtingen, mits onderling loodrecht, willekeurig kiezen. Inderdaad, als x'_1, x'_2, x'_3 de impulsen volgens drie nieuwe onderling loodrechte richtingen zijn, vindt men uit transformatieformules, dat, als (31) geldt, $\overline{x'^2_1}$, $\overline{x'^2_2}$ en $\overline{x'^2_3}$ diezelfde waarden moeten hebben. Immers, zijn α_1, β_1, γ_1 de cosinussen der hoeken, die de richting 1′ resp. maakt met de richtingen van x_1, x_2, x_3, dan is

$$x'_1 = \alpha_1\,x_1 + \beta_1\,x_2 + \gamma_1\,x_3.$$

Verheft men beide leden dezer vergelijking in de tweede macht, en neemt men het gemiddelde, b.v. voor een bepaald volume-element dS, dat op vele verschillende oogenblikken, telkens gedurende een even groot tijdsinterval τ beschouwd wordt, dan vindt men

$$\overline{x'^2_1} = \alpha^2_1\,\overline{x^2_1} + \beta^2_1\,\overline{x^2_2} + \gamma^2_1\,\overline{x^2_3},$$

omdat gemiddelden van producten zooals $\overline{x_1\,x_2}$ nul zijn wegens de incoherentie van x_1, x_2 en x_3. Met het oog op (31) heeft men, omdat

$$\alpha^2_1 + \beta^2_1 + \gamma^2_1 = 1$$

is,

$$\overline{x'^2_1} = \overline{x^2_1} = \frac{2\rho k T \tau}{dS}.$$

Op geheel analoge wijze vindt men voor $\overline{x'^2_2}$ en $\overline{x'^2_3}$ dezelfde uitkomst.

Wij wijzen er nog op, dat men met behulp van (31) nu ook de spontane electriciteitsbeweging in geleiders van drie afmetingen zou kunnen bepalen. Daarbij kan men de grootte der volume-elementen dS willekeurig kiezen, mits men ze zoo groot neemt, dat een element nog een zeer groot aantal atomen en electronen bevat.

De derde opmerking kan men maken naar aanleiding van het feit, dat volgens de formule (30) de grootte van den electromotorischen impuls en dus ook die van de electromotorische kracht omgekeerd evenredig is met $\sqrt{dS}$.[1] Deze uitkomst hangt samen met de onderstelling, dat de electromotorische kracht over de geheele uitgebreidheid van dS dezelfde is. Voor een gegeven grootte der kracht zou de daaruit voortvloeiende waarde van $\overline{\left(\int_\tau i_e\, dt\right)^2}$ evenredig met $(dS)^2$ zijn, maar inderdaad wordt zij evenredig met dS, — zooals men gevoelt, dat zij moet worden, — doordat de grootte der electromotorische kracht omgekeerd evenredig met $\sqrt{dS}$ is.

§ 8. Het verdient de aandacht, dat er veel overeenkomst bestaat tusschen de boven gevonden uitkomst en die, welke voor een in een vloeistof of een gas gesuspendeerd deeltje geldt. In de theorie der Brown'sche beweging wordt tusschen den op zulk een deeltje in een bepaalde richting werkenden impuls X en den coëfficiënt w, waardoor de weerstand, dien het ondervindt, bepaald wordt, het volgende verband afgeleid:

$$\overline{X^2} = 2 w k T \tau. \qquad (7)$$

Beschouwt men nu de electronen in een volume-element dS van een metaal als één geheel, dan kan men daarvoor uit

[1]) Zie H. A. Lorentz, Versl. Kon. Ak. van Wet. Amsterdam, d. XIV, 1ste ged. (1905), p. 412.

den soortelijken weerstand ρ van het metaal den weerstand afleiden, dien zij ondervinden, als zij zich met zekere snelheid v ten opzichte van de metaalatomen bewegen. Is, bij deze relatieve snelheid v, de genoemde weerstand gelijk aan w v, dan wordt dus de coëfficiënt w bekend. Aan den anderen kant kan men den op de gezamenlijke electronen in dS werkenden impuls uit de vergelijking (30) afleiden; nu zal blijken, dat tusschen het gemiddelde kwadraat van dezen impuls en den coëfficiënt w dezelfde betrekking bestaat als in het geval van de Brown'sche beweging.

Is n dS het aantal electronen in dS, dan is de weerstand per electron

$$\frac{w\,v}{n\,dS}.$$

Wanneer een electrische kracht E werkt, en de lading van een electron e is, wordt de snelheid, die de electronen krijgen, bepaald door de vergelijking

$$\frac{w\,v}{n\,dS} = E\,e,$$

zoodat

$$v = \frac{E\,e\,n\,dS}{w}$$

is. De stroom per vlakte-eenheid is

$$n\,e\,v = \frac{E\,e^2\,n^2\,dS}{w};$$

dus is

$$\rho = \frac{w}{e^2\,n^2\,dS},$$

zoodat wij voor den coëfficiënt w vinden

$$w = \rho\,e^2\,n^2\,dS. \qquad (32)$$

Wij moeten verder bedenken, dat in (30) x de electromotorische impuls beteekent, die op de eenheid van electriciteit werkt, terwijl wij nu onder X de totale impuls op al de electronen in dS tezamen zullen verstaan. Daar het aantal dezer deeltjes n dS is, heeft men

$$X = x\,e\,n\,dS.$$

Verheft men de leden dezer vergelijking in de tweede macht, en neemt men het gemiddelde over vele oogenblikken, den toestand in het element dS telkens gedurende een even groot tijdsdeel τ beschouwende, dan vindt men

$$\overline{X^2} = \overline{x^2}\, e^2\, n^2\, (dS)^2.$$

Hiervoor kan men, met het oog op de formule (30), schrijven

$$\overline{X^2} = 2\, k\, T\, \tau\, \rho\, e^2\, n^2\, dS. \qquad (33)$$

Uit (32) en (33) blijkt, dat tusschen $\overline{X^2}$ en w ook nu weer de betrekking (7) bestaat.

HOOFDSTUK III.

De verstrooiing van het licht.

§ 1. Wij zullen in dit hoofdstuk de zeer verschillende methoden nagaan, volgens welke de bekende formule van RAYLEIGH voor de verstrooiing van het licht is afgeleid, en trachten verband te leggen tusschen die methoden van afleiding.

Wanneer een lichtbundel valt op onregelmatig verspreide deeltjes, waarvan de afmetingen klein zijn in vergelijking met de golflengte van het invallende licht, wordt een gedeelte van dit licht door die deeltjes naar alle zijden verstrooid. Lord RAYLEIGH [1]) behandelde de theorie van dit verschijnsel in 1871 met behulp van de oude theorie van het licht, in welke dit beschouwd werd als trillingen van een veerkrachtig medium. De dichtheid van dit medium zij D, die van de verstrooiende deeltjes D'. De onregelmatig verspreide dichtheidsafwijkingen D' — D zijn de oorzaak van de verstrooiing. RAYLEIGH beschouwt als volume-element dS de ruimte, door een deeltje ingenomen. Hij bepaalt de kracht F, die den invloed der dichtheidsafwijking in dat volume-element zou kunnen opheffen, en die dus zou moeten werken, opdat de lichtbeweging ongestoord zou kunnen doorgaan. De verstrooiing, die door dS veroorzaakt wordt, kan dan beschouwd worden als voortgebracht door de tegengestelde — F van de genoemde kracht, werkende in dS. Deze kracht — F veroorzaakt trillingen in de middenstof, en de vraag is, hoe groot het totale arbeidsvermogen is, dat beantwoordt aan de tril-

[1]) RAYLEIGH, Phil. Mag. 41 (1871), p. 107; Scientific Papers I, p. 87.

lingen, teweeggebracht door de krachten — F, werkende in de gezamenlijke volume-elementen dS, waar de dichtheid D′ is. Rayleigh onderstelt bij de berekening dezer trillingen, dat de krachten werken op een medium met de uniforme dichtheid D.

De totale intensiteit van de in een bepaalde richting uitgezonden trillingen wordt nu gevonden door de intensiteiten van de door de afzonderlijke deeltjes in die richting uitgezonden trillingen te sommeeren, omdat de trillingen, afkomstig van deze deeltjes, incoherent in phase zijn. Deze incoherentie is volgens Rayleigh het gevolg van de bewegingen der deeltjes.

§ 2. In latere publicaties behandelde Rayleigh [1]) de verstrooiing ook van het standpunt der electromagnetische lichttheorie en toonde aan, dat niet alleen zwevende stofdeeltjes, maar ook de molekulen der middenstof het licht verstrooien. De blauwe kleur van den hemel werd verklaard uit de verstrooiing van het zonnelicht door de molekulen van de atmosfeer, die de aarde omgeeft. Rayleigh kwam tot het volgende resultaat: Doorloopt een bundel licht van de golflengte λ een afstand l in een medium van niet te groote dichtheid, b.v. een gas, en is de brekingsindex van dit gas μ, dan wordt de intensiteit verzwakt in reden van 1 tot e^{-hl}, waarin de extinctiecoëfficiënt h bepaald wordt door:

$$h = \frac{32\,\pi^3\,(\mu - 1)^2}{3\,N\,\lambda^4}. \tag{34}$$

In deze vergelijking is N het aantal molekulen per volume-eenheid. De molekulen werden ondersteld bolletjes met overal gelijke optische dichtheid te zijn.

Op de volgende wijze kan men tot deze uitkomst geraken: Zooals in § 1 van dit hoofdstuk werd vermeld, berekende Rayleigh rechtstreeks de energie, die verstrooid wordt door de molekulen in een bepaald volume.

Dit volume, dat vele molekulen moge bevatten en dus groot

[1]) Rayleigh, Phil. Mag. 12 (1881), p. 81; Phil. Mag. 47 (1899), p. 375; Papers IV, p. 397.

is in vergelijking met dS, noemen wij dv, de door dv verstrooide energie zij i en de intensiteit van den invallenden lichtbundel I, waarbij als maat voor I genomen wordt de energie, die gemiddeld per tijdseenheid door de vlakte-eenheid der doorsnede van den bundel gaat.

Daar de verstrooide energie evenredig is met het aantal molekulen, dus met het volume, en ook met de intensiteit I, kan men schrijven

$$i = h\, I\, dv.$$

Zij nu dv een laagje, begrensd door twee loodrechte doorsneden van den lichtbundel, op een oneindig kleinen afstand d x van elkaar gelegen, (het invallende licht wordt ondersteld zich in de richting der x-as voort te planten) en zij ω de grootte der doorsnede, zoodat

$$dv = \omega\, dx.$$

Neemt men nu in aanmerking, dat door de voorste doorsnede de hoeveelheid energie $h\, I\, \omega\, dx$ minder heengaat dan door de achterste, zoo vindt men:

$$\frac{dI}{dx} = -h\, I,$$

dus

$$I = I_0\, e^{-hx}.$$

Hierin wordt de grootheid h volgens de berekening van Rayleigh bepaald door (34).

Wij zullen nu buiten beschouwing laten de wijze, waarop de energie over de verschillende richtingen, waarin het licht verstrooid wordt, is verdeeld, en ook het feit, dat het verstrooide licht gepolariseerd is.

§ 3. Ook met behulp van de electronentheorie is de formule van Rayleigh afgeleid, en wel door Natanson [1]) en Lorentz.

De quasi-elastisch gebonden electronen, die onder den invloed van het invallende licht om een evenwichtsstand trillen,

[1]) L. Natanson, Bull. de l'Acad. des Sciences de Cracovie, déc. 1909, p. 915.

zenden in alle richtingen de energie uit, welke zij aan den lichtbundel onttrekken.

Men vestigt bij deze beschouwingswijze, evenals bij de methode van Rayleigh, de aandacht op de afzonderlijke deeltjes in tegenstelling met hetgeen bij later te bespreken afleidingen geschiedt. Volgens de electronentheorie werkt op de trillende deeltjes een stralingsweerstand, die gelijk is aan

$$\frac{e^2}{6 \pi c^3} \; \frac{d^2 v}{d t^2}, \tag{35}$$

waarin v de snelheid, e de lading van het electron is en c de snelheid van het licht in het luchtledige. Deze weerstand kan beschouwd worden als de oorzaak van de verzwakking van den lichtbundel en staat dus in nauw verband tot de uitstraling. Inderdaad is de bij een enkelvoudige trilling door een enkel electron uitgestraalde energie even groot als de arbeid van een kracht, gelijk en tegengesteld aan den stralingsweerstand (35), welke kracht de trilling aanhoudend doet voortduren.

Natanson leidt nu, voor elk trillend electron de kracht (35) invoerend, de formule van Rayleigh af; hij stelt het aantal electronen per volume-eenheid voor door N, terwijl N in de vergelijking (34) het aantal molekulen per volume-eenheid is. Zijn uitkomst is dus in overeenstemming met die van Rayleigh voor het geval, dat elk molekuul één electron bevat.

Men kan hierbij opmerken, dat men, volgens de methode van Natanson te werk gaande, de uitkomst van Rayleigh ook dan krijgt, wanneer er in elk molekuul meer electronen voorkomen. Het komt er n.l. maar op aan, welk electrisch moment door een bepaalde electrische kracht in een molekuul wordt opgewekt. Dit moment bepaalt zoowel de uitstraling, die van het deeltje uitgaat, en dus de verstrooiing, als den invloed, dien de molekulen op de voortplantingssnelheid en daarmede op den brekingsindex hebben. Men kan zich nu steeds een molekuul met een aantal electronen vervangen denken door een ander, dat slechts één electron bevat en waarin toch hetzelfde moment wordt opgewekt. Men komt dus tot de formule van Rayleigh, waarin steeds onder N het aantal *molekulen* per volume-eenheid moet worden verstaan. Dat men, als elk molekuul meer dan één electron bevat, een fout zou begaan door in die formule voor N het aantal *electronen* te nemen, ligt hieraan, dat voor de verschillende in een zelfde molekuul liggende electronen de gezamenlijke uitstraling niet gelijk mag worden gesteld aan de som der uitstralingen waartoe zij, elk afzonderlijk, aanleiding zouden geven.

NATANSON ziet af van de onderlinge werking der deeltjes. LORENTZ [1]) heeft daarop, evenals NATANSON op de straling der afzonderlijke molekulen lettend, aangetoond, dat men evenzeer tot de formule van RAYLEIGH geraakt, als men, wat den stralingsweerstand betreft, de onderlinge werking der electronen in rekening brengt; als middenstof wordt een gas van niet te groote dichtheid beschouwd. LORENTZ vindt, dat de verstrooiing slechts dan plaats heeft, wanneer de molekulen onregelmatig verspreid zijn.

Ter onderscheiding van een andere methode, welke LORENTZ gebezigd heeft om de formule van RAYLEIGH af te leiden, zullen wij de besprokene de eerste noemen.

§ 4. Terwijl RAYLEIGH, NATANSON en LORENTZ bij zijn eerste methode letten op de uitwerking der afzonderlijke molekulen of electronen, vestigen VON SMOLUCHOWSKI [2]), EINSTEIN [3]), KEESOM [4]) en LORENTZ [5]) bij zijn tweede methode de aandacht op volume-elementen, die vele molekulen bevatten, maar waarvan de afmetingen klein zijn in vergelijking met de golflengte van het invallende licht.

Ten gevolge van de molekulaire bewegingen ontstaan plaatselijke afwijkingen van de gemiddelde dichtheid; deze afwijkingen zijn vooral groot bij een vloeistof of een mengsel van vloeistoffen in de nabijheid van het kritische punt en

---

[1]) H. A. LORENTZ, Versl. Kon. Ak. v. Wet. Amsterdam, d. XVIII, 2de ged. (1910), p. 650.

[2]) M. VON SMOLUCHOWSKI, Ann. d. Phys. 25 (1908), p. 205.

[3]) A. EINSTEIN, Ann. d. Phys. 33 (1910), p. 1275.

[4]) W. H. KEESOM, Ann. d. Phys. 35 (1911), p. 591.

[5]) H. A. LORENTZ, Les théories statistiques en thermodynamique, p. 42.

geven daarbij aanleiding tot een sterke verstrooiing, kritische opalescentie geheeten.

Von Smoluchowski en Einstein bepalen de dichtheidsafwijkingen in een volume-element met behulp van het „principe van Boltzmann"

$$\eta = \frac{R}{N} \log W, \tag{36}$$

waarin η de entropie en W de waarschijnlijkheid van een bepaalden toestand van een systeem is, R de gasconstante per grammolekuul voor ideale gassen, en N de constante van Avogadro. Terwijl von Smoluchowski zich bepaalt tot een schatting van de intensiteit der opalescentie, geeft Einstein daarvan de berekening, terwijl hij ook de theoretische beschouwingen vervolledigt.

Keesom vat evenals Einstein volume-elementen in het oog, welke een groot aantal molekulen bevatten, doch afmetingen hebben, die klein zijn in vergelijking met de golflengte van het licht. Is μ de brekingsindex van de middenstof, zoo wordt $\Delta \mu$, de afwijking van de gemiddelde waarde, in een volume-element overal als even groot beschouwd. Keesom vindt voor den verstrooiingscoëfficiënt, d. i. de intensiteit van het door 1 c.M^3. van de beschouwde stof loodrecht op de invalsrichting van het licht binnen een lichaamshoek 1 verstrooide licht, als de intensiteit van het invallende licht = 1 is, dezelfde formule als Einstein. Keesom leidt deze formule op een korte wijze af door gebruik te maken van een resultaat van Rayleigh en een van von Smoluchowski. Het eerste betreft het verband tusschen de verstrooiing en $\Delta \mu$; het tweede heeft betrekking op het gemiddelde kwadraat van $\frac{\Delta \rho}{\rho}$, waarin ρ de gemiddelde dichtheid en $\Delta \rho$ de plaatselijke afwijking der werkelijke dichtheid van die gemiddelde dichtheid is.

Vermelden wij eindelijk nog, dat Zernike [1]) de opalescentie beschouwt van een mengsel van stoffen bij het kritische punt.

---

[1]) F. Zernike, L'opalescence critique, théorie et expériments. Thèse, Amsterdam, 1915.

Zonder gebruik te maken van het principe van BOLTZMANN, doch volgens de methode der macro-canonische ensembles van GIBBS, leidt hij een formule af voor het gemiddelde kwadraat der dichtheidsafwijkingen; daarna geeft hij, gebruik makend van de formule van RAYLEIGH, een uitdrukking voor de opalescentie voor een mengsel van stoffen en ook voor een enkele stof, waarbij hij weer tot de formule van EINSTEIN komt.

De metingen van de intensiteit der opalescentie, verricht door KEESOM en ZERNIKE, leiden tot een bevredigende waarde van de constante van AVOGADRO.

Deze constante is ook bepaald uit metingen van de intensiteit van het verstrooide zonnelicht, door E. BAUER en M. MOULIN [1]) verricht op den Mont-Blanc. Dergelijke metingen zijn later gedaan door H. DEMBER [2]) op den Piek van Teneriffe. Vooral de waarnemingen van dezen laatsten leiden tot goede resultaten. Om den storenden invloed van stofdeeltjes, die in de lagere luchtlagen zweven, te ontgaan, werden de waarnemingen op hooggelegen plaatsen verricht.

§ 5. Tenslotte maken wij melding van de tweede methode, volgens welke LORENTZ [3]) de formule van RAYLEIGH afleidde.

De fluctuatie's in dichtheid van het medium hebben ten gevolge, dat de diëlectriciteitsconstante van punt tot punt verandert. Zij ε hare gemiddelde waarde, $\varepsilon + \Delta\varepsilon$ de werkelijke; van de afwijkingen $\Delta\varepsilon$ onderstelt LORENTZ, dat ze klein zijn in vergelijking met ε. De redeneering, die voor elke golflengte van het invallende licht geldt, als ε als functie van de frequentie n der trillingen beschouwd wordt, gaat nu als volgt: Had de diëlectriciteitsconstante overal de waarde ε, dan zou men de electrische kracht E en de diëlectrische verplaatsing D, die den lichtbundel bepalen, kennen. E en D

[1]) E. BAUER et M. MOULIN, Compt. Rend. 151 (1910), p. 864.

[2]) H. DEMBER, Ann. d. Phys. 49 (1916), p. 599.

[3]) H. A. LORENTZ, Les théories statistiques en thermodynamique, p. 42.

zouden voldoen aan de grondvergelijkingen voor het electromagnetische veld en aan de vergelijking

$$\mathsf{D} = \varepsilon\,\mathsf{E}. \tag{37}$$

De bedoelde oplossing, die de oplossing A genoemd zal worden, voldoet niet meer, nu in plaats van de vergelijking (37) komt:

$$\mathsf{D} = (\varepsilon + \Delta\,\varepsilon)\,\mathsf{E}.$$

Toch kan men, een dergelijken kunstgreep gebruikende, als door Rayleigh werd toegepast, bewerken, dat de oplossing A blijft gelden voor het geval van de onregelmatig veranderende diëlectriciteitsconstante, en wel door invoering van een fictieve electromotorische kracht F, die tegelijk met E werkt op de plaatsen, waar de afwijkingen $\Delta\,\varepsilon$ bestaan. Deze kracht wordt bepaald door

$$\mathsf{F} = -\frac{\Delta\,\varepsilon}{\varepsilon}\,\mathsf{E}. \tag{38}$$

In plaats van (37) komt nl. de vergelijking

$$\mathsf{D} = (\varepsilon + \Delta\,\varepsilon)\,(\mathsf{E} + \mathsf{F}),$$

welke in (37) overgaat, als men het kwadraat van $\frac{\Delta\,\varepsilon}{\varepsilon}$ verwaarloost. De krachten F kunnen dus de verstrooiing beletten, zoodat deze beschouwd kan worden als voortgebracht door krachten $-\,\mathsf{F}$. Daarbij kan men, omdat $\Delta\,\varepsilon$ ondersteld werd klein te zijn in vergelijking met ε, rekenen, dat de krachten $-\,\mathsf{F}$ werken op een homogeen medium.

Lorentz denkt zich volume-elementen dS van zoodanige grootte, dat men F en dus $\Delta\,\varepsilon$ als constant kan beschouwen over het geheele element, en berekent het electromagnetische veld, dat teweeggebracht wordt door de fictieve krachten, werkende in een volume-element dS. Voor den energiestroom door een bol, beschreven om dS met een straal, die groot is in vergelijking met de golflengte van het licht, wordt gemiddeld per tijdseenheid gevonden

$$\frac{c^2\, n^4\, p^2\, (dS)^2}{12\,\pi\, u^5}. \tag{39}$$

Hierin is p de amplitudo der fictieve krachten; dus heeft men, als a de amplitudo der trillingen van het invallende licht is,

$$p = a \frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon}. \tag{40}$$

Verder is

$$u = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}$$

de snelheid van het licht in het beschouwde medium.

Dat de waargenomen verstrooiing niet evenredig is met $(dS)^2$, zooals men op het eerste gezicht uit (39) zou opmaken, doch met dS, wordt aldus aangetoond: Bepaalt men zich tot een gas, zoo kan men, als N het aantal molekulen per volume-eenheid en α een constante is, stellen

$$\varepsilon = 1 + \alpha N.$$

Is n' het aantal molekulen in het volume-element dS, dan is

$$\varepsilon = 1 + \alpha \frac{n'}{dS},$$

dus

$$\Delta \varepsilon = \alpha \frac{\Delta n'}{dS}.$$

Daar nu p evenredig met $\frac{\Delta n'}{dS}$ wordt, dus de uitdrukking (39) evenredig met $(\Delta n')^2$, en de gemiddelde waarde van (39) de waargenomen verstrooiing bepaalt, is deze evenredig met

$$\overline{(\Delta n')^2} = n' = N\,dS.$$

Inderdaad is dus de verstrooiing evenredig met dS.

Beschouwt men nu, verder redeneerend evenals bij de besproken methode van Rayleigh (Hoofdstuk III, § 2), de verstrooiing, teweeggebracht door een oneindig dun schijfje, begrensd door twee loodrechte doorsneden van den lichtbundel, dan vindt men weer de formule van Rayleigh.

§ 6. Vergelijken wij de verschillende methoden, die tot de formule van Rayleigh leiden.

Bij alle methoden wordt ondersteld, dat de verstrooiende deeltjes zeer klein zijn in vergelijking met hunne onderlinge afstanden, terwijl deze afstanden weer zeer klein zijn ten opzichte van de golflengte van het invallende licht.

Rayleigh vindt zijn resultaat met behulp van de oude lichttheorie; later behandelde hij het vraagstuk ook van het standpunt der electromagnetische lichttheorie, zooals na hem door alle onderzoekers gedaan is; Lorentz bij zijn eerste methode en Natanson leiden de formule van Rayleigh af met behulp van de electronentheorie. Rayleigh, Natanson en Lorentz (I) vestigen de aandacht op de verstrooiing door de afzonderlijke molekulen of electronen (een volume-element bij Rayleigh is de ruimte door één molekuul ingenomen); daarentegen berekenen Einstein, Keesom en Lorentz (II) de verstrooiing, die teweeggebracht wordt door volume-elementen, welke vele deeltjes bevatten, doch klein zijn in vergelijking met de golflengte van het invallende licht; in die volume-elementen wordt de afwijking $\Delta \varepsilon$, die de diëlectriciteitsconstante ε vertoont van hare gemiddelde waarde, overal als even groot beschouwd, d. w. z. de middenstof homogeen gedacht. De rangschikking der deeltjes bij de eene groep van beschouwingswijzen, n.l. die, welke de afzonderlijke deeltjes in het oog vat, en de dichtheidsafwijkingen bij de andere groep, d. i. die, welke de werking van volume-elementen beschouwt, worden door het toeval bepaald gedacht.

§ 7. Wij vermelden in deze paragraaf een opvatting van Oseen [1]), waarvan hij later [2]) inzag, dat zij onjuist was. Zijn oorspronkelijke redeneering was deze: Er zijn in een gas of een vloeistof twee soorten van verstrooiing; de eene, die Oseen noemt de „Rayleigh-Planck'sche" verstrooiing, wordt „door de molekulen zelf" veroorzaakt. Bij de afleiding van deze neemt men volgens Oseen aan, dat de dichtheid, d. i. het aantal molekulen per volume-eenheid, als een regelmatig veranderende en in physisch oneindig kleine gebieden constante grootheid beschouwd mag worden. Daarentegen

[1]) C. W. Oseen, Physik. Zeitschr. XVII, 1916, p. 233.
[2]) C. W. Oseen, Physik. Zeitschr. XVII, 1916, p. 341.

wordt de andere, door Oseen „Keesom-Einstein'sche" genoemde, verstrooiing door de fluctuatie's in dichtheid teweeggebracht. De „Rayleigh-Planck'sche" verstrooiing is een regelmatig procédé; de verstrooide energie wordt naar buiten uitgezonden; in het bijzonder vindt men deze energie in de teruggekaatste golf terug.

Daarentegen is de „Keesom-Einstein'sche" verstrooiing een onregelmatig verloopend verschijnsel; de verstrooide energie wordt voor een deel in de ongeordende trillingen der resonatoren teruggevonden. Deze verstrooiing heeft niet plaats in een kristal. Voor den extinctiecoëfficiënt moet men, volgens Oseen's oorspronkelijke opvatting, overeenkomstig de twee soorten verstrooiing de dubbele waarde nemen van die, welke de formule van Rayleigh aangeeft.

Zooals reeds werd gezegd, wordt deze onjuiste uitspraak door Oseen in zijn tweede artikel herroepen. Hij betoogt daarbij, dat in de bewegingsvergelijking van het electron de term, die den stralingsweerstand voorstelt, wordt opgeheven door een gelijken en tegengestelden term, voorkomende in de uitdrukking, die de werking der overige electronen op het beschouwde electron aangeeft. Daardoor zou dan de „Rayleigh-Planck'sche" verstrooiing vervallen; zoodoende keert men terug tot de formule van Rayleigh.

In verband met de meening van Oseen, uitgesproken in zijn tweede, bovengenoemde artikel, dat uit de bewegingsvergelijking van het electron de dempingsterm, d. i. de term, die den stralingsweerstand aangeeft, wegvalt, maken wij melding van de discussie tusschen Mandelstam [1]) en Planck en de beschouwingen van Gans en Happel [2]) en Buchwald [3]) over deze kwestie.

---

[1]) L. Mandelstam, Ann. d. Phys. 23 (1907), p. 626; Physik. Zeitschr. 8 (1907), p. 608; M. Planck, Physik. Zeitschr. 8 (1907), p. 906; L. Mandelstam, Physik. Zeitschr. 9 (1908), p. 308; M. Planck, Physik. Zeitschr. 9 (1908), p. 354; L. Mandelstam, Physik. Zeitschr. 9 (1908), p. 641.

[2]) R. Gans u. H. Happel, Ann. d. Phys. 29 (1909), p. 277.

[3]) E. Buchwald, Ann. d. Phys. 52 (1917), p. 775.

Mandelstam is evenals Oseen van meening, dat de dempingsterm wegvalt. Daarentegen toonen Gans en Happel aan, dat Mandelstam een fout maakt bij de berekening van de werking, op een bepaald electron door de overige uitgeoefend, en dat in de uitdrukking voor deze werking geen term voorkomt, die dēn dempingsterm in de bewegingsvergelijking van het beschouwde electron zou opheffen.

Buchwald richt zich eveneens tegen de opvattingen van Oseen en legt er den nadruk op, dat de fluctuatie's in dichtheid de conditio sine qua non voor de opalescentie zijn. Die fluctuatie's nu komen in alle media voor, behalve in een middenstof van volkomen regelmatige, kristallijne structuur. Buchwald berekent voor een middenstof van niet te groote dichtheid de intensiteit der verstrooiing door rechtstreeks de uitstraling der electronen te beschouwen en komt tot de formule van Rayleigh.

Vermelden wij ten slotte, dat Lorentz [1]) reeds vroeger had aangetoond, dat bij regelmatige rangschikking der molekulen, n.l. in de middelpunten van congruente parallelepipeda, de dempingsterm uit de bewegingsvergelijking van het deeltje wegvalt, doch dat bij onregelmatige verspreiding der molekulen de totale weerstand, op een deeltje uitgeoefend, juist gelijk is aan dien, welke behoort bij het door het molekuul zelf teweeggebrachte veld.

---

[1]) H. A. Lorentz, Versl. Kon. Ak. v. Wet. Amsterdam, d. XVIII, 2de ged. (1910), p. 661.

HOOFDSTUK IV.

Verband tusschen eenige der methoden van afleiding van RAYLEIGH's formule.

§ 1. Bij alle afleidingen van de formule van RAYLEIGH wordt er de nadruk op gelegd, dat de fluctuatie's in dichtheid in de middenstof de oorzaak van de verstrooiing zijn.

Eerst zullen wij nu de stelling toelichten, dat er geen verstrooiing plaats heeft, als er geen fluctuatie's in dichtheid zijn.

Beschouw een bundel evenwijdige homogene lichtstralen, die op de molekulen van een gas vallen, en kies de x-as langs de richting der stralen. Vestig de aandacht op een cilindertje L, gelegen langs de x-as en waarvan de loodrechte doorsnede afmetingen heeft, die klein zijn in vergelijking met de golflengte λ van het licht. Zij A B een deel van L, dat zeer lang is in vergelijking met λ, en beschouwen wij de verstrooiing, door A B teweeggebracht in een punt P, gelegen in het luchtledige op de lijn A P, die een willekeurigen hoek met AB maakt, terwijl A P $\gg$ A B is. Verdeel A B door loodrechte doorsneden op gelijke onderlinge afstanden dx in naast elkaar liggende gelijke volume-elementen dS, die afmetingen hebben, welke klein zijn in vergelijking met λ, maar die zeer vele molekulen bevatten. Zij het aantal molekulen in elk element m en onderstel ter vereenvoudiging, dat elk molekuul één electron bevat. Wij zien van de onderlinge werking der deeltjes af en nemen aan, dat de verzwakking van den lichtbundel over den afstand A B verwaarloosd mag worden, zoodat de amplitudo der trillingen van alle deeltjes in het interval A B als evengroot beschouwd mag worden. De y-component van het electrische moment van een willekeurig molekuul in A B (tot dezen component zullen wij ons voorloopig bepalen) kan dan worden voorgesteld door de uitdrukking

$$a \cos (n t + p),$$

waarin de amplitudo a en de frequentie n constanten zijn, en p een lineaire functie van x is.

Is d_x de x-component van de electrische kracht d, door één deeltje teweeggebracht in het punt P, dan kan men met het oog op de gemaakte onderstellingen schrijven

$$\mathsf{d}_x = b \cos (n t + q),$$

waarin b een constante, onafhankelijk van de configuratie der deeltjes, en q een lineaire functie van x is; het is niet moeilijk, beide grootheden nader te berekenen. [1])

Zij N het aantal molekulen per volume-eenheid en ω de doorsnede van den lichtbundel, zoodat

$$m = N \, dS = N \omega \, dx$$

is, en zij $S \mathsf{d}_x$ de som der x-componenten van de electrische krachten, door de deeltjes van A B in P teweeggebracht, dan is

$$S \mathsf{d}_x = b N \omega \int_{x = x_A}^{x = x_B} \cos (n t + q) \, dx =$$

$$= b N \omega \frac{x_B - x_A}{q_B - q_A} \{ \sin (n t + q_B) - \sin (n t + q_A) \}. \quad (41)$$

Hierin hebben x_A, x_B, q_A en q_B op de uiteinden A en B van A B betrekking. Men ziet, dat $S \mathsf{d}_x$ niet evenredig met de lengte van A B toeneemt, immers

$$\frac{x_B - x_A}{q_B - q_A}$$

is constant; $S \mathsf{d}_x$ kan opgevat worden als te bestaan uit twee deelen, afkomstig van de uiteinden van A B. Neemt men aan, dat de phasen q_B en q_A een geheel aantal malen 2π verschillen, zoo is $S \mathsf{d}_x$ nul.

[1]) Zie b.v. H. A. LORENTZ, Theory of electrons, Leipzig, e. d. Teubner, 1909, p. 56.

Op geheel dezelfde wijze kan men handelen met de andere componenten van $\mathfrak{d}$ en ook met de componenten van de magnetische kracht $\mathfrak{h}$, door de y-componenten van de electrische momenten der deeltjes in P teweeggebracht.

Men komt tot een overeenkomstig resultaat, ook wanneer men zich niet meer bepaalt tot de zooevengenoemde y-componenten, zooals wij deden. Daar dus zoowel de componenten der electrische als die der magnetische kracht in het punt P zeer klein worden, of nul wanneer de phasen der evenwichtsverstoringen, afkomstig van de uiteinden van A B, een geheel aantal malen 2π verschillen, wordt ook de energiestroom in P nul of althans zeer klein in vergelijking met $N \omega l$ maal den energiestroom, die door één molekuul wordt teweeggebracht, waarbij l de lengte van A B, dus $N \omega l$ het totale aantal molekulen in A B voorstelt. Deze uitkomst kan uitgebreid worden tot een willekeurig deel van den lichtbundel, omdat daarvoor van het gevonden resultaat gebruik gemaakt kan worden, mits men het punt P zoodanig kiest, dat de afstanden van P tot de punten van het beschouwde deel van den bundel zeer groot zijn in vergelijking met de afmetingen van dat deel.

Men kan dus zeggen, dat er geen verstrooiing is buiten den invallenden bundel, wanneer er geen fluctuatie's in dichtheid in de middenstof zijn.

§ 2. Wij gaan nu over tot de toelichting van de stelling, dat er wel verstrooiing plaats heeft, wanneer er fluctuatie's in dichtheid zijn. Hiertoe zullen wij een methode toepassen, die door prof. LORENTZ [1]) is gebezigd.

Verdeel het in § 1 beschouwde deel A B van den cilinder door loodrechte doorsneden in deelen A A′, A′ A″, enz. van zoodanige lengte, dat langs elk deel q met 2π verandert (zie de notatie's van § 1 van dit hoofdstuk). [2]) Elk der deelen wordt door loodrechte doorsneden in k gelijke stukken ver-

---

[1]) H. A. LORENTZ, Versl. Kon. Ak. v. Wet. Amsterdam, d. XVIII, 2de ged. (1910), p. 665.

[2]) Wij nemen aan, dat $q_B - q_A$ een geheel aantal malen 2π is.

deeld van zulk een lengte dx, dat voor zulk een stuk q als constant beschouwd mag worden. Het eerste stuk van A A′, het eerste van A′ A″, enz. vatte men in gedachte samen tot één deel van den cilinder A B, evenzoo het tweede stuk van A A′, het tweede van A′ A″, enz. tot een tweede deel van A B, en zoo vervolgens, zoodat de cilinder A B in k gelijke deelen wordt verdeeld.

De molekulen in een zelfde van deze deelen, b.v. het $\varkappa^{\text{de}}$ deel, brengen in het verwijderde punt P electrische krachten teweeg met dezelfde phase, welke $q_\varkappa$ genoemd zal worden; zij $g_\varkappa$ het aantal molekulen in dat $\varkappa^{\text{de}}$ deel. Bepalen wij evenals in § 1 onze aandacht tot de y-componenten van de electrische momenten der molekulen en beschouwen wij den y-component van den energiestroom in P. Bij dezelfde onderstelling omtrent de ligging van P als in § 1, en weer afziende van de onderlinge werking van de molekulen en van de verzwakking van den lichtbundel over den afstand AB, kunnen wij met dezelfde notatie's als in § 1 schrijven

$$S\,\mathsf{d}_x = b \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=k} g_\varkappa \cos(n\,t + q_\varkappa).$$

Volgens § 1 zou dit nul zijn (wij namen aan, dat q_B en q_A een geheel aantal malen 2π verschillen), als de getallen $g_\varkappa$ onderling gelijk waren. Zij $h_\varkappa$ de afwijking van $g_\varkappa$ ten opzichte van het gemiddelde der getallen $g_1, g_2, \ldots, g_k$; dit gemiddelde zal g genoemd worden. Nu wordt

$$S\,\mathsf{d}_x = b\,\Sigma,$$

waarin

$$\Sigma = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=k} h_\varkappa \cos(n\,t + q_\varkappa)$$

is. Evenzoo is

$$S\,\mathsf{d}_z = b'\,\Sigma,$$

en, als men overeenkomstige notatie's bezigt voor de magnetische kracht h,

$$S\,\mathsf{h}_x = \beta\,\Sigma, \quad S\,\mathsf{h}_z = \beta'\,\Sigma.$$

De grootheden b′, β en β' hangen evenals b slechts af van de amplitudo der electrische momenten, de frequentie n, den afstand A P en de coördinaten van P; zij zijn voor alle molekulen van A B even groot.

Is $\mathbf{s}$ de energiestroom in P, en zijn $\mathbf{s}_x$, $\mathbf{s}_y$ en $\mathbf{s}_z$ de componenten van $\mathbf{s}$, dan heeft men

$$\frac{1}{c}\,\mathbf{s}_y = S\,\mathbf{d}_z\,S\,\mathbf{h}_x - S\,\mathbf{d}_x\,S\,\mathbf{h}_z,$$

of

$$\frac{1}{c}\,\mathbf{s}_y = (b'\,\beta - b\,\beta')\,\Sigma^2 = B\,\Sigma^2,$$

als

$$B = b'\,\beta - b\,\beta'$$

is. Er zal wel geen verwarring ontstaan tusschen deze grootheid B en het punt B.

Op dezelfde wijze vindt men voor de andere componenten $\mathbf{s}_x$ en $\mathbf{s}_z$ van den energiestroom

$$\frac{1}{c}\,\mathbf{s}_x = A\,\Sigma^2, \quad \frac{1}{c}\,\mathbf{s}_z = C\,\Sigma^2,$$

waarin A en C een overeenkomstige beteekenis hebben als B.

Voor $\mathbf{s}$ geldt nu de betrekking

$$\frac{1}{c}\,\mathbf{s} = w\,\Sigma^2,$$

als

$$w = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

is. Wat is nu het gemiddelde $\overline{\mathbf{s}}$ van $\mathbf{s}$ voor een groot aantal gevallen, waarbij het totale aantal kg der molekulen telkens op een door het toeval bepaalde wijze over de k deelen van den cilinder A B verdeeld worden? De gemiddelde waarde van een produkt van twee verschillende h's is nul, omdat gelijke en tegengestelde teekens van deze twee afwijkingen in gelijke mate zullen voorkomen. Men heeft dus

$$\frac{1}{c}\,\overline{\mathbf{s}} = w \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=k} \{ \overline{h^2_\varkappa} \cos^2 (n\,t + q_\varkappa) \}.$$

Het gemiddelde $\overline{\overline{\mathbf{s}}}$ van den energiestroom per tijdseenheid wordt gevonden door van $\overline{\mathbf{s}}$ het gemiddelde over een tijdsverloop van een of meer trillingstijden te nemen. Dus is

$$\frac{1}{c}\overline{\overline{s}} = {}^1/_2\, w \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=k} \overline{h^2_\varkappa},$$

en omdat tusschen de afwijkingen $h_\varkappa$ en het gemiddelde g der getallen $g_1, g_2, \ldots, g_k$ volgens formule (2) de betrekking bestaat

$$\overline{h^2_\varkappa} = g,$$

wordt

$$\overline{\overline{s}} = {}^1/_2\, c\, w\, k\, g.$$

Deze uitdrukking geeft aan, dat $\overline{\overline{s}}$ gelijk is aan k g maal het tijdsgemiddelde van den energiestroom, veroorzaakt door den y-component van het electrische moment van één molekuul, want genoemd tijdsgemiddelde voor één deeltje is, zooals uit de formules van deze paragraaf volgt, het gemiddelde per tijdseenheid van $c\, w \cos^2 (n\, t + q)$, d. i. ${}^1/_2\, c\, w$. Als wij ons niet bepaald hadden tot de beschouwing van den y-component alleen, zouden wij een dergelijke uitkomst verkregen hebben. De verstrooiing, door de molekulen in den cilinder A B teweeggebracht, wordt dus gevonden door die, welke door één molekuul wordt veroorzaakt, te vermenigvuldigen met het aantal molekulen in den cilinder. Men kan deze uitkomst uitbreiden tot een willekeurig deel van den lichtbundel, want dit deel kan verdeeld worden in een groot aantal naast en achter liggende cilinders zooals A B, en de componenten der electrische en magnetische krachten, door deze cilinders in P teweeggebracht, zullen incoherente phasen hebben, zoodat de intensiteiten gesommeerd moeten worden.

§ 3. Zooals in Hoofdstuk III, § 3 besproken werd, behandelden Natanson en Lorentz bij zijn eerste methode de verstrooiing van het licht van het standpunt der electronentheorie. Van dit standpunt beschouwd, wordt de verstrooiing teweeggebracht door de electronen, die door het invallende licht in trillende beweging gebracht worden; de zoo ontstane wisselende electrische momenten in de molekulen veroorzaken de electromagnetische trillingen in het meerbeschouwde verwijderde punt P. Deze trillingen nu kan men zich ook opgewekt denken door periodieke electromotorische krachten, werkende in zekere kleine volumina; men komt dus tot de vraag: Kunnen de molekulen met de wisselende momenten vervangen worden door periodieke electromotorische krachten, die in kleine ruimten werken? Inderdaad is dit mogelijk, mits er een bepaald verband bestaat tusschen de amplitudo der electromotorische krachten en de grootte der volumina, waarin zij werken, eenerzijds en de amplitudo der wisselende momenten anderzijds. Dit verband kan men op de volgende wijze vinden: Ter vereenvoudiging nemen wij aan, dat de trillingen zich voortplanten in den aether, en dat elk molekuul slechts één electron bevat. Vestig de aandacht op een molekuul, gelegen in den oorsprong der coördinaten, en stel, dat de componenten van zijn electrisch moment f zijn:

$$\mathsf{f}_x = b \cos nt, \quad \mathsf{f}_y = 0, \quad \mathsf{f}_z = 0.$$

Dan wordt de x-component van de electrische kracht in het punt P (x, y, z), dat van het beschouwde molekuul verwijderd is op een afstand r, die groot is in vergelijking met de golflengte, bepaald door

$$\mathsf{d}_x = \frac{n^2 b}{4 \pi c^2} \left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} \right) \cos n \left(t - \frac{r}{c} \right). \qquad (42)\ [1]$$

Werkt daarentegen in een volume-element dv, gelegen aan den oorsprong der coördinaten de periodieke electromotorische kracht k met de componenten

$$\mathsf{k}_x = a \cos nt, \quad \mathsf{k}_y = 0, \quad \mathsf{k}_z = 0,$$

dan is [2]

$$\mathsf{d}_x = \frac{n^2 a\, dv}{4 \pi c^2} \left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} \right) \cos n \left(t - \frac{r}{c} \right). \qquad (43)$$

Men vergelijke de formules (42) en (43) of de hier niet vermelde uitdrukkingen voor de andere componenten der electrische kracht en voor de componenten der magnetische

[1]) Zie H. A. LORENTZ, Theory of Electrons, p. 56.

[2]) Zie H. A. LORENTZ, Théories statistiques en thermodynamique, p. 85.

kracht, welke op de geciteerde plaatsen te vinden zijn; men ziet, dat het molekuul met het wisselende moment met de amplitudo b vervangen kan worden door een periodieke kracht met de amplitudo a, werkende in het volume-element dv, als

$$a\,dv = b \tag{44}$$

is.

Van deze uitkomst zullen wij gebruik maken om verband te leggen tusschen de methode, waarbij het vraagstuk der verstrooiing behandeld wordt met behulp van de electronentheorie, en die, waarbij de verstrooiing beschouwd wordt als teweeggebracht door de in Hoofdstuk III, § 5 vermelde fictieve krachten

$$-\mathsf{F} = \frac{\Delta\,\varepsilon}{\varepsilon}\,\mathsf{E}. \tag{45}$$

Deze krachten worden geacht te werken in de volume-elementen, waar de diëlectriciteitsconstante een afwijking $\Delta\,\varepsilon$ vertoont ten opzichte van haar gemiddelde waarde ε. Wij zullen de twee zooevengenoemde methoden resp. de eerste en de tweede noemen. Het bedoelde verband tusschen de twee methoden zal aangetoond zijn, als de aequivalentie bewezen is van de krachten $\frac{\Delta\,\varepsilon}{\varepsilon}\,\mathsf{E}$ van de tweede methode met de periodieke electromotorische krachten, die in de plaats treden van de wisselende momenten bij de eerste methode.

Wij onderstellen, dat wij te doen hebben met een gas, en vestigen de aandacht op volume-elementen dS, die een groot aantal molekulen bevatten, maar klein zijn in vergelijking met de golflengte van het licht. Het aantal molekulen in dS zij $m + \mu$; μ zij de afwijking van het werkelijke aantal ten opzichte van het gemiddelde aantal m. Voor verschillende volume-elementen heeft μ een verschillende waarde. Volgens het in § 1 en § 2 van dit hoofdstuk besprokene zou er geen verstrooiing plaats hebben, wanneer elk volume-element precies m molekulen bevatte; de van het element uitgaande verstrooiing is dus de uitstraling, die er zou zijn als het element μ molekulen bevatte, elk met het wisselende moment f. Dat daarbij μ zoowel negatieve als positieve waarden kan hebben, levert in de volgende berekening geen bezwaar op; men ziet dit gemakkelijk in, als men vaststelt, dat $-\alpha$ molekulen met het moment f gelijkgesteld zullen worden met α molekulen met het moment $-\mathsf{f}$. Past men nu op elk molekuul de beschouwing toe, die tot vergelijking (44) geleid heeft, dan vindt men, dat de μ molekulen vervangen kunnen worden door een periodieke electromotorische kracht k met de amplitudo a, werkende in dS, wanneer

$$a\, dS = \mu\, b,$$

dus

$$a = \frac{\mu\, b}{dS},$$

of

$$\mathsf{k} = \frac{\mu\, \mathsf{f}}{dS} \tag{46}$$

is.

Wij kunnen dit uitdrukken in de diëlectrische constante ε, die aan de gemiddelde dichtheid van het medium beantwoordt. Bevat n.l. elk element dS m molekulen, en wordt in elk daarvan het electrische moment f opgewekt, dan is het electrische moment van dS gelijk aan m f, en dus de polarisatie, d. i. het electrische moment per volume-eenheid,

$$\mathsf{P} = \frac{m\, \mathsf{f}}{dS}.$$

Aan den anderen kant is, als E de electrische kracht in den lichtbundel, en D de diëlectrische verplaatsing is,

$$\mathsf{P} = \mathsf{D} - \mathsf{E} = (\varepsilon - 1)\, \mathsf{E},$$

en men geeft dus

$$\frac{m\, \mathsf{f}}{dS} = (\varepsilon - 1)\, \mathsf{E}.$$

Hieruit volgt, dat voor (46) geschreven kan worden

$$\mathsf{k} = (\varepsilon - 1)\, \mathsf{E}\, \frac{\mu}{m}.$$

Bij de tweede methode werkt de door (45) bepaalde fictieve kracht $-\mathsf{F}$ in het volume-element dS.

Dus is werkelijk

$$\mathbf{k} = -\mathbf{F},$$

als

$$\frac{\Delta\,\varepsilon}{\varepsilon} = (\varepsilon - 1)\,\frac{\mu}{\mathrm{m}} \tag{47}$$

is.

Daar nu bij een gas de overmaat van ε boven de eenheid evenredig is met de dichtheid, dus met het aantal molekulen in een bepaalde ruimte, heeft men

$$(\varepsilon - 1) : \Delta\,\varepsilon = \mathrm{m} : \mu,$$

of

$$\Delta\,\varepsilon = (\varepsilon - 1)\,\frac{\mu}{\mathrm{m}}.$$

Deze betrekking komt overeen met (47), als men in (47) de grootheid ε in den noemer van $\frac{\Delta\,\varepsilon}{\varepsilon}$ gelijk aan de eenheid stelt, wat geoorloofd is, omdat bij een gas ε weinig van de eenheid verschilt. Hiermede is de aequivalentie aangetoond van de fictieve krachten $-\mathbf{F}$ van de tweede methode met de periodieke krachten $\mathbf{k}$, die de wisselende momenten vervangen bij de eerste methode.

§ 4. Nog op een andere wijze dan in de vorige paragraaf geschiedde, kan verband gelegd worden tusschen de „eerste" en de „tweede" methode, volgens welke het vraagstuk der verstrooiing behandeld is geworden, n.l. de methode, die gebruik maakt van de electronentheorie en die, welke de fictieve krachten (45) invoert.

Ten aanzien van de eerste methode kan men als volgt redeneeren. Letten wij eerst op een enkel molekuul, dat weer één electron moge bevatten. De trilling van dit electron wordt, terwijl het uitstraalt, door den stralingsweerstand gedempt, maar heft men dezen op door een kracht, gelijk en tegengesteld aan den stralingsweerstand, dus door de kracht [1])

$$-\frac{\mathrm{e}^2}{6\,\pi\,\mathrm{c}^3}\,\ddot{\mathbf{v}}, \tag{48}$$

[1]) Zie H. A. LORENTZ, Theory of Electrons, p. 49.

waarbij v de snelheid van het electron voorstelt, dan duurt de trilling aanhoudend voort. Men bewijst gemakkelijk, dat de per tijdseenheid door het electron uitgestraalde energie

$$\frac{n^4 b^2}{12 \pi c^3} \tag{49}$$

gelijk is aan den arbeid der kracht (48) per tijdseenheid. In formule (49) is, evenals in de vorige paragraaf, n de frequentie en b de amplitudo van het electrische moment van het electron. Wij vestigen nu de aandacht op een deel van het medium, bestaande uit vele volume-elementen dS, die gemiddeld elk m molekulen bevatten. Zooals in § 2 van dit hoofdstuk besproken werd, is de uitstraling, die te danken is aan dit deel van het medium zoodanig, dat de bijdrage van één volume-element tot de uitstraling gelijkgesteld kan worden aan m maal de uitstraling van één molekuul. Men kan de zaak dus zóó opvatten: Het is alsof men op elk der m molekulen afzonderlijk liet werken de kracht (48) om de uitstraling te onderhouden. [1] Het door dS verstrooide arbeidsvermogen beantwoordt dan aan den arbeid dezer krachten. Deze arbeid is, zooals uit (49) volgt, gelijk aan

$$\frac{m\, n^4 b^2}{12 \pi c^3}. \tag{50}$$

Bij de tweede methode wordt gezegd: de verstrooiing wordt teweeggebracht door de krachten

$$-\mathsf{F} = \frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon} \mathsf{E}, \tag{45}$$

werkende in de verschillende volume-elementen. E is hierin de electrische kracht van den invallenden lichtbundel. De verstrooide energie is gelijk aan den arbeid der krachten (45). Om nu het bedoelde verband tusschen de beide methoden te leggen, zullen wij aantoonen, dat de door (50) bepaalde arbeid der krachten (48) gelijk is aan dien der krachten (45), gerekend voor het volume-element dS.

§ 5. Uit het in Hoofdstuk III, § 5 gezegde volgt, dat de

[1] Zie ook Hoofdstuk III, § 7, laatste alinea.

krachten (45) geacht worden te werken op het medium, dat nog niet op andere wijze in trilling is gebracht; de verplaatsingen, waarmede men bij de bepaling van den arbeid dezer krachten rekening moet houden, zijn die, welke deze krachten zelf teweegbrengen. Zij werken op het geheele medium, zoowel op de electronen als op den aether.

Het medium zij homogeen en isotroop, de magnetische permeabiliteit zij gelijk aan 1. Wij zullen nu eerst laten zien, dat de arbeid der kracht F (wij schrijven gemakshalve in deze en de beide volgende paragrafen F in plaats van $-\mathsf{F}$) per volume - eenheid en tijdseenheid bepaald wordt door

$$(\mathsf{F}.\dot{\mathsf{D}}).$$

Om dit aan te toonen, stellen wij op de grondvergelijkingen, die in het door ons beschouwde geval den vorm

$$\text{rot}\,\mathsf{H} = \frac{1}{c}\dot{\mathsf{D}},\ \text{rot}\,\mathsf{E} = -\frac{1}{c}\dot{\mathsf{H}}$$

aannemen, en de vergelijking

$$\mathsf{D} = \varepsilon(\mathsf{E} + \mathsf{F}). \qquad (51)$$

Vermenigvuldigt men beide leden van de vergelijking (51) met $\dot{\mathsf{D}}$, dan wordt het linkerlid der zoo verkregen vergelijking gelijk aan

$$(\mathsf{D}.\dot{\mathsf{D}}) = \frac{d}{d\,t}({}^1/_2\,\mathsf{D}^2).$$

In het rechterlid kan men voor $\varepsilon(\mathsf{E}.\dot{\mathsf{D}})$, met het oog op de grondvergelijkingen, schrijven

$$\varepsilon\,c\,(\mathsf{E}.\,\text{rot}\,\mathsf{H}) = \varepsilon\,c\,(\mathsf{H}.\,\text{rot}\,\mathsf{E}) - \varepsilon\,c\,\text{div}\,[\mathsf{E}.\,\mathsf{H}] =$$
$$= -\varepsilon(\mathsf{H}.\,\dot{\mathsf{H}}) - \varepsilon\,c\,\text{div}\,[\mathsf{E}.\,\mathsf{H}].$$

Men vindt

$$(\mathsf{F}.\dot{\mathsf{D}}) = \frac{d}{dt}\left({}^1/_2\frac{\mathsf{D}^2}{\varepsilon}\right) + \frac{d}{dt}({}^1/_2\,\mathsf{H}^2) + c\,\text{div}\,[\mathsf{E}.\,\mathsf{H}].$$

Vermenigvuldigt men beide leden van deze vergelijking met dS, het meerbeschouwde volume-element, dan stelt de eerste term in hef rechterlid der zoo ontstane vergelijking, n.l.

$$\frac{d}{dt}\left({}^1/_2\frac{\mathsf{D}^2}{\varepsilon}\right) dS$$

de toename per tijdseenhid van de electrische energie in dS voor. Evenzoo is de tweede term in dat rechterlid

$$\frac{d}{dt}(^1/_2\,\mathbf{H}^2)\,dS$$

de toename per tijdseenheid van het magnetische arbeidsvermogen in dS. Eindelijk is de derde term in het rechterlid dêr nieuwe vergelijking

$$c\,\mathrm{div}\,[\mathbf{E}.\,\mathbf{H}]\,dS$$

gelijk aan de hoeveelheid energie, die uit dS door zijn oppervlak wegstroomt, den energiestroom van Poynting. Uit een en ander volgt, dat het linkerlid der nieuwe vergelijking, d.i. $(\mathbf{F}.\,\mathbf{D})\,dS$ den arbeid per tijdseenheid der kracht $\mathbf{F}$, werkende in het volume-element dS voorstelt, zoodat inderdaad $(\mathbf{F}.\,\dot{\mathbf{D}})$ de arbeid is, die door $\mathbf{F}$ per volume-eenheid en tijdseenheid wordt verricht.

§ 6. Het komt er nu op aan, de trillingen, die $\mathbf{F}$ teweegbrengt, te berekenen. Lorentz [1]) berekent het veld, dat door de kracht $\mathbf{F}$ teweeggebracht wordt in een punt, op grooten afstand gelegen van de plaats, waar $\mathbf{F}$ werkt. Wij daarentegen moeten de trillingen kennen, die veroorzaakt worden op de plaats zelve, waar $\mathbf{F}$ werkt, zoodat wij slechts gedeeltelijk den door Lorentz aangewezen weg kunnen volgen. Er moet een oplossing gevonden worden van de in de vorige paragraaf vermelde grondvergelijkingen en (51). Men voert een vector $\mathbf{A}$ in, waarvan de componenten bepaald worden door de vergelijkingen

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \mathbf{A}_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \mathbf{A}_x}{\partial z^2}-\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}_x}{\partial t^2}=-\mathbf{F}_x,\ \text{enz.,} \qquad (52)$$

waarin

$$u=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}$$

de snelheid van het licht in het beschouwde medium is.

---

[1]) H. A. Lorentz, Théories statistiques en thermodynamique, p. 83.

Nu wordt aan de grondvergelijkingen en (51) voldaan door

$$E_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2}, \text{ enz.} \qquad (53)^{1)}$$

$$H_x = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right), \text{ enz.}$$

Aan de vergelijkingen (52) voldoet:

$$A_x = \frac{1}{4\pi}\int \frac{1}{r} F_{x\left(t-\frac{r}{u}\right)}\, dv, \text{ enz.},$$

waarin de integraties uitgestrekt moeten worden over de oneindige ruimte; r is de afstand van het volume-element dv tot het punt, waarvoor men A wil berekenen; de index $t - \frac{r}{u}$ geeft aan, dat, als men A wil kennen op den tijd t, men voor F_x, F_y en F_z de waarden moet nemen, welke deze grootheden in het element dv op den tijd $t - \frac{r}{u}$ hebben.

Wij nemen nu aan, dat de kracht F werkt in een volume-element dS van de gedaante van een bolletje B met den straal R, die zeer klein zij in vergelijking met de golflengte λ; F kan dan in het geheele bolletje als gelijk en gelijkgericht beschouwd worden. Het middelpunt van het bolletje ligge in den oorsprong O der coördinaten.

Stel, dat de componenten van F zijn

$$F_x = p \cos nt, \quad F_y = 0, \quad F_z = 0.$$

Dan is

$$A_y = 0, \quad A_z = 0.$$

Wij berekenen nu eerst A_x voor een punt P met de coördinaten x, y, z, binnen het bolletje gelegen, en op een afstand $OP = l$ van O verwijderd. Men heeft

$$A_x = \frac{p}{4\pi}\int \frac{1}{r} \cos n\left(t - \frac{r}{u}\right) dv.$$

[1]) Er zal geen verwarring ontstaan tusschen de E van deze en de volgende paragraaf, die de electrische kracht van het door F teweeggebrachte veld aangeeft, en de E van de vorige paragrafen, welke de electrische kracht van den invallenden lichtbundel voorstelt.

Hoewel $R \ll \lambda$ ondersteld werd, kan men toch niet in plaats van $\cos n\left(t - \frac{r}{u}\right)$ onder het integraalteeken den factor $\cos nt$ vóór dat teeken zetten, omdat, wanneer A_x evenredig met $\cos nt$ is, de arbeid $(F.\dot{D})$ nul wordt, zooals wij later zullen zien.

Is r de afstand van P tot een punt Q van een willekeurig volume-element dv van het bolletje, ϑ de hoek, dien PQ met PO maakt, en φ het azimuth van wenteling om OP, dan is

$$dv = r^2 \sin\vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi.$$

De integratie, waaruit A_x bepaald wordt, moet uitgestekt worden over het bolletje. De integratie naar φ levert een factor 2π op.

Men kan den integraal schrijven als de som van twee andere; de eerste heeft betrekking op een bolletje met P als middelpunt en $R - l$ tot straal; bij dezen geeft de integratie naar ϑ tusschen de grenzen o en π een factor 2. De tweede integraal wordt uitgestrekt over de rest van het bolletje B.

De grenzen voor ϑ zijn hier 0 en de hoek ϑ_1, die bepaald wordt door

$$R^2 = r^2 + l^2 - 2\,rl\cos\vartheta_1.$$

Men vindt dus

$$\frac{2}{p} A_x = 2\int_0^{R-l} r\cos n\left(t - \frac{r}{u}\right) dr + \int_{R-l}^{R+l}\int_0^{\vartheta_1} r\cos n\left(t - \frac{r}{u}\right)\sin\vartheta \, dr \, d\vartheta,$$

waarin voor ϑ_1 geldt

$$\cos\vartheta_1 = \frac{r^2 + l^2 - R^2}{2\,r\,l}.$$

Er komt:

$$\frac{2}{p} A_x = \frac{R^2 - l^2}{2\,l}\int_{R-l}^{R+l}\cos n\left(t - \frac{r}{u}\right) dr + \int_0^{R-l} r\cos n\left(t - \frac{r}{u}\right) dr +$$

$$+ \int_0^{R+l} r\cos n\left(t - \frac{r}{u}\right) dr - \frac{1}{2\,l}\int_{R-l}^{R+l} r^2\cos n\left(t - \frac{r}{u}\right) dr,$$

waaruit men vindt:

$$\frac{2}{p} A_x = -\frac{u^3}{n^3 l} \sin n \left(t - \frac{R+l}{u}\right) + \frac{u^3}{n^3 l} \sin n \left(t - \frac{R-l}{u}\right) -$$

$$-\frac{u^2}{n^2}\frac{R}{l} \cos n \left(t - \frac{R+l}{u}\right) + \frac{u^2}{n^2}\frac{R}{l} \cos n \left(t - \frac{R-l}{u}\right) - 2\frac{u^2}{n^2} \cos nt.$$

Dus is:

$$\frac{n^2}{u^2 p} A_x = \frac{u}{n l} \sin \frac{nl}{u} \left\{ \cos n \left(t - \frac{R}{u}\right) - \frac{n R}{u} \sin n \left(t - \frac{R}{u}\right) \right\} - \cos nt.$$

Splitst men in termen met sin nt en termen met cos nt, dan komt er

$$\frac{n^2}{u^2 p} A_x = \frac{u}{n l} \sin \frac{n l}{u} \left\{ \left(\sin \frac{n R}{u} - \frac{n R}{u} \cos \frac{n R}{u}\right) \sin nt + \right.$$

$$\left. + \left(\cos \frac{n R}{u} + \frac{n R}{u} \sin \frac{n R}{u}\right) \cos nt \right\} - \cos nt.$$

Zooals reeds werd opgemerkt, leveren de termen met cos nt in de uitdrukking voor A_x geen bijdrage tot den arbeid $(F . \dot{D})$; men ziet dit in, als men opmerkt, dat E_x gevonden wordt door A_x tweemaal naar een coördinaat en ook tweemaal naar den tijd te differentiëeren, en dat na elke dezer beide bewerkingen de cos nt een cosinus blijft. Het aan dit stuk van E_x beantwoordende deel van D_x is dus ook evenredig met cos nt, maar het overeenkomstige deel van $\dot{D}_x$ met sin nt, waardoor het daaraan beantwoordende deel van $F_x \dot{D}_x$ gemiddeld per tijdseenheid nul oplevert. Toch zullen wij den term met cos nt voorloopig nog behouden.

Is $\lambda_1 = \frac{\lambda}{\sqrt{\varepsilon}}$ de golflengte van het licht in het beschouwde medium, terwijl λ die van het invallende licht was, dan is $\frac{n l}{u} = 2\pi \frac{l}{\lambda_1}$ zeer klein ten gevolge van de aanname $R \ll \lambda$, die meebrengt, dat $l \ll \lambda_1$ is. We kunnen dus ontwikkelen

$$\frac{u}{n l} \sin \frac{n l}{u} = 1 - \frac{n^2 l^2}{6 u^2} + \ldots\ldots$$

Ook $\sin\frac{n\,R}{u}$ en $\cos\frac{n\,R}{u}$ ontwikkelend, vindt men voor den coëfficiënt van sin nt binnen de accolades

$$\sin\frac{n\,R}{u} - \frac{n\,R}{u}\cos\frac{n\,R}{u} = \frac{n^3\,R^3}{3\,u^3} - \ldots\ldots,$$

en voor dien van cos nt

$$\cos\frac{n\,R}{u} + \frac{n\,R}{u}\sin\frac{n\,R}{u} = 1 + \frac{n^2\,R^2}{2\,u^2} - \ldots\ldots$$

Dus wordt

$$\frac{n^2}{u^2\,p}\,A_x = \left(1 - \frac{n^2\,l^2}{6\,u^2} + \ldots\right)\left\{\left(\frac{n^3\,R^3}{3\,u^3} - \ldots\right)\sin nt + \right.$$

$$\left. + \left(1 + \frac{n^2\,R^2}{2\,u^2} - \ldots\right)\cos nt\right\} - \cos nt.$$

Verwaarloost men nu de termen, die ten opzichte van die, welke wij neerschrijven, van de orde $\frac{n\,R}{u}$ en $\frac{n\,l}{n}$ zijn, dan wordt de uitdrukking voor A_x gelijk aan

$${}^1/_6\;p\cos nt\,(3\,R^2 - l^2).$$

Zooals te verwachten was, komt deze uitdrukking overeen met die voor den potentiaal binnen een homogenen bol met agensdichtheid p cos nt, d. w. z. als de voortplantingssnelheid oneindig groot gerekend wordt te zijn.

Om den arbeid $(\mathsf{F}.\,\dot{\mathsf{D}})$ te vinden, hebben wij echter juist het deel van A_x noodig, dat evenredig is met sin nt; dus schrijven wij, slechts den term $\frac{n^3\,R^3}{3\,u^3}$ van den factor $\left(\frac{n^3R^3}{3\,u^3} - \ldots\right)$ behoudend,

$$A_x\,(=)\,\frac{n\,p\,R^3}{3\,u}\left(1 - \frac{n^2\,l^2}{6\,u^2} + \ldots\ldots\right)\sin nt.$$

De haakjes om het $=$ teeken geven aan, dat slechts de termen met sin nt in de uitdrukking voor A_x behouden zijn.

E_x wordt volgens (53) bepaald uit

$$E_x = \left(\frac{\partial^2}{\partial\,x^2} - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2}{\partial\,t^2}\right)A_x.$$

In verband met

$$l^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

is

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} = -\,{}^1/_9\,\frac{n^3 p R^3}{u^3}\sin nt;$$

verder is

$$-\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = {}^1/_3\,\frac{n^3 p R^3}{u^3}\sin nt,$$

als men in deze laatste vergelijking den factor $1 - \frac{n^2 l^2}{6 u^2} + \ldots$ gelijk aan 1 stelt. Dus is

$$E_x = {}^2/_9\,\frac{n^3 p R^3}{u^3}\sin nt.$$

Nu wordt D_x bepaald door

$$D_x = \varepsilon (E_x + F_x).$$

Het deel van D_x, dat gelijk is aan εF_x, is evenredig met cos nt en levert dus, zooals wij zagen, geen bijdrage tot den arbeid.

Dus is hier te stellen

$$D_x = \varepsilon E_x = \frac{c^2}{u^2} E_x,$$

zoodat

$$\dot{D}_x = {}^2/_9\,\frac{c^2 n^4 p R^3}{u^5}\cos nt$$

is. Daar in ons geval

$$(F.\dot{D}) = F_x \dot{D}_x$$

is, vinden wij voor den arbeid per volume-eenheid en per tijdseenheid

$$(F.\dot{D}) = {}^1/_9\,\frac{c^2 n^4 p^2 R^3}{u^5} = \frac{c^2 n^4 p^2 dS}{12 \pi u^5}.$$

De door de kracht F in het volume-element dS per tijdseenheid verrichtte arbeid is dus

$$\frac{c^2 n^4 p^2 (dS)^2}{12 \pi u^5}, \tag{54}$$

in overeenstemming met het door LORENTZ [1]) gevonden bedrag voor de energie, door het volume-element per tijdseenheid uitgestraald. Zooals LORENTZ opmerkt, is dit bedrag onafhankelijk van de richting en van de phase der kracht F. Men zou dan ook een overeenkomstige uitdrukking gevonden hebben, indien men gesteld had

$$\mathsf{F}_x = p_x \cos(nt + q),\ \mathsf{F}_y = p_y \cos(nt + q),\ \mathsf{F}_z = p_z \cos(nt + q).$$

Bij de boven gebezigde nauwkeurigheid zou men, op geheel dezelfde wijze te werk gaande, voor den door F in het volume-element dS per tijdseenheid verrichtten arbeid gevonden hebben

$$\frac{c^2 n^4 (dS)^2}{12 \pi u^5} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2).$$

§ 7. Men kan de opmerking maken, dat het niet geoorloofd is de kracht F binnen het bolletje B overal gelijk aan $p \cos nt$ te stellen, zooals in de vorige paragraaf geschiedde, en wel omdat F, evenals de electrische kracht van den invallenden lichtbundel, evenredig is met $\cos n\left(t - \frac{z}{u}\right)$, als de z-as gelegd wordt langs de richting, waarin het licht invalt. Weliswaar werden de afmetingen van het bolletje ondersteld klein te zijn in vergelijking met de golflengte van het licht, maar voor verschillende volume-elementen binnen het bolletje zijn de verschillen in z van dezelfde orde van grootte als de verschillen in r, den afstand tot het gestelde punt P, die bij de bepaling van den potentiaal A in rekening zijn gebracht.

Tegen dit bezwaar kan men het volgende zeggen:

Zooals in de vorige paragraaf werd besproken, vindt men voor den arbeid $(\mathsf{F}.\dot{\mathsf{D}})$ der kracht F, werkende in dS, nul, wanneer men F bij de berekening van A gelijk aan $p \cos nt$ stelt in plaats van gelijk aan $p \cos n\left(t - \frac{r}{u}\right)$. Als F gelijk aan $p \cos n\left(t - \frac{r}{u}\right)$ gesteld wordt, vindt men voor den genoemden arbeid de uitdrukking (54), welke evenredigheid met $(dS)^2$

[1]) H. A. LORENTZ, Théories statistiques en thermodynamique, p. 85.

aangeeft. Dat nu het rekening houden met het feit, dat de kracht F evenredig is met $\cos n\left(t - \frac{z}{u}\right)$ hoogstens een correctie van de voor den arbeid $(F.\dot{D})$ gevonden waarde zou geven, die klein is in vergelijking met die waarde, mag aangenomen worden, als wordt aangetoond, dat, wanneer A_x gelijkgesteld wordt aan

$$\frac{p}{4\pi}\int_B \frac{1}{r}\cos n\left(t - \frac{z}{u}\right) dv,$$

men voor den arbeid $(F.\dot{D})$ evenzeer nul vindt als wanneer voor A_x genomen wordt

$$\frac{p}{4\pi}\cos nt\int_B \frac{dv}{r}.$$

In deze beide uitdrukkingen moet de integratie over het bolletje B uitgestrekt worden.

Noemen wij de coördinaten van het punt, waaraan het element dv binnen het bolletje gelegen is, ξ, η, ζ, terwijl x, y, z de coördinaten van het gestelde punt P blijven voorstellen. Dan is

$$A_x = \frac{p}{4\pi}\int_B \frac{\cos n\left(t - \frac{\zeta}{u}\right)}{r} dv.$$

Verder is

$$E_x = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) A_x,$$

dus

$$E_x = \frac{p}{4\pi}\iiint\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{n^2}{u^2}\frac{1}{r}\right\}\cos n\left(t - \frac{\zeta}{u}\right) d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Hierin moet de integratie naar ξ, η, ζ over het bolletje B uitgestrekt worden.

Evenals in de vorige paragraaf kan bij de berekening van den arbeid $(F.\dot{D})$ gesteld worden

$$D_x = \varepsilon E_x.$$

Men vindt dus voor den arbeid $(\mathsf{F}.\dot{\mathsf{D}})$ dS der krachten F, werkende in dS, omdat

$$\mathsf{F} = p \cos n \left(t - \frac{z}{u}\right)$$

is,

$$-\frac{n\, p^2\, \varepsilon}{4\pi} \iiiint\!\!\iint \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{n^2}{u^2}\frac{1}{r} \right\} \cos n \left(t - \frac{z}{u}\right) \times$$

$$\times \sin n \left(t - \frac{\zeta}{u}\right) d\,\xi\, d\,\eta\, d\,\zeta\, d\,x\, d\,y\, d\,z,$$

waarin zoowel naar x, y, z als naar ξ, η, ζ over het geheele bolletje geïntegreerd moet worden.

Nu is

$$\cos n \left(t - \frac{z}{u}\right) \sin n \left(t - \frac{\zeta}{u}\right) =$$

$$= {}^1/_2 \left\{ \sin n \left(2\,t - \frac{z+\zeta}{u}\right) + \sin n \frac{z-\zeta}{u} \right\}.$$

De bijdrage, die de term, welke evenredig is met $\sin n \times \times \left(2\,t - \frac{z+\zeta}{u}\right)$, levert tot den arbeid, is gemiddeld per tijdseenheid nul. Ook de bijdrage, geleverd door den term, die evenredig is met $\sin n \frac{z-\zeta}{u}$, is nul, omdat

$$\iiiint\!\!\iint \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{n^2}{u^2}\frac{1}{r} \right\} \sin n \frac{z-\zeta}{u}\, d\,\xi\, d\,\eta\, d\,\zeta\, dx\, dy\, dz$$

nul is; dit is het geval, omdat de integrand van teeken verandert, als men x met ξ, y met η, z met ζ verwisselt.

§ 8. Om nu ten slotte aan te toonen, dat de arbeid der krachten (48) gelijk is aan dien der krachten (45), moet nog de gelijkheid bewezen worden van de uitdrukkingen (50) en

$$\frac{n^4\, p^2\, (dS)^2}{12\,\pi\, c^3}. \tag{55}$$

Immers, de arbeid der krachten $-\mathsf{F}$ uit formule (45), werkende in dS, is gelijk aan dien der krachten F en dus eveneens gelijk aan de uitdrukking (54), terwijl men voor deze uitdrukking, $u = c$ stellend, kan schrijven (55).

Er moet dus nog aangetoond worden, dat

$$p^2 (dS)^2 = m\, b^2$$

is.

Nu is volgens § 3 van dit hoofdstuk

$$a\, dS = \mu\, b,$$

waarin a voorstelde de amplitudo der periodieke electromotorische krachten k, die de molekulen met de wisselende momenten kunnen vervangen. Eveneens bleek in § 3, dat

$$-\mathsf{F} = \mathsf{k}$$

is, zoodat ook de amplituden p en a van deze krachten aan elkaar gelijk zijn. Dus is

$$p\, dS = \mu\, b$$

en

$$p^2 (dS)^2 = \mu^2\, b^2.$$

Neemt men in aanmerking, dat het gemiddelde van μ^2 voor een groot aantal volume-elementen dS gelijk is aan m, dan krijgt men

$$p^2 (dS)^2 = m\, b^2,$$

wat bewezen moest worden.

§ 9. Wanneer een lichaam, waarvan de molekulen onregelmatig verspreid zijn, getroffen wordt door een bundel lichtstralen, wordt een deel van het licht verstrooid. Eenige experimenteele bevestigingen hiervan vermeldden wij reeds in Hoofdstuk III, § 4. Als zoodanig noemen wij nu nog de proeven van R. J. Strutt [1]), die de verstrooiing, welke door stofvrij gemaakte lucht en andere gassen wordt veroorzaakt, waarnam in een richting loodrecht op die van den invallenden bundel. Hij werkte met electrisch booglicht en ook met het licht van een kwiklamp en constateerde de blauwe kleur van het verstrooide licht.

De theorie eischt de evenredigheid van de intensiteit van het verstrooide licht met het aantal diffracteerende deeltjes;

---

[1]) R. J. Strutt, Proc. Royal Soc. of London A 94 (1918) p. 453; A 95 (1918) p. 155.

deze evenredigheid vond STRUTT bevestigd, toen hij met gassen en dampen van kleinere en grootere dichtheid werkte, n.l. koolstofdioxyde en etherdamp tot het verzadigingspunt toe (temperatuur 21° C.). Daarbij werd de intensiteit niet grooter dan de theorie doet verwachten; molekuulaggregaten vormden zich dus bij de grootere dichtheid niet in voldoende mate om van hun invloed op de waargenomen verstrooiing te doen blijken.

Omdat de extinctie-coëfficiënt h evenredig is met $(\mu - 1)^2$, μ de brekingsindex zijnde, verwacht men overeenkomstig de formule

$$\frac{dI}{dx} = - h I$$

van Hoofdstuk III, § 2, dat ook de intensiteit van het verstrooide licht evenredig met $(\mu - 1)^2$ zal zijn. Ook deze verwachting vond STRUTT, bij vergelijking der intensiteiten van het door verschillende gassen verstrooide licht, bevestigd.

Wanneer echter een lichaam van volkomen regelmatige, kristallijne structuur getroffen wordt door een bundel lichtstralen, waarvan de golflengte λ groot is in vergelijking met de molekulaire afstanden, heeft er geen verstrooiing van het licht plaats overeenkomstig het in § 1 van dit Hoofdstuk besprokene.

LARMOR [1]) is van oordeel, dat men bij een gas van zoodanige dichtheid, dat het aantal molekulen per kubieke golflengte 10^6 is, of bij een vloeistof of een vast lichaam, waarbij dit aantal 10^9 moge bedragen, de zaak zoo moet opvatten, dat het de bewegingen der molekulen zijn, die de rangschikking der deeltjes tot een onregelmatige maakt. Bewogen de molekulen niet, dan zou, ten gevolge van het groote aantal molekulen per kubieke golflengte, de verspreiding niet als onregelmatig beschouwd mogen worden.

In verband hiermede maken wij melding van R. J. STRUTT's bevinding [2]), dat een bepaalde hoeveelheid vloeibare ether een

[1]) J. LARMOR, Phil. Mag. 37 (1919), p. 161. Zie ook RAYLEIGH, Phil. Mag. 36 (1918), p. 429.

[2]) R. J. STRUTT, Proc. Royal Soc. of London A 95 (1918), p. 155.

zevenmaal zoo geringe verstrooiing teweegbrengt als de overeenkomstige massa etherdamp (temperatuur 21° C.), hetgeen wijst op de grootere regelmaat in de rangschikking der molekulen bij een vloeistof dan in die bij een damp.

Ook een kristal zal ten gevolge van de warmtebeweging der atomen om een evenwichtsstand eenige verstrooiing veroorzaken, al zal deze, wegens de regelmatige rangschikking der kristalatomen, gering zijn. Hiermede in overeenstemming is de uitkomst van een experiment van R. J. Strutt, waarvan Larmor [1]) melding maakt. Bij deze proef bleek, dat de verstrooiing, teweeggebracht door een kolom kwartskristal klein is in vergelijking met die, welke door glas of een vloeistof zooals ether werd veroorzaakt.

§ 10. Beschouwen wij nu het geval, dat de golflengte van het invallende licht niet meer, zooals totnogtoe ondersteld werd, groot is in vergelijking met de molekulaire afstanden, dus het geval, dat Röntgenstralen op een kristal vallen. Nu heeft de „terugkaatsing" van de stralen plaats, welke door von Laue en zijne medewerkers [2]) werd ontdekt. Het verschil tusschen de werking van de kristalatomen op licht- en op Röntgen-stralen heeft zijn oorzaak in het verschil in golflengte van die beide soorten van stralen.

Wij letten op een deel van een kristal met afmetingen, die groot zijn in vergelijking met de golflengte der opvallende Röntgenstralen, en beschouwen den toestand in een verwijderd punt P, gelegen in een richting, waarin een z.g. maximum wordt waargenomen. Stel, dat de invallende bundel beschouwd kan worden als uit evenwijdige stralen te bestaan, en dat het punt P zóó ver van het kristal verwijderd is, dat de van de verschillende punten van dit laatste naar P getrokken lijnen geacht mogen worden evenwijdig te zijn. Het beschouwde deel van het kristal denken wij ons verdeeld in „schijfjes", zoodanig dat de atomen van een zelfde schijfje in P even-

[1]) J. Larmor, l. c.

[2]) W. Friedrich, P. Knipping u. M. Laue, Ann. d. Phys. 41 (1913), p. 971.

wichtsverstoringen met dezelfde phase teweegbrengen, en dat de phasen Φ der evenwichtsverstoringen, veroorzaakt door de atomen van de opeenvolgende schijfjes, met een oneindig klein bedrag $d\,\Phi$ opklimmen. Wij nemen aan, dat een zoodanig deel van het kristal beschouwd wordt, dat de schijfjes ondersteld mogen worden even groot te zijn.

Die schijfjes, voor welke de waarden van Φ een geheel aantal malen 2π verschillen, vereenigen wij in gedachten telkens tot een „stelsel schijfjes" S. Dat nu in het punt P een „maximum" wordt waargenomen, kan men, zich stellende op het standpunt van Hoofdstuk IV, § 2, hieruit verklaren, dat de verschillende stelsels S niet evenveel atomen bevatten. Immers de aantallen atomen in schijfjes, die tot verschillende stelsels behooren, zullen niet even groot zijn (men denke aan de z.g. kristallographische vlakken, door welke de Röntgenstralen volgens de opvatting van W. L. Bragg [1]) teruggekaatst worden) ten gevolge van het feit, dat de golflengte en de onderlinge afstanden der atomen van dezelfde orde van grootte zijn, en in verband met de regelmatige ligging der atomen in de roosterpunten. Zelfs vallen, wanneer men met een „maximum" te doen heeft, en van de warmtebeweging afziet, alle deeltjes in één „stelsel schijfjes".

Bij deze beschouwing van de werking der kristalatomen op Röntgenstralen werd de warmtebeweging der atomen niet in aanmerking genomen. Deze warmtebeweging heeft, zooals Debije [2]) berekende, geen invloed op de scherpte der maxima; echter verminderen de maxima in intensiteit; er heeft verstrooiing plaats.

[1]) W. L. Bragg, Proc. Cambridge Phil. Soc. 17 (1913), p. 43.
[2]) P. Debije, Ann. d. Phys. 43 (1914), p. 49.

Stellingen.

Stellingen.

I.

De wijze, waarop Levi-Civita de berekening van den loop der lichtstralen in een dubbelbrekend medium wil terugbrengen tot het zoeken van geodetische lijnen in een ruimte met een door bijzondere coëfficiënten bepaald lijnelement, berust op een vergissing. (T. Levi-Civita, Rendiconti d. Reale Acc. d. Lincei, Serie V, Vol. XXIV (1915), 1° Sem., p. 666.)

II.

De door Shaha en Basu opgestelde vorm van de toestandsvergelijking

$$p = \frac{R\,T}{2\,b} \log \frac{V}{V - 2\,b},$$

waarbij van de onderlinge aantrekking der molekulen is afgezien, verdient niet de voorkeur boven dien van van der Waals, omdat bij de afleiding van den eerstgenoemden vorm, evenmin als bij die van den laatsten, rekening gehouden is met het gelijktijdig botsen van meer dan twee molekulen. (M. N. Shaha and S. N. Basu, Phil. Mag. 36 (1918), p. 199.)

III.

De wijze, waarop Shaha en Basu den invloed der molekulaire aantrekking in rekening brengen, n.l. door invoering van den factor $e^{-\frac{a}{R\,T\,V}}$, is niet gelukkig te noemen, omdat zij tot uitkomsten leidt, die in strijd zijn met experimenteele gegevens. (M. N. Shaha and S. N. Basu, Phil. Mag. 36 (1918), p. 199.)

IV.

De door van Lohuizen aangegeven spectraalreeksen van tin en antimoon bevatten lijnen, welke niet in een reeksverband behooren. (T. van Lohuizen, Proefschrift, Amsterdam, 1912.)

V.

Ten onrechte beweert Polak, dat, wanneer een trein zich met zekere snelheid over de baan beweegt, een waarnemer, die zich in rust bevindt ten opzichte van de baan, aan het bovenste punt van een wiel van den trein, ook wanneer men zich stelt op het standpunt der relativiteitstheorie, een twee maal zoo groote snelheid zal toekennen als aan het middelpunt van de wielas. Het bezwaar, dat Polak, steunend op zijn bewering, inbrengt tegen de relativiteitstheorie, is ongegrond. (Ir. W. M. Polak, Bezwaren tegen de opvattingen der relativisten, Deventer, 1918, p. 49.)

VI.

Het is wenschelijk, dat, bij de nieuwe regeling van aaneensluiting der staten op wetenschappelijk gebied, de mogelijkheid geopend wordt, dat de Nederlandsche standaardmeter en het Nederlandsche standaardkilogram met de internationale standaarden vergeleken worden.

VII.

Het is gewenscht, dat in Nederland van rijkswege een lichaam voor het ijken van meetinstrumenten wordt ingesteld.

VIII.

Ter verklaring van het feit, dat de waarden der atoomgewichten van verscheidene elementen kleine afwijkingen vertoonen van geheele veelvouden van het atoomgewicht van waterstof, zou, bij de hypothese, dat atoomkernen uit waterstofkernen en electronen bestaan, met geïnduceerde massa's rekening gehouden kunnen worden.

IX.

Eddington oppert het denkbeeld, dat vernietiging, door botsingen, van de positief en de negatief geladen deeltjes, waaruit men zich atomen opgebouwd kan denken, de energie voor de sterren zou kunnen leveren; in dezen gedachtengang is het wellicht niet noodzakelijk de vernietiging der atomen aan te nemen, maar zou men er mee kunnen volstaan te onderstellen, dat „condensatie" van de lichtere atoomkernen tot zwaardere plaats vindt. (A. S. Eddington, The Observatory, N°. 544, Vol. 42, Oct. 1919, p. 371.)

X.

De onderzoekingen van Nicholson maken het waarschijnlijk, dat men in de nevelvlekken de „oermaterie" nog aanwezig moet achten. (J. W. Nicholson, Monthly Not. Roy. Astronom. Soc., Vol. 74 (1914), p. 486.)

XI.

De afleiding, die Kiepert geeft van de betrekking

$$\frac{\pi}{4} = 1 - {}^1/_3 + {}^1/_5 - {}^1/_7 + \ldots,$$

is onjuist. (L. Kiepert, Grundriss der Differential-und Integral-Rechnung, 10^de^ druk, Dl. I, p. 214 en 250.)

XII.

Ten onrechte beweert Czuber, dat $\int_0^x \frac{dt}{lt}$ voor $x = 1$ een minimum heeft. (E. Czuber, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, Dl. II, p. 158.)