Fysica van Elementaire Deeltjes
3e jaars college

Najaar 2007

Nederlandse vertaling van het boek

Particles and Nuclei

An Introduction to the Physical Concepts

door

Povh, Rith, Scholz and Zetsche

Stof: Deel I, §19.3-5 uit deel II en de Appendix

plus

Aanvullende teksten en extra opgaven

verwijzingen naar vergelijkingen in
deze aanvulling: "Eq.(yy)" – het boek: "EqPN.(x.yy)".

Prof. Pierre van Baal, Instituut-Lorentz
Universiteit Leiden

Inhoud

1 Inleiding

Eind 19e eeuw bestaat alle materie uit atomen, maar uit recurrente betrekkingen is gebleken dat de structuur uit kleinere deeltjes was opgebouwd.

Met de ontdekking (1932) van het neutron, naast de elektrisch geladen protonen, was het duidelijk dat de kernen opgebouwd waren uit nucleonen, met de electronen in een veel grotere schil. In 1930 werd ook het neutrino gepostuleerd, zodat men weer energie, impuls en hoekmomentum kon definieren in beta verval.

Midden jaren dertig had je derhalve als elementaire deeltjes het proton, neutron, electron en neutrino. Maar in de jaren vijftig en zestig is men gaan inzien dat er veel meer hadronen waren, die allemaal fundamenteel leken. Vanaf eind jaren 60 spreken we daarom van quarks: hadronen (qqq) en mesonen ($q\bar{q}$). Samen met de leptonen vormt ieder van de 3 families 2 quarks en 2 leptonen.

$10^{-10}m$, eV, Atomen
$10^{-14}m$, MeV, Kernen
$10^{-15}m$, GeV, Proton (quarks)

De vier krachten zijn gravitatie, elektromagnetisme, zwakke en sterke kracht. Eerst, tot ca. 1800, had men gravitatie, elektriciteit, magnetisme en de kracht tussen atomen en molekulen. Deze laatste werd de kernkracht genoemd, welke midden jaren 70 de sterke kracht werd die de quarks bindt.

Gravitatie wordt onbelangrijk geacht op het niveau van de drie andere krachten. Die worden uitgewisseld door spin 1 deeltjes (gravitatie door spin 2 deeltjes): Het foton voor elektromagnetisme, het gluon voor de sterke kracht, en de zware (80-90 GeV) vector bosonen voor de zwakke kracht. Ze hebben elektrische, kleur en zwakke (of Y) lading. Leptonen en quarks hebben elektrische en zwakke lading, alleen de quarks hebben daarnaast kleur lading.

De zwakke kracht heeft korte dracht (vanwege Heisenberg's onzekerheidsrelatie) en de elektromagnetische kracht heeft een lange dracht. De sterke kracht die gluonen met een kleurlading (en dus zelf-interactie) geeft, heeft over het algemeen een korte dracht.

Symmetrien zijn belangrijk: tijd, ruimte en hoeken geven energie, impuls en draaimoment. Er zijn ook discrete symmetrien, zoals pariteit ($\pm$, ℓ geeft bijv. pariteit $(-1)^{\ell}$). Voor elementaire deeltjes is er een intrinsieke pariteit: Voor een boson en een antiboson is dat het zelfde, maar voor een antifermion is dit het tegengestelde van een fermion. Verder is er natuurlijk lading, C-pariteit en tenslotte groepsrepresentatie, bijv. sterke of zwakke isospin.

Stel we hebben N klassieke deeltjes met massas $m_{(i)}$ die met elkaar interacties hebben, waarbij de potentiële energie alleen van de afstand tussen de twee deeltjes afhangt, $V(\vec{r}_{(1)},\ldots,\vec{r}_{(N)})=\sum_{i>j}V(|\vec{r}_{(i)}-\vec{r}_{(j)}|)$. Zo'n potentiaal is overduidelijk invariant onder translaties en rotaties.

We gaan uit van het principe van minimale actie, dat zegt dat de beweging van de deeltjes wordt beschreven door die banen $\vec{r}_{(i)}(t)$ waarvoor de actie S,

$$S=\int_{t_b}^{t_e}dtL,\quad L=\sum_i\left(\frac{1}{2}m_{(i)}\dot{\vec{r}}_{(i)}^{\,2}\right)-V(\vec{r}_{(1)}(t),\ldots,\vec{r}_{(N)}(t)),\tag{1}$$

maximaal is (t_b en t_e zijn de begin- en eindtijd, L is de Lagrangiaan).

Ter *herinnering*, om hieruit de bewegingsvergelijkingen af te leiden, kijken we naar een *willekeurige* verandering $\delta\vec{r}_{(i)}(t)$ en eisen dat S niet verandert:

$$\delta S=\int_{t_b}^{t_e}dt\sum_i\Big(m_{(i)}\dot{\vec{r}}_{(i)}(t)\cdot\delta\dot{\vec{r}}_{(i)}(t)-\delta\vec{r}_{(i)}(t)\cdot(\vec{\nabla}_{(i)}V)(\vec{r}_{(1)}(t),\ldots,\vec{r}_{(N)}(t))\Big)=0,\tag{2}$$

waar $\nabla^k_{(i)}V=\partial V/\partial r^k_{(i)}$. We voeren nu een partiële integratie uit (aannemende dat $\delta\vec{r}(t_b)=\delta\vec{r}(t_e)=\vec{0}$), zodat

$$\delta S=\int_{t_b}^{t_e}dt\sum_i\Big(-m_{(i)}\ddot{\vec{r}}_{(i)}(t)-(\vec{\nabla}_{(i)}V)(\vec{r}_{(1)}(t),\ldots,\vec{r}_{(N)}(t))\Big)\cdot\delta\vec{r}_{(i)}(t).\tag{3}$$

Dit moet nu gelijk aan nul zijn voor *iedere* variatie $\delta\vec{r}_{(i)}(t)$. Kies bijv. $\vec{r}_{(j)}(t)=\vec{0}$ voor $j\neq i$ en $\vec{r}_{(i)}(t)$ bijna overal $\vec{0}$ behalve rond een vaste t (je kunt dit ook makkelijk beargumenteren als je de intergraal door een som benadert), hieruit volgt dan de welbekende bewegingsvergelijking:

$$\frac{\delta S}{\delta\vec{r}_{(i)}(t)}-\frac{d}{dt}\frac{\delta S}{\delta\dot{\vec{r}}_{(i)}(t)}=0,\ \text{of}\ m_{(i)}\ddot{\vec{r}}_{(i)}(t)=-(\vec{\nabla}_{(i)}V)(\vec{r}_{(1)}(t),\ldots,\vec{r}_{(N)}(t)).\tag{4}$$

Natuurlijk kun je hiermee rechtstreeks controleren dat de impuls behouden is. We kunnen echter *slim* gebruik maken van de symmetrie en het variatie principe. We hadden verondersteld dat de potentiaal invariant is onder translaties. M.a.w. als $\delta\vec{r}_{(i)}(t)=\delta\vec{a}(t)$ voor alle i, dan geldt dat de potentiaal niet verandert. Het is belangrijk op te merken dat aangezien de potentiaal niet expliciet van de tijd afhangt $\delta\vec{a}(t)$ *niet* tijds*onafhankelijk* hoeft te zijn. Omdat $\delta S = 0$ moet gelden voor iedere willekeurige variatie, en in het bijzonder voor deze, vinden we

$$\delta S = \int_{t_b}^{t_e} dt \sum_i \left(-m_{(i)}\ddot{\vec{r}}_{(i)}(t)\right) \cdot \delta\vec{a}(t) = -\int_{t_b}^{t_e} dt\ \dot{\vec{P}}(t) \cdot \delta\vec{a}(t) = 0 \qquad (5)$$

voor *willekeurige* $\delta\vec{a}(t)$, zodat we weer concluderen dat $\dot{\vec{P}}(t) = 0$, waarin uiteraard $\vec{P}(t) = \sum_i m_{(i)}\dot{\vec{r}}_{(i)}(t)$ de totale impuls is.

Extra opgaven: Bewijs nu zelf eenvoudig hoe het behoud van impulsmoment volgt uit invariantie onder rotaties. Laat daartoe eerst zien dat een rotatie over een hoek $|\vec{\omega}|$ om een as met richting $\vec{\omega}$ aanleiding geeft tot $\delta\vec{r}_{(i)} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{(i)}$.

Experimenten vallen uiteen in verstrooiing en spectroscopie. In het eerste schieten we deeltjes met vaste energie en impuls af, bijv. electronen met $\lambda = h/p$ die ruwweg overeenstemmen met de afmetingen van de kern. Tot nog toe is geen substruktuur gevonden voor quarks en leptonen ($E_e \approx 10^{11} eV$ voor electronen en $E_p \approx 10^{12} eV$ voor protonen). Bij de spectroscopie is men geinteresseerd in het waarnemen van de vervalsproducten.

De detectoren produceren elektrische en optische signalen. Neutrale deeltjes, zoals het neutron en neutrino, vallen uiteen in geladen deeltjes. De deeltjesdetectoren zijn: scintillatoren, gascounters, semiconductors, Cherenkovcounters en calorimeters die in App.A.2 besproken worden.

De eenheden zijn in het bijzonder de femtometer (fm of Fermi, $10^{-15}m$) en de electronvolt ($1eV = 1.602 \times 10^{-19} J$), ook uitgedrukt in keV, MeV of GeV (10^3, 10^6 en $10^9 eV$). Deze zijn gerelateerd door de onzekerheidsrelatie, $\hbar c = 197.327$ MeV.fm≈ 200 MeV.fm. $\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c) \approx 1/137$ speelt de historisch belangrijke rol van de fijnstructuur constante. Als $\hbar = c = 1$ hebben we $\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0)$, maar in Gaussische eenheden is dat e^2 ($4\pi\epsilon_0 = 1$) en in Heavyside-Lorentz eenheden $e^2/(4\pi)$ (elementaire deeltjes).

2 Globale Eigenschappen van Kernen

Het electron werd in 1897 door Thompson gevonden. Hij kon de snelheid en verhouding tussen de massa en de lading bepalen, welke onafhankelijk was van de kathode en het gas. Hij mat ook de lading (in 1910 met de methode van Millikan verbeterd), en dus de electron massa.

In 1911 ontdekt Rutherford het atoom (Geiger en Marsden speelden daarin ook een rol) door het model van Tompson uit te sluiten, waar electronen en de positief geladen kern gelijkmatig verdeeld waren. Rutherford liet zien dat alphadeeltjes over grote hoeken nog werden afgebogen, en hij vond een centrale en afstotende Coulomb potentiaal uit de hoekverdeling, met de electronen in wijde banen er om heen.

De beschieting met alpha deeltjes op lichte kernen toonde aan dat alphadeeltjes He-kernen waren. Maar hij demonstreerde ook hoe alphadeeltjes weer uiteen vielen in constituents, zoals $^{14}N + {}^{4}He \rightarrow {}^{17}O + p$, waarin waterstofatomen gezien kunnen worden als elementaire deeltjes van de kernen.

Het neutron is door Chadwick in 1932 ondekt, als straling van alphadeeltjes (tengevolge van polonium) op beryllium, ${}^{9}_{4}Be + {}^{4}_{2}He \rightarrow {}^{12}_{6}C + n$. (Dit was eerder gezien, maar niet onderkent.) Hij mat de terugstoot energie bij verstrooiing aan waterstof-, helium- en stikstofatomen en vond dat de massa van het neutron vrijwel gelijk was aan dat van een proton.

De kernkracht is veel sterker dan de elektromagnetische kracht, die het atoom bij elkaar hield. Voor kernen is het massaverschil dicht bij de 1%, wat een experimenteel bewijs voor $E = mc^2$ gaf.

Het atoomgetal Z geeft de lading van de kern weer, waar omheen Z electronen cirkelen. Z bepaalt de chemische structuur. De standaard methode om lading te bepalen is door X-rays, waar Moseley's wet bepaalt dat de K_α lijn evenredig is met $(Z-1)^2$. Men heeft gecontroleerd dat $|e_p + e_e| \leq 10^{-18}$, met andere woorden het atoom is elektrisch neutraal. Uit de cosmologie kan zelfs een kleiner bovenlimiet gevonden worden.

De bindingsenergie $B(Z, A) = [ZM({}^1H) + (A-Z)M_n - M(A, Z)]c^2$ wordt gegeven als een functie van Z (isotopen) en A (isobaren), met N (isotonen) een functie van Z en A. De massa $M({}^1H) = M_p + m_e$ wordt gebruikt om de electronen mee te nemen. We hebben $M_p = 938.272 MeV/c^2 = 1836.15 m_e$, $M_n = 939.566 MeV/c^2 = 1838.68 m_e$ en $m_e = 0.511 MeV/c^2$, met $1.783 \times 10^{-30} kg/(MeV/c^2)$ voor SI eenheden. We classificeren ze met ${}^{A}X$, maar soms ook met ${}^{A}_{Z}X$ of ${}^{A}_{Z}X_N$.

De bindingsenergie kan berekend worden als de atoommassa bekend is. Voor de afbuiging van een ion met lading Q bestaat een nauwkeurige formule in termen van $p = Mv$ en $E_{\text{kin}} = Mv^2/2$. Als we eerst een elektrisch veld hebben dat het ion een kromming geeft van $r_E = Mv^2/(QE)$ $(a = QE/M = \omega^2 r_E = v^2/r_E)$, en vervolgens een magnetische veld dat een kromming geeft van $r_M = Mv/(QB)$ $(a = QvB/M = \omega^2 r_M = v^2/r_M)$, evenredig aan de impuls, dan kan men de ionen scheiden door eerst Q/M elektrisch te scheiden en met een magtneetveld de rest (Q of M) (zie Fig. 2.1 voor de massaspectrometer). Omdat er altijd wel koolstof in het sample zit, gebruiken we $M_{^{12}C}/12$ om de massas verkregen met een spectrometer weer te geven ($1u = M_{^{12}C}/12 = 931.494 MeV/c^2 = 1.66054 \times 10^{-27} kg$).

Nucleare abundanties worden bijv. in sterren gemeten, welke globaal het zelfde zijn als op de aarde, de maan, of op meteoren. Volgens de huidige kennis worden deze gegeven door de abundanties van deuterium en helium, bepaald in de eerste paar minuten van de Big Bang door fusie van waterstof. Sterren produceren dan elementen tot aan ijzer, ^{56}Fe, terwijl nog zwaardere elementen in explosies van supernovas ontstaan (zie Fig. 2.2). Natuurlijk kunnen lokale structuren een afwijking geven, zoals van een monster dat in de aarde op 10 km diepte werd gevonden, in een 2.6×10^9 jaar oud gneiss gebied, met een verhoogde productie van xenon isotopen (gevormd door het verval van uranium, zie Fig. 2.3).

Bepaling van de massa(s) in kernreakties is mogelijk als 3 van de kernen de energie E_X bepaald is, in bijv. $^1H + {}^6Li \rightarrow {}^3He + {}^4He$, en van de vierde de kinetisch energie. Als voorbeeld bekijken we de vangst van termische neutronen ($E_{\mathrm{kin}} \approx 1/40 eV$) door waterstof, $n + {}^1H \rightarrow {}^2H + \gamma$, waar we vinden dat de bindingsenergie $B = (M_n + M_{^1H} - M_{^2H})c^2 \approx E_\gamma + E_\gamma^2/(2M_{^2H}c^2)$.

De bepaling van bindingsenergieen is vooral gedaan met Van der Graaff, cyclotron- en betatronversnellers. Gedurende de 50- en 60-er jaren is de massaspectroscopie en de energiebalans van kernreakties enorm verbeterd en is er een parametrizatie opgesteld voor de bindingsenergie per nucleon voor stabiele kernen (instabiele kernmassas kunnen niet met spectroscopie bepaald worden). De semi-emperische massaformule, afkomstig van Weizsäcker, luidt $M(A,Z) = NM_n + Z^1H - a_V A + a_S A^{2/3} + a_C Z^2/A^{1/3} + a_a(N-Z)^2/(4A) + \delta/A^{1/2} = NM_n + Z^1H - B(A,Z)/c^2$. De exacte waarde van de constanten hangen af van waarvoor het geoptimaliseerd is. Een mogelijke set is:

$a_V = 15.67 MeV/c^2$, $a_S = 17.23 MeV/c^2$,
$a_C = 0.714 MeV/c^2$, $a_a = 93.15 MeV/c^2$,
$\delta = -11.2 MeV/c^2$ voor even Z en N
$0 MeV/c^2$ voor oneven A (N òf Z oneven)
$+11.2 MeV/c^2$ voor oneven Z en N.

De individuele correcties zijn: De volume term die evenredig is met A, hetgeen betekend dat de kernkracht korte dracht heeft. De centrale dichtheid is $\rho_0 \approx 0.17$ nucleon/fm^3. De gemiddelde dichtheid is wat kleiner (0.13 nucleon/fm^3), en de gemiddelde internucleon afstand is 1.8 fm. De oppervlakte term corrigeert voor nucleonen aan het oppervlak. De Coulomd term neemt de interactie mee tussen de protonen, $E_{\mathrm{Cuol}} = 3Z(Z-1)\alpha\hbar c/(5R)$, hetgeen evenredig is met $Z^2/A^{1/3}$. Dit krijgen we door de lading homogeen te verdelen, $Z(Z-1)\int_0^R dW_1$, waar $dW_1 = (4\pi\rho r^3/3)(4\pi\epsilon_0 r)^{-1}(4\pi\rho r^2 dr)$ en $\rho = 3e/(4\pi R^3)$. De asymmetrische term corrigeert voor het feit dat de neutronen een meerderheid vormen bij zware kernen, dus N is veel groter dan Z (weergegeven in Fig. 2.5). En tenslotte, de parings term corrigeert voor het feit dat even paren stabieler zijn.

De Weizsäcker formule kan men afleiden uit een vloeibaar model, met constante dichtheid, korte dracht interacties, saturatie, vervormbaarheid en oppervlakte spanning. Omdat de afmeting van de druppel (de nucleonen) groot is, hebben we het hier over een quantumvloeistof. Het kan niet de fijne details weergeven van de energieniveaus (zie Fig. 2.4), en voor lage excitatie energieen is een Fermi gas van vrije deeltjes met zwakke wisselwerking beter.

In Fig. 2.6 zien we hoe ${}^{14}_{6}C_8$ gerelateerd is aan ${}^{14}_{8}O_6$ (via ${}^{14}_{7}N_7$), met behulp van een isospin symmetrie. Als we corrigeren voor het verschil aan elektrische lading, dan zijn isospin ladingen in beide gevallen gelijk. Een nucleon heeft isospin $I = 1/2$, waarbij een proton $I_3 = 1/2$ en neutron $I_3 = -1/2$ heeft ($I_3 = (Z-N)/2$). Bij ${}^{14}_{7}N_7$ hebben we ook nog andere toestanden in het spectrum. Ook quarks hebben een isospin, welke behouden is onder de sterke wisselwerking.

3 Kernstabiliteit

In Fig. 3.1 zijn de stabiele kernen aangegeven onder β-verval. Isobaren met een te grote waarde van N of Z vallen naar stabiele waarden. ${}^{56}_{26}Fe_{30}$ en ${}^{59}_{28}Ni_{31}$ bezitten een maximale bindingsenergie per nucleon. Voor zware kernen valt het uiteen door splijting, $M(A,Z) > M(A-A', Z-Z') + M(A', Z')$. Vaak is ${}^4He$ een dochterkern, en dan spreken we over α-verval. Als ze in ruwweg gelijke stukken vervallen dan spreekt men over spontane splijting. Dit gebeurt pas voor $Z > 110$.

Voor het meten van de vervalsconstante $\lambda = \Gamma$, of de vervalsbreedte $\tau = 1/\lambda$ ($t_{1/2} = \ln 2/\lambda$), heeft men de formule $A(t) = -dN(t)/dt = \lambda N(t)$ met $N(t)$ het aantal radioactieve elementen. De eenheid is 1 Bq [Becquerel]=1 verval/s. Bij een vervalstijd van een jaar of meer moeten we ook het aantal radioactieve kernen weten om $A(t)$ te bepalen.

Bij β-verval gaat men uit van een isobar, waarvoor $M(A,Z) = \alpha A - \beta Z + \gamma Z^2 + \delta A^{-1/2}$, met $\alpha = M_n - a_V + a_S A^{-1/3} + a_a/4$, $\beta = a_a + M_n - M_{^1H}$ en $\gamma = a_a/A + a_C/A^{1/3}$. Voor een vaste waarde van A plotten we het resultaat (een benadering van een parabool) als functie van Z. Maar voor even A ligt het voor oneven-oneven kernen $2\delta/A^{1/2}$ hoger dan voor even-even kernen.

Voor oneven A nemen we als voorbeeld $A = 101$. Het minimum ligt bij $^{101}_{44}Ru$. Isobars met meer neutron vervallen door $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$, zoals $^{101}_{42}Mo \rightarrow {}^{101}_{43}Tc + e^- + \bar{\nu}_e$ en $^{101}_{43}Tc \rightarrow {}^{101}_{44}Ru + e^- + \bar{\nu}_e$. Dat wil zeggen β^--verval, mogelijk als $M(A,Z) > M(A,Z+1)$ (zie Fig. 3.2). Merk op dat we hier de massa van het atoom meten; dat is inclusief het electron (de eventuele electronneutrino massa kunnen we verwaarlozen). Isobars met meer protonen kunnen door het omgekeerde effect bestaan, $p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$, oftewel door β^+-verval, d.w.z. $M(A,Z) > M(A,Z-1) + 2m_e$. We hebben wel $^{101}_{46}Pd \rightarrow {}^{101}_{45}Rh + e^+ + \nu_e$, maar geen $^{101}_{45}Rh \rightarrow {}^{101}_{44}Ru + e^+ + \nu_e$. Dit is omdat de lading afneemt (dit staat verkeerd in het boek)!

Voor de even kernen nemen we $A = 106$ als voorbeeld (zie Fig. 3.3). Voor $A > 70$ hebben we meerdere β-stabiele isobaren. Onder tweevoudige β-verval krijgen we $^{106}_{48}Cd \rightarrow {}^{106}_{46}Pb + 2e^+ + 2\nu_e$, maar met zo'n kleine waarschijnlijkheid dat we $^{106}_{48}Cd$ stabiel kunnen noemen. Oneven-oneven kernen hebben altijd een lager (rechts) gelegen even-even kern die via β^- kan vervallen. Uitzonderingen ziet men alleen bij lichte kernen, ^2_1H, ^6_3Li, $^{10}_5B$ en $^{14}_7N$. Sommige oneven-oneven kernen kunnen zowel via β^- als via β^+ vervallen. Voorbeelden zijn $^{40}_{19}K$ (zie Fig. 3.4) en $^{64}_{29}Cu$.

Er is ook de vangst van (in het bijzonder) K-electronen, waarna ze X-rays uitzenden. Dit electron wordt samen met een proton omgezet in een neutron en neutrino, $M(A,Z) > M(A,Z-1) + \epsilon$. Het is in competitie met β^+ verval, maar soms kan dat niet voorkomen.

De leeftijden van β-onstabiele kernen loopt van een aantal ms tot 10^{16} jaar. Bijv. $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ vervalt in $\tau = 886.7 \pm 1.9s$ ($\approx 15^m$). Geen twee op elkaar volgende isobars zijn stabiel onder β. In sommige gevallen is er een stabiel en de andere leeft lang. Bijv. ^{115}In en ^{187}Re vervallen in ^{115}Sn en ^{187}Os, maar met ontzettend kleine waarschijnlijkheid ($\tau = 3 \times 10^{14}$ en 3×10^{11} jaar). $^{40}_{19}K$ dat $t_{1/2} = 1.27 \times 10^9$ jaar leeft, is zo'n voorbeeld. Het vervalt via β^- (89%) in $^{40}_{20}Ca$ en via electronvangst (11%) of β^+ (0.001%) in $^{40}_{18}Ar$ (beide stabiel, Fig. 3.4). Dit voorbeeld geven we omdat 0.01% van het kalium dat we binnen krijgen ^{40}K is, en 16% van onze natuurlijk straling geeft.

Protonen en neutronen hebben een bindings energie van ongeveer 8 MeV. In de praktijk komen echter vervalsprocessen waarbij ^4He wordt uitgezonden vaker voor. Deze α straling heeft een bindingsenergie van 7 MeV/nucleon (2 of 3 nucleonen hebben een veel kleinere bindingsenergie). In Fig. 3.5 geven we de potentiele energie weer van een α-deeltje, $V_C(r) = 2(Z-2)\alpha\hbar c/r$. Binnen de kern, op een afstand R, vindt men een sterk aantrekkende potentiaal. Het α-deeltje heeft positieve energie, welke vrijkomt in het verval. De levensduur kan tussen de $10ns$ en 10^{17} jaar bedragen. In Fig. 3.6 wordt weergeven dat een klein deel van de golffunctie weg tunnelt. De Gamowfactor wordt gegeven door

$$\begin{aligned} G &= \hbar^{-1}\int_R^{r_1} dr\sqrt{2m(V_c-E)} = 2\sqrt{m(Z-2)\alpha c/\hbar}\int_R^{r_1} dr\sqrt{r^{-1}-r_1^{-1}} \\ &= 2r_1 m v\hbar^{-1}\int_\epsilon^1 dy\sqrt{1-y^2}, \qquad (6) \end{aligned}$$

waarbij we gebruiken dat $2(Z-2)\alpha\hbar c/r_1 = \frac{1}{2}mv^2$ (relativistische correctie is hier veelal niet nodig) en $\epsilon = \sqrt{R/r_1}$, waarbij r_1 het "klassieke omkeerpunt" is, $V_c(r_1) = E$. De transmissiecoefficient $T = e^{-2G}$. Als $r_1 \gg R$, vinden we met $\int_0^1 dy\sqrt{1-y^2} = \pi/4$ en $\beta = v/c$ dat $G = r_1 m v\pi/2\hbar = 2\pi(Z-2)\alpha/\beta$.

De waarschijnlijkheid per tijdseenheid voor het verval in een α-deeltje is derhalve $\lambda = w(\alpha)\frac{v_0}{2R}e^{-2G}$, waarbij $w(\alpha)$ de waarschijnlijkheid voor het vinden van een α-deeltje in de kern is, en $\frac{v_0}{2R}$ het aantal botsingen met de barriere ($v_0 \simeq 0.1$). De grote spreiding van vervaltijden komt door de Gamowfactor, waar een klein verschil in G, een groot verschil in T kan weergeven. De meeste α-emitters zijn zwaarder dan lood. Voor $A < 140$ is α-verval wel mogelijk, maar het gaat erg langzaam. Een voorbeeld van langzaam verval is ^{238}U, welke in 4.5×10^9 jaar vervalt in ^{234}Th (Fig. 3.7), en alleen ophoudt als het in stabiele ^{206}Pb eindigt. Dit is van belang omdat het inerte gas ^{222}Rn vrijkomt, dat voor ongeveer 40% het natuurlijke stralingspatroon bepaalt.

De grootste bindingsenergie per nucleon vindt men in het gebied van ^{56}Fe. Voor $Z > 40$ kunnen in principe kernen uiteenvallen door splijting, maar het is pas bij uraniumisotopen van dezelfde grote als het α-verval. Omdat de kernen onsamendrukbaar zijn nemen we aan dat het volume constant blijft. Als we nu een bolvorm vervangen door een ab^2 ellipsoide, met $a = R(1+\varepsilon)$ en $b = R/\sqrt{1+\varepsilon} = R(1-\varepsilon/2+\varepsilon^2/8+O(\varepsilon^3))$ (we hebben b nodig tot in tweede orde!), dan vindt men voor de oppervlakte energie $E_S =$

$a_S A^{2/3}(1+\frac{2}{5}\varepsilon^2+O(\varepsilon^3))$, waar we gebruiken dat het oppervlak verandert als: $Opp = 4\pi\int_0^{\pi/2} b\sin\theta\sqrt{(\frac{\partial x}{\partial\theta})^2+(\frac{\partial y}{\partial\theta})^2}d\theta = 4\pi ab\int_0^1[1+((\frac{a}{b})^2-1)z^2]^{1/2}dz = 2\pi ab\{\sqrt{1-u}+\sqrt{u}^{-1}\arcsin(\sqrt{u})\}|_{u=1-b^2/a^2}$, met $(x,y)=(a\cos\theta,b\sin\theta)$ (zie Fig. 3.9).

Analoog kan men onder deze verandering de Coulomb energie berekenen, $E_C = a_C Z^2 A^{-1/3}(1-\frac{1}{5}\varepsilon^2+O(\varepsilon^3))$, wat met de verandering van de oppervlakte energie een kwadratische afwijking geeft: $\Delta E = \frac{\varepsilon^2}{5}(2a_S A^{2/3} - a_C Z^2 A^{-1/3})$. Als $Z^2/A \geq 2a_S/a_C \approx 48$ hebben we spontane splijting, oftewel voor $Z > 114$ en $A > 270$ (zie Fig. 3.8).

Geinduceerde splijting voor zware kernen ($Z > 92$) kan plaats vinden als de splijtingsbarriere rond de 6 MeV is, bijv. door het invangen van langzame neutronen. Een oneven aantal neutronen kan paringsenergie terug gegeven, zoals de vangst van een laag energetische neutron door ^{235}U, die 6.4 MeV vrijmaakt, waar de splijting van ^{236}U 5.5 MeV levert. Andere splijtbare elementen zijn ^{233}Th en ^{239}Pu. Voor ^{238}U wordt er met 4.9 MeV niet genoeg bindingsenergie vrijgemaakt, omdat de splijtingsbarriere van ^{239}U 5.5 MeV is. Men heeft hiervoor snelle neutronen nodig.

Toch is dit niet de handigste manier. De oppervlaktespanning is nog wel eenvoudig uit te rekenen voor een willekeurige ellips, maar de Coulomb energie wordt al een stuk lastiger. En wat als de deformatie niet die van een ellips is? Het is in zo'n geval leuk terug te gaan naar de bron, N. Bohr en J.A. Wheeler: "The Mechanism of Nuclear Fission", Physical Review 56 (1939) 426. Op www.lorentz.leidenuniv.nl/vanbaal/FED.html vindt je een link naar de eerste paar paginas (p. 430 en 431 zijn relevant voor de berekening). Bohr en Wheeler gaan uit van de meest algemene axiaal symmetrische deformatie in bolcoördinaten,

$$r(\theta,\phi) = R(1+\alpha(\theta)) = R(1+\sum_\ell \alpha_\ell P_\ell(\cos\theta)), \tag{7}$$

waarin P_ℓ de Legendre polynomen zijn, bekend van zowel de Maxwell- als de Quantumtheorie.

Laten we eerst de Coulomb energie berekenen aangenomen dat de kern zich gedraagt als een incompressibele vloeistof met een homogene ladingsverdeling. In het algemeen wordt die gegeven door

$$E_C = \tfrac{1}{2}\int \frac{\rho(\vec{x})\rho(\vec{x}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x d^3x'. \tag{8}$$

We zullen de ladingsverdeling $\rho(\vec{x})$ constant veronderstellen. Omdat het hier gaat om een bijdrage aan de bindingsenergie zou je er vanaf moeten trekken de zelfenergie van ieder proton. In het boek wordt dit gedaan door de lading van ieder proton zelf over de hele kern te verspreiden, dus ρ te vervangen door ρ/Z. Ieder proton draagt dus aan zelfenergie een fractie $1/Z^2$ van de Coulomb energie, en samen dus een fractie $1/Z$. Of anders uitgedrukt, de Coulomb bindingsenergie is gelijk aan $Z(Z-1)$ maal de Coulomb zelfenergie van een enkel proton. Echt overtuigend is dit niet, en je ziet ook dat in het boek de Coulomb term in de fit gewoon evenredig met Z^2 wordt gekozen. We zullen hier dan ook verder geen correctie voor die zelfenergie meenemen.

Een eenvoudige manier om de dubbele integraal in afwezigheid van deformatie te berekenen is door gebruik te maken van de sferische symmetrie en het feit dat

$$E_C = \int_{|\vec{x}'|<|\vec{x}|} \frac{\rho(\vec{x})\rho(\vec{x}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{x}-\vec{x}'|} d^3x d^3x', \tag{9}$$

Dat is juist zo handig, omdat de integraal over $\vec{x}'$ precies de Coulomb potentiaal geeft van de lading ingesloten binnen $|\vec{x}'| < |\vec{x}|$,

$$\Phi(\vec{x}) = \int_{|\vec{x}'|<|\vec{x}|} \frac{\rho(\vec{x}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{x}-\vec{x}'|} d^3x' = \frac{\rho|\vec{x}|^3}{3\epsilon_0}\frac{1}{|\vec{x}|}, \tag{10}$$

voor $\rho(\vec{x}) = \rho$. Met $r = |\vec{x}|$ vinden we dus

$$E_C = \int_0^R 4\pi\rho r^2 \frac{\rho r^3}{3\epsilon_0}\frac{1}{r} dr = \frac{4\pi R^5\rho^2}{15\epsilon_0} = \frac{3}{5}\frac{Z^2e^2}{4\pi\epsilon_0 R}. \tag{11}$$

We gaan nu berekenen hoe volume, oppervlak en Coulomb energie veranderen als we de bol deformeren, maar de ladingsdichtheid en dus het volume constant houden (de aanname van incompressibiliteit). Het volume wordt, gebruik makende van de axiale symmetrie, gegeven door $4\pi R^3/3 = \pi\int(x^2+y^2)dz = -\pi\int_0^\pi r^2(\theta)\sin^2(\theta)d(r(\theta)\cos\theta)$. Uitwerken hiervan geeft $-\pi\int_0^\pi\left(\frac{1}{3}\sin^2(\theta)\cos\theta d(r^3(\theta))/d\theta - \sin^3(\theta)r^3(\theta)\right)d\theta$ en met partiële integratie vinden we dan $2\pi R^3\int_0^\pi \frac{1}{3}(1+\alpha(\theta))^3\sin(\theta)d\theta$. We kunnen nu de orthogonaliteit van Legendre polynomen (Eq.(13)) gebruiken, $\int_0^\pi P_\ell(\cos\theta)P_k(\cos\theta)\sin\theta d\theta = 2\delta_{k\ell}/(2\ell+1)$ (met $P_0 \equiv 1$ volgt eveneens $\int_0^\pi P_\ell(\cos\theta)\sin\theta d\theta = 2\delta_{0\ell}$), zodat $4\pi R^3/3 = 4\pi R^3\left(\frac{1}{3}+\alpha_0+\sum_\ell \alpha_\ell^2/(2\ell+1)+\mathcal{O}(\alpha_\ell^3)\right)$ en dus

$$\alpha_0 = -\sum_\ell \frac{\alpha_\ell^2}{2\ell+1}. \tag{12}$$

Vervolgens berekenen we het oppervlak, wederom gebruikmakende van de axiale symmetrie, $Opp = 2\pi \int_0^\pi |d\vec{x}/d\theta| \sqrt{x^2+y^2} d\theta$, welke omgeschreven kan worden in $Opp = 2\pi \int_0^\pi r(\theta)\sin\theta \sqrt{(dr(\theta)/d\theta)^2 + r^2(\theta)} d\theta$. Dit ontwikkelen tot in 2^e orde in $\alpha(\theta)$ geeft $Opp = 2\pi R^2 \int_0^\pi (1 + 2\alpha(\theta) + \alpha^2(\theta) + \frac{1}{2}(d\alpha(\theta)/d\theta)^2)$ $\sin\theta d\theta$. Merk nu op dat $dP_\ell(\cos\theta)/d\theta \equiv P_\ell^1(\cos\theta)$ een geassocieerd Legendre polynoom is. Deze zijn onderling ook orthogonaal! Immers, de sferisch harmonische functies

$$Y_{\ell m}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_\ell^m(\cos\theta) e^{im\phi} \tag{13}$$

zijn per constructie orthonormaal. Er volgt $\int_0^\pi P_k^m(\cos\theta) P_\ell^m(\cos\theta) \sin\theta d\theta = \delta_{k\ell} N_m$ met $N_0 = 2/(2\ell+1)$ en $N_1 = 2\ell(\ell+1)/(2\ell+1)$, zodat tot in tweede orde

$$\begin{aligned} Opp &= 2\pi R^2 \left(2 + 4\alpha_0 + \sum_\ell \frac{2+\ell(\ell+1)}{2\ell+1} \alpha_\ell^2 \right) \\ &= 4\pi R^2 \left(1 + \sum_\ell \frac{\ell(\ell+1)-2}{2(2\ell+1)} \alpha_\ell^2 \right). \end{aligned} \tag{14}$$

Als laatste moeten we nu de Coulomb energie berekenen, waar Bohr en Wheeler al hun vernuft uit de kast halen, zo lijkt het althans! Omdat de ladingsdichtheid niet verandert, kunnen we de berekening van de verandering van deze energie beperken tot een bolschil. Om dit wat preciezer te maken kunnen we ρ tot de hele ruimte uitstrekken door het in de radiële richting een stapfunctie te maken. De verandering in ρ is dan dus een blokfunctie tussen R en $R\alpha(\theta)$ met een hoogte $\pm\rho$, waar het teken samenvalt met het teken van $\alpha(\theta)$. Omdat E_C kwadratisch is in ρ vinden we

$$\begin{aligned} E_C &= \tfrac{1}{2} \int_{|\vec{x}|,|\vec{x}'|\le R} d^3x d^3x' \frac{\rho^2}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x}-\vec{x}'|} + \int_{|\vec{x}'|\le R} d^3x d^3x' \frac{\rho\delta\rho(\vec{x})}{4\pi\epsilon_0|\vec{x}-\vec{x}'|} \\ &\quad + \tfrac{1}{2} \int d^3x d^3x' \frac{\delta\rho(\vec{x})\delta\rho(\vec{x}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{x}-\vec{x}'|}. \end{aligned} \tag{15}$$

De eerste term is uiteraard Eq.(11), voor de tweede term is de integraal over $\vec{x}'$ in feite beperkt tot de bolschil $|\vec{x}'| = R$, met $\delta\rho$ vervangen door

$\rho(\alpha(\theta) + \frac{1}{2}\alpha^2(\theta))R^2$ (met een addertje onder het gras[1]); idem voor beide integralen in de laatste term. Dus ($\hat{x} \equiv \vec{x}/|\vec{x}|,\ d\Omega \equiv \sin\theta d\theta d\phi$)

$$E_C = \frac{4\pi R^5\rho^2}{15\epsilon_0} + \frac{2\pi R^5\rho^2\alpha_0}{3\epsilon_0} + \tfrac{1}{2}R^5\rho^2 \int d\Omega d\Omega' \frac{\alpha(\theta)\alpha(\theta')}{4\pi\epsilon_0|\hat{x}-\hat{x}'|}. \tag{16}$$

De laaste integraal kan worden uitgewerkt door gebruik te maken van een bekend resultaat:

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2\ell+1} \frac{\min^{\ell}(|\vec{x}|,|\vec{x}'|)}{\max^{\ell+1}(|\vec{x}|,|\vec{x}'|)} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y^*_{\ell m}(\theta,\phi)Y_{\ell m}(\theta',\phi'). \tag{17}$$

Je kunt eenvoudig nagaan dat zolang $|\vec{x}| \neq |\vec{x}'|$ de Laplaciaan in zowel $\vec{x}$ als $\vec{x}'$, werkende op linker- en rechterkant, nul geeft. Het kost echter wat meer moeite om te laten zien dat de Laplaciaan werkende op de rechterkant precies $-4\pi\delta_3(\vec{x}-\vec{x}')$ geeft, waarmee het bewijs te voltooien is. Vaak wordt deze formule in twee stappen afgeleid,

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\min^{\ell}(|\vec{x}|,|\vec{x}'|)P_\ell(\hat{x}\cdot\hat{x}')}{\max^{\ell+1}(|\vec{x}|,|\vec{x}'|)},\ P_\ell(\hat{x}\cdot\hat{x}') = \frac{4\pi}{2\ell+1}\sum_{m=-\ell}^{\ell} Y^*_{\ell m}(\theta,\phi)Y_{\ell m}(\theta',\phi'). \tag{18}$$

De eerste uitdrukking is bekend van de multipool ontwikkeling, zie bijv. §3.4.1 (i.h.b. verg.(3.94)) van “Introduction to Electrodynamics” van D.J. Griffiths (Prentice Hall, derde druk, 1999). De tweede staat bekend onder de naam “addition theorem”. Zie bijv. §3.6 van “Classical Electrodynamics”, J.D. Jackson (Wiley, 1975).

[1] In eerste instantie zou je geneigd zijn de integraal over $\vec{x}'$ in de tweede term van Eq.(15) te vervangen door $\delta\rho(\vec{x})\tilde{\Phi}(\vec{x}) = \delta\rho(\vec{x})\rho R^3/3\epsilon_0|\vec{x}|$. Er resteert dan de integraal over $\vec{x}$, $\int \tilde{\Phi}(\vec{x})\delta\rho(\vec{x})r^2\sin\theta dr d\theta d\phi = R\tilde{\Phi}(R)\rho\int_R^{R+R\alpha(\theta)} r dr d\Omega = R^3\tilde{\Phi}(R)\rho\int\left(\alpha(\theta)+\frac{1}{2}\alpha^2(\theta)\right)d\Omega$ $= 2\pi R^5\rho^2\alpha_0/3\epsilon_0$ (ga na). De adder zit hem in het feit dat de gebruikte uitdrukking voor $\tilde{\Phi}(\vec{x})$ alleen geldig is als $|\vec{x}| \geq R$, ofwel $\alpha(\theta) \geq 0$. Desalniettemin is het resultaat ook geldig voor $\alpha(\theta) < 0$, maar dat kost iets meer werk. Het dreigt toch nog fout te gaan als je Eq.(10), $\tilde{\Phi}(\vec{x}) = \Phi(\vec{x})$, denkt te kunnen gebruiken voor $|\vec{x}| < R$. Echter, we moeten in Eq.(15) ook over $|\vec{x}'| > |\vec{x}|$ integreren. Het makkelijkste is Eq.(17) te gebruiken, waar bij integratie over θ' en ϕ' alleen de term met $\ell = m = 0$ meedoet. Voor $|\vec{x}| < R$ vinden we dan $\tilde{\Phi}(\vec{x}) = (2\epsilon_0)^{-1}\rho(R^2 - \frac{1}{3}|\vec{x}|^2)$ zodat voor $\alpha(\theta) < 0$ (en derhalve $\delta\rho(\vec{x}) = -\rho$) integratie over r bij vaste θ en ϕ aan de tweede term in Eq.(15) bijdraagt: $-R\tilde{\Phi}(R)\rho\int_{R+R\alpha(\theta)}^{R} r dr = R^3\tilde{\Phi}(R)\rho\left([(1+\alpha(\theta))^3-1]/2 - [(1+\alpha(\theta))^5-1]/10\right)$, oftewel $R^3\tilde{\Phi}(R)\rho\left[\alpha(\theta)+\frac{1}{2}\alpha^2(\theta)+\mathcal{O}(\alpha^3(\theta))\right]$, en opmerkelijk genoeg is het zo dus toch allemaal nog goed gekomen!

Gebruik nu Eq.(17) met $|\vec{x}| = |\vec{x}'| = 1$, zodat de laatste dubbel-integraal in E_C eenvoudig is te bepalen. Tot op tweede orde vinden we (ga na)

$$E_C = \frac{4\pi R^5 \rho^2}{15\epsilon_0}\left(1 - 5\sum_\ell \frac{\ell - 1}{(2\ell+1)^2}\alpha_\ell^2\right). \tag{19}$$

Met $R = r_0 A^{\frac{1}{3}}$ en $\rho = 3Ze/(4\pi R^3)$ geeft $E_C + Opp \times O$, waarbij O de oppervlaktespanning is, precies het resultaat van Bohr en Wheeler (zij gebruiken cgs eenheden, waarbij effectief $4\pi\epsilon_0 = 1$). In de notatie van het boek hebben we $a_c = 3\alpha\hbar c/5r_0$ en $a_s = 4\pi O r_0^2$.

Extra opgave: Waarom valt α_1 volledig weg uit zowel de verandering in de oppervlaktespanning als in de Coulomb energie? (Hint: beredeneer dat α_1 niet zozeer een vormverandering geeft, maar een verplaatsing van het zwaartepunt.) Controleer dat voor de ellips $\alpha_2 = \epsilon$ en laat zien dat het gegeven resultaat in het boek klopt met de formule van Bohr en Wheeler.

4 Verstrooiing

Verstrooiingsexperimenten zijn een belangrijk hulpmiddel voor de kernfysica en de elementaire deeltjes. Er wordt met een (meestal) welgedefinieerde energie geschoten op een doel, waarbij $a + b \to c + d$ ontstaat. Hierbij is b het doel en a de bundel. De uitgaande deeltjes zijn dan c en d. De energie van de bundels ligt tussen 10^{-3} eV voor "koude" neutronen en 10^{12} eV (1 TeV) voor protonen. Het is ook mogelijk secundaire bundels van π- of K-meson, of van hyperonen ($\Sigma^\pm$, Θ^-, Ω^-) te maken, die een korte levensduur hebben. Vaste, vloeibare en gasvormige doelen worden gebruikt om te verstrooien. In een opslagring hebben we twee bundels die met elkaar botsen. Bij LEP (Large Electron Positron collider) op CERN was dat maximaal $E_{e^+,e^-} = 209$ GeV. Hij werd eind 2001 afgebroken om plaats te maken voor de LHC (Large Hadron Collider). Tot die tijd is de Tevatron van Fermilab de grootst proton-antiproton opslagring ($E_{p,\bar{p}} = 900$ GeV, recentelijk opgewaarderd naar 998 GeV). Bij HERA (Hadron-Elektron-Ringanlage) in DESY had men een electron-proton versneller ($E_e = 30$ GeV, $E_p = 920$ GeV). Als $\sqrt{s}$ de energie is die in het rustsysteem beschikbaar is,

$$s = (p_a + p_b)^2 = (E^a + E^b)^2 - (\vec{p}_a + \vec{p}_b)^2 c^2, \tag{20}$$

dan volgt voor LEP en de Tevatron $\sqrt{s} = 2E$, voor HERA $\sqrt{s} \approx 2\sqrt{E_p E_e}$, en voor het vaste target experimenten $\sqrt{s} = \sqrt{2m_b c^2 E_a + m_b^2 c^4 + m_a^2 c^4} \approx \sqrt{2m_b c^2 E_a}$ (uitgaande van $E \gg mc^2$).

In Fig. 4.1a wordt een elastisch verstrooiingsproces weergegeven, $a+b \rightarrow a' + b'$, waar b een terugstootimpuls opneemt. De de-Broglie golflengte van een deeltje met impuls p is $\lambda = hc/\sqrt{2mc^2 E_{\rm kin} + E_{\rm kin}^2}$, hetgeen $h/\sqrt{2mE_{\rm kin}}$ voor $E_{\rm kin} \ll mc^2$ en $hc/E_{\rm kin} \approx hc/E$ voor $E_{\rm kin} \gg mc^2$ is. De grootste golflengte die een resolutie heeft van Δx is $\lambda \approx 2\pi\Delta x$. Via het Heisenberg onzekerheidsprincipe geldt $p \geq \hbar/\Delta x$, oftewel $pc \geq 200$ MeV fm$/\Delta x$. Nucleonen hebben een straal van ongeveer 0.8 fm, zodat 100 MeV/c genoeg is om ze te zien, maar de quarks hebben een veelvoud van GeV/c nodig.

Een inelastisch proces (Fig. 4.1b), $a+b \rightarrow a' + b^*$ en $b^* \rightarrow c+d$, brengt b in een aangeslagen toestand. Het kan weer terugvallen naar b (onder uitzending van lichte deeltjes, zoals het foton of een π-meson), of het kan in twee of meer deeltjes uiteen vallen. Als alleen het verstrooide deeltje wordt waargenomen (a') dan heet het "inclusive", het andere geval heet "exclusive". We kunnen bij inelastische processen ook de bundeldeeltjes volledig laten verdwijnen, zoals in Fig. 4.1c en 4.1d. (In Fig. 4.2 wordt p of λ uitgezet tegen $E_{\rm kin}$ voor een α deeltje, een proton p, een muon μ, een electron e en een massaloos foton γ.)

De werkzame doorsnede is gedefinieerd voor een dun verstrooiingsdoel ter dikte d, met N_b verstrooiingscentra b (de deeltjesdichtheid is n_b). We veronderstellen dat de bundel verdwijnt na een interactie (het target is voldoende dun), zodat $\dot{N}$, het verschil in $\dot{N}_a$ voor en na de verstrooiing, de werkzame doorsnede σ_b geeft. Als de flux $\Phi_a = \dot{N}_a/A$ is, dan kan dit ook geschreven worden als $\Phi_a = n_a v_a$. Het totaal aantal deeltjes $N_b = n_b A d$ geeft $\dot{N} = \Phi_a N_b \sigma_b$. Met andere woorden, $\sigma_b = \dot{N}/(\Phi_a N_b)$ is de werkzame doorsnede. Maar in de deeltjesfysica spreekt men liever van $\sigma_b =$(aantal reacties per tijd)/(bundeldeeltjes per tijd X verstrooiingscentra per oppervlakte element), wanneer de bundel niet homogeen is, maar de dichtheid van verstrooiingscentra wel. In Fig. 4.3 staat aangegeven hoe de verstrooiing tot stand komt.

De vorm, sterkte en het bereik van de interactie potentiaal bepalen de werkzame doorsnede. Er kan een sterke energie afhankelijkheid optreden. De totale werkzame doorsnede kan opgeslitst worden in $\sigma_{tot} = \sigma_{el} + \sigma_{inel}$ en wordt gegeven door (voor het experiment onafhankelijke) 1 barn=1 b=$10^{-28} m^2$. Typische totale werkzame doorsnede zijn $\sigma_{pp}(10 GeV) \approx 40$ mb voor proton-

proton verstrooiing en $\sigma_{\nu p}(10GeV) \approx 7 \times 10^{-14}$ b=70 fb voor neutrino-proton verstrooiing.

De luminositeit wordt verkregen door $\mathcal{L} = \Phi_a N_b = \dot{N}_a n_b d = n_a v_a N_b$ en heeft de dimensie [(oppervlakte X tijd)$^{-1}$]. Er is een vergelijkbare uitdrukking voor twee botsende bundels, waar we j pakketjes met N_a en N_b deeltjes rondsturen in een ring U, die met een snelheid v ten opzichte van elkaar bewegen. De luminositeit is dan $\mathcal{L} = N_a N_b j v/(UA)$, waarbij A de bundel doorsnede is bij het punt waar de botsingen plaats vinden. De bundels moeten voor de hoogst mogelijke luminositeit zo klein mogelijk worden samengeperst, typisch een tiende van een millimeter of nog kleiner. De geintegreerde luminositeit is $\int \mathcal{L} dt$ en wordt gebruikt om na te gaan hoe lang men moet meten. Met een werkzame doosnede van bijv. 1 nb en een geintegreerde luminositeit van 100 pb^{-1} verwachten we 10^5 reacties.

In Fig. 4.4 is een typisch experiment weergegeven dat de werkzame doorsnede slechts voor een kleine ruimtehoek meet, $\dot{N}(E, \theta, \Delta\Omega) = \mathcal{L}\frac{d\sigma(E,\theta)}{d\Omega}\Delta\Omega$. Als de detector ook de energie E' van het verstrooide deeltje kan meten, dan heeft men $d^2\sigma(E, E', \theta)/d\Omega dE'$ en de totale werkzame doorsnede is

$$\sigma_{tot}(E) = \int_0^{E'_{max}} \int \frac{d^2\sigma(E, E', \theta)}{d\Omega dE'} d\Omega dE'.$$

De werkzame doorsnede en de Golden Rule leiden we wat beter af (zie Griffiths, "Introduction to Quantum Mechanics" (GQM), §11.1.1, of "Introduction to Elementary Particles" (GEP), §6.1 en §6.2). We beginnen met een harde bol met straal R, waarop we deeltjes met een verwaarloosbare afmeting afschieten, die elastisch botsen met de bol. Of de bol al dan niet geraakt wordt, hangt af van de botsingsparameter, b. Dit is de afstand van het centrum van de bol tot de baan van deeltje (preciezer: de kortste afstand tot het centrum in afwezigheid van de bol). Indien $b < R$, dan wordt de bol geraakt op een hoogte $b = R\sin\alpha$, waarbij α de hoek met de normaal van de bol op het raakpunt is (zie Fig. 11.2 in GQM). Aangezien de hoek van inval (t.o.v. de normaal) gelijk is aan de hoek van terugkaatsing, volgt dus dat het deeltje onder een hoek van $\theta = \pi - 2\alpha = \pi - 2\arcsin(b/R)$ verder gaat. Bij klassieke verstrooiing, geldig zolang de botsingsparameter veel groter is dan de De Broglie golflengte van het deeltje, bepaalt de relatie tussen b en θ rechtstreeks de werkzame doorsnede. Voor de bol, en i.h.a. voor een sferisch symmetrische potentiaal, is de verstrooiing onafhankelijk van ϕ, de azimuthale hoek (als deeltjes spin hebben is dat niet zo, maar als men de som neemt over de spin toestanden van de uitgaande deeltjes en middelt over de spin van de ingaande deeltjes, dan valt de ϕ afhankelijkheid er uit).

Een interval $(b, b+db)$ definieert een oppervlakte element $bdbd\phi$ (zie fig. 11.3 in GQM). Deeltjes binnen dit oppervlak worden allemaal onder een richting (θ, ϕ) afgebogen met een ruimtehoek $d\Omega \equiv \sin\theta d\theta d\phi$, en de differentiële werkzame doorsnede is niets anders als dit oppervlak per eenheid van ruimtehoek,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left|\frac{b}{\sin\theta}\frac{db}{d\theta}\right|. \tag{21}$$

Je kunt nu zelf eenvoudig nagaan dat dit voor een harde bol precies gelijk is aan $R^2/4$, onafhankelijk van de verstrooiingshoek. Dit is gelijk aan het oppervlak πR^2 van de bol, als *gezien* door het deeltje, per eenheid van ruimtehoek. De totale werkzame doorsnede is dus precies dat oppervlak en het laat zien dat het begrip werkzame doorsnede op deze wijze zinvol is gedefinieerd.

In het algemeen zijn de atomen, of kernen, in een trefplaatje geen harde bollen, maar hebben ze een zekere uitgestrektheid, en is de grens niet altijd eenduidig aan te geven. De werkzame doorsnede is dan een effectief oppervlak. Soms, zoals bij geladen deeltjes, is de dracht van de interactie oneindig groot (de dracht is eindig als de kracht exponentieel afvalt). De totale werkzame doorsnede kan dan zelfs oneindig zijn, typisch omdat deze divergeert voor $\theta \to 0$. Bedenk dat je meestal daar geen metingen doet, omdat je anders ook alle deeltjes die niet verstrooid zijn waarneemt. Voor een versneller als bij LEP, waar electronen en positronen in tegengestelde richtingen in een bundelpijp rondliepen en op elkaar werden geschoten, is meten bij $\theta = 0$ (en π) niet mogelijk; de bundelpijp zit immers in de weg. Wel is het vaak belangrijk ook dicht bij deze bundelpijp metingen te doen (met de bij dit soort experimenten vaak gebruikelijke "forward detectors").

Voor de Rutherford verstrooiing (bij niet al te hoge energie, zodat we quantum effecten kunnen verwaarlozen), moeten we dus eenvoudig de relatie tussen b en θ voor de beweging van een geladen deeltje (met lading z) in een centrale Coulomb potentiaal (met lading Z) berekenen. Merk op dat dit precies hetzelfde is als voor de beweging van deeltjes in een gravitatieveld, i.h.b. als de twee ladingen tegengesteld zijn. We gebruiken dat het impulsmoment, $\vec{L} \equiv m\vec{x} \times \vec{v}$, behouden is en dat de impuls verandert als $\Delta\vec{p} = \int_{-\infty}^{\infty} dt\vec{F}_C(\vec{x}(t))$ (immers $\frac{d}{dt}\vec{p}(t) = \vec{F}_C(\vec{x}(t))$). Kies het verstrooiings centrum in de oorsprong. Voor $t \to -\infty$ geldt $\vec{v} = (v, 0, 0)$ en $\vec{x} = (vt, b, 0)$ en dus $\vec{L} = -mvb(0, 0, 1)$. Na de verstrooiing, voor $t \to \infty$, is alleen de richting (maar niet de grootte) van de snelheid veranderd, $\vec{v} = (v\cos\theta, v\sin\theta, 0)$. Gebruiken we bolcoördinaten, $(r(t), \theta(t), \phi(t))$, met $\theta(-\infty) = \pi$ en $\theta(\infty) = \theta$ als randvoorwaarden ($\phi(t) = \phi$ is constant), dan volgt uit behoud van impulsmoment dat $L_z = -mvb = mr^2(t)\dot{\theta}(t)$. Langs de baan van het deeltje wordt de Coulomb kracht dus gegeven door

$$\vec{F}_C = zZ\alpha\hbar c\vec{x}(t)/r^3(t) = -zZ\alpha\hbar c(\cos\theta(t), \sin\theta(t), 0)\dot{\theta}(t)/vb. \tag{22}$$

Integreren over t,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} dt\vec{F}_C(t) &= -zZ\alpha\hbar c\int_{\pi}^{\theta} d\theta'(\cos\theta', \sin\theta', 0)/vb \\ &= 2zZ\alpha\hbar c\cos(\tfrac{1}{2}\theta)(-\sin(\tfrac{1}{2}\theta), \cos(\tfrac{1}{2}\theta), 0)/vb\end{aligned} \tag{23}$$

en gelijk stellen aan

$$\vec{p}(\infty) - \vec{p}(-\infty) = mv(\cos\theta - 1, \sin\theta, 0) = 2mv\sin(\tfrac{1}{2}\theta)(-\sin(\tfrac{1}{2}\theta), \cos(\tfrac{1}{2}\theta), 0), \tag{24}$$

geeft $zZ\alpha\hbar c/vb = \tan(\frac{1}{2}\theta)mv$ (ga na) en dus

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left|\frac{b}{\sin\theta}\frac{db}{d\theta}\right| = \left(\frac{zZ\alpha\hbar c}{4E_{\text{kin}}}\right)^2 \frac{1}{\sin^4(\frac{1}{2}\theta)}. \tag{25}$$

Voor de quantummechanische berekening van de werkzame doorsnede wordt gebruik gemaakt van Fermi's Golden Rule. We zullen hier laten zien hoe je deze regel,

$$W = \frac{2\pi}{\hbar}|\langle\psi_f|\mathcal{H}_{\text{int}}|\psi_i\rangle|^2\frac{dn}{dE_f}, \tag{26}$$

af moet leiden uit de storingstheorie binnen de niet-relativistische quantummechanica (zie GQM §9.1 en §9.2 – Fermi's Golden Rule wordt daar uitgewerkt voor het geval van dipoolstraling, met de daarvoor relevante $\mathcal{H}_{\text{int}}$). In het boek wordt dit dan gebruikt om te laten zien dat het klassieke resultaat voor de Rutherford verstrooiing ook volgt uit Fermi's Golden Rule (zie hoofdstuk 11 van GQM voor een meer rechtstreekse aanpak via de zg. partiële golven analyse).

We gaan uit van de Hamiltonian $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{\text{int}}(t)$, waarbij (de relevante matrix elementen van) $\mathcal{H}_{\text{int}}(t)$ klein wordt verondersteld. Als volledig stelsel van basisfuncties kiezen we de eigenfuncties $|\psi_a\rangle$ van $\mathcal{H}_0$, met energie E_a,

$\mathcal{H}_0|\psi_a\rangle = E_a|\psi_a\rangle$, zodat een willekeurige toestand geschreven kan worden als $|\psi(t)\rangle = \sum_a c_a(t)|\psi_a(t)\rangle = \sum_a c_a(t)e^{-iE_at/\hbar}|\psi_a\rangle$. Indien het spectrum ook een continue deel heeft, moet men de som vervangen door de relevante integraal. In afwezigheid van interacties ($\mathcal{H}_{\rm int}=0$) hangt uiteraard $c_a(t)$ niet af van de tijd. Met de Schrödinger vergelijking vinden we nu de vergelijking voor $c_a(t)$ in termen van de matrixelementen van $\mathcal{H}_{\rm int}$.

$$\dot{c}_a(t) = -\frac{i}{\hbar}\sum_b\langle\psi_a|\mathcal{H}_{\rm int}(t)e^{-i(E_b-E_a)t/\hbar}|\psi_b\rangle c_b(t) = -\frac{i}{\hbar}\sum_b\langle\psi_a|\bar{\mathcal{H}}_{\rm int}(t)|\psi_b\rangle c_b(t), \tag{27}$$

waar we in de laatste gelijkheid $\bar{\mathcal{H}}_{\rm int} \equiv e^{i\mathcal{H}_0t/\hbar}\mathcal{H}_{\rm int}(t)e^{-i\mathcal{H}_0t/\hbar}$ hebben ingevoerd, waarmee het wat makkelijker is om de formele onwikkeling in machten van $\mathcal{H}_{\rm int}$ uit te schrijven.

$$c_a(t) = \sum_b\langle\psi_a|U(t,t_0)|\psi_b\rangle c_b(t), \quad U(t,t_0) \equiv \mathrm{Texp}\left(-i\hbar^{-1}\int_{t_0}^t dt'\bar{\mathcal{H}}_{\rm int}(t')\right) \tag{28}$$

(gewoonlijk nemen we $t_0 = 0$) waarbij Texp, de zogenaamde tijdsgeordende exponentiële integraal, een formele uitdrukking is die staat voor

$$U(t,t_0) = 1 + (i\hbar)^{-1}\int_{t_0}^t dt'\bar{\mathcal{H}}_{\rm int}(t') + (i\hbar)^{-2}\int_{t_0}^t dt'\bar{\mathcal{H}}_{\rm int}(t')\int_{t_0}^{t'} dt''\bar{\mathcal{H}}_{\rm int}(t'') + \dots\ . \tag{29}$$

De tijdsordening is hier essentieel; zelfs als $\mathcal{H}_{\rm int}(t)$ tijdsonafhankelijk is, dan nog zal $\bar{\mathcal{H}}_{\rm int}(t)$ van de tijd afhangen. Men noemt $U(t,t_0)$ ook wel de tijdsevolutie operator in het *interactiebeeld*. Als operator is het een oplossing van de vergelijking $i\hbar dU(t,t_0)/dt = \bar{\mathcal{H}}_{\rm int}(t)U(t,t_0)$, met als randvoorwaarde $U(t_0,t_0) = 1$. We kunnen in de machtreeks ontwikkeling voor $U(t,t_0)$ de term van n-de orde in feite opvatten als n interacties op tijden $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t$. Hierbij kan door de interactie op $t = t_i$ de toestand veranderen van $|\psi_{b_i}\rangle$ naar $|\psi_{b_{i+1}}\rangle$, terwijl voor $t \in [t_i, t_{i+1}]$ de toestand zich vrij (d.w.z. via $\mathcal{H}_0$) evolueert. We introduceren de *intermediare* toestanden $|\psi_{b_i}\rangle$ via de volledigheidsrelatie, $1 = \sum_{b_i}|\psi_{b_i}\rangle\langle\psi_{b_i}|$. De storingsreeks kan nu in termen van diagrammen worden samengevat. Deze bestaan uit lijntjes ("propagatoren") voor de vrije evolutie van de intermediaire toestanden en punten ("vertices") waar de interactie plaatsvindt. Dit is een voorbeeld van Feynman diagrammen in de niet-relativistische quantummechanica.

Voor de afleiding van Fermi's Golden Rule gebruikt men alleen de laagste niet triviale orde in de storingsreeks, ook wel de (1e) Born benadering genoemd,

$$c_a(t) = c_a(0) - \frac{i}{\hbar}\int_0^t dt' e^{-i(E_b-E_a)t'/\hbar}\langle\psi_a|\mathcal{H}_{\rm int}(t')|\psi_b\rangle c_b(0). \qquad (30)$$

We nemen nu aan dat $\mathcal{H}_{\rm int}$ niet van de tijd afhangt, in welk geval de integraal over t' eenvoudig is uit te voeren. We zijn geïnteresseerd in het geval waar, vanuit een toestand $|\psi_i\rangle$, een overgang kan plaatsvinden naar de toestand $|\psi_f\rangle$. De beginvoorwaarden zijn dus $c_f(0) = 0$ en $c_i(0) = 1$, zodat de waarschijnlijkheid om het systeem in de toestand $|\psi_f\rangle$ aan te treffen gegeven wordt door (ga na)

$$\begin{aligned} |c_f(t)|^2 &= |\mathcal{M}_{fi}|^2\frac{|1-e^{i(E_f-E_i)t/\hbar}|^2}{(E_f-E_i)^2} = 4|\mathcal{M}_{fi}|^2\frac{\sin^2(\frac{1}{2}(E_f-E_i)t/\hbar)}{(E_f-E_i)^2}, \\ \mathcal{M}_{fi} &\equiv \langle\psi_f|\mathcal{H}_{\rm int}|\psi_i\rangle. \end{aligned} \qquad (31)$$

Vrijwel altijd zijn de toestanden $|\psi_f\rangle$ onderdeel van een continuum, de vlakke golven nadat de deeltjes het interactie gebied (weer) hebben verlaten. Het aantal beschikbare toestanden $|\psi_f\rangle$ is voor vlakke golven gerelateerd aan het volume van de faseruimte, $\rho(E_f)dE_f{=}V4\pi p'^2 dp'/(2\pi\hbar)^3[{=}Vp'^2dp'(2\pi\hbar)^{-3}\!\int\! d\Omega']$, zie EqPN.(4.18) van het boek. De totale waarschijnlijkheid per tijdseenheid wordt nu gegeven door

$$\begin{aligned} W = \frac{d}{dt}\sum_f |c_f(t)|^2 &= \frac{2}{\hbar}\int \langle|\mathcal{M}_{fi}|^2\rangle\frac{\sin((E'-E_i)t/\hbar)}{(E'-E_i)}\rho(E')dE', \\ \langle|\mathcal{M}_{fi}|^2\rangle &\equiv \int\frac{d\Omega'}{4\pi}|\mathcal{M}_{fi}|^2. \end{aligned} \qquad (32)$$

We merken op dat $(E'-E_i)^{-1}\sin((E'-E_i)t/\hbar)$ een grote piek heeft bij $E' = E_i$, met een breedte $\Delta E = \hbar/t$, terwijl voor $|E'-E_i| \gg \hbar/t$ de functie sterk oscilleert en geen bijdrage geeft aan de integraal. We veronderstellen t enerzijds voldoende groot zodat we voor $|E'-E_i| < \hbar/t$ mogen aannemen dat $|\langle\psi_f|\mathcal{H}_{\rm int}|\psi_i\rangle|^2\rho(E')$ constant is (gelijk aan de waarde voor $E' = E_i$), maar anderzijds voldoende klein, zodat $|c_f(t)| \ll 1$ garandeert dat de 1e orde term voldoende nauwkeurig is. We vinden dan dus

$$\begin{aligned} W &= \frac{2}{\hbar}\langle|\mathcal{M}_{fi}|^2\rangle\rho(E_i)\int_0^\infty dE'\frac{\sin((E'-E_i)t/\hbar)}{(E'-E_i)} \\ &= \frac{2}{\hbar}\langle|\mathcal{M}_{fi}|^2\rangle\rho(E_i)\int_{-\infty}^\infty dx\frac{\sin(x)}{x}, \end{aligned} \qquad (33)$$

waarbij onder de bovengestelde aannamen de grenzen voor de integratie, $0 < E' < \infty$, voor $x = t(E' - E_i)/\hbar$ tussen $-\infty$ en ∞ gekozen kunnen worden. Met $\int_{-\infty}^{\infty} dx\ x^{-1} \sin x = \pi$ volgt nu Fermi's Golden Rule voor de waarschijnlijkheid per tijdseenheid (in het boek is men een toch wel belangrijke middeling over de richting van $\vec{p}'$ bij EqPN.(4.19) en (5.20) vergeten weer te geven, zie Eq.(32))

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} \langle |\mathcal{M}_{fi}|^2 \rangle \rho(E_i). \tag{34}$$

Extra opgave: Laat zien dat EqPN.(4.17) in het boek, $dE' = v'dp'$, geldig is zowel in de klassieke theorie als in de relativistische theorie.

Met $dE' = v'dp'$ volgt $\rho(E') = dn(E')/dE' = (2\pi\hbar)^{-3} V 4\pi p'^2/v'$. Als $W = \dot{N}(E')/(N_a N_b) = \sigma v_a / V$ (waar $V = N_a/n_a$), en gegeven wordt door Eq.(34), vindt men de werkzame doorsnede

$$\sigma = 2\pi(\hbar v_a)^{-1} \langle |\mathcal{M}_{fi}|^2 \rangle \rho(E') V.$$

Voor een vervalsbreedte heeft men voldoende aan $W = \tau^{-1}$, die dan bepaald kan worden door de levensduur τ te meten of de breedte, $\Delta E = \hbar/\tau$, van de energielijn.

De Feynman diagrammen zijn bedoeld om $\mathcal{M}_{fi}$ uit te rekenen, niet alleen voor het niet-relativische geval. Fig. 4.5 geeft voor het relativistische geval enkele voorbeelden. De tijd loopt verticaal en horizontaal staan de deeltjes. Anti-deeltjes worden aangegeven door de pijl die tegen de tijd inloopt, zoals voor het positron e^+, het positief geladen muon μ^+ en het electron antineutrino $\bar{\nu}_e$. De fotonen worden weer gegeven door golflijnen, waarbij de koppelingsconstante $\sqrt{\alpha}$ is. Bij de zwakke wisselwerking wordt met stippellijnen een deeltje uitgewisseld dat een grote massa heeft. $W^\pm$ heeft een massa van 80 GeV en Z^0 van 91 GeV. De koppelingsconstante is ditmaal $\sqrt{\alpha_W}$. Voor de gluonen wordt dit weergegeven door de kurkentrekkerlijn met een constante die $\sqrt{\alpha_S}$ is. De massa van het gluon is formeel gesproken nul. Met of zonder een massa worden deze virtuele deeltjes weergegeven door een propagator $1/(Q^2 + M^2c^2)$, waar Q^2 het product van de vierimpuls is. Deze deeltjes zijn meestal off-shell, dwz. $E^2 \neq \vec{p}^2c^2 + M^2c^4$. Bijv., bij lage energie wordt de zwakke kracht behoorlijk onderdrukt. Alleen bij energieën van de orde van 100 GeV, of groter, wordt de zwakke kracht ongeveer gelijk aan de elektromagnetische kracht.

Als voorbeeld wordt de verstrooiing van e^- aan e^+ gegeven (Fig. 4.5a). Dit kan ook optreden door een e^-e^+ annihilatie te laten volgen door paarcreatie, maar het voorbeeld dat gegeven wordt (Fig. 4.5b) is de creatie van een $\mu^-\mu^+$. In Fig. 4.5c wordt een eenloop correcties (e^-e^+ paarcreatie) gegeven, hetgeen een orde hoger is (α^2, hetgeen klein genoeg is voor het Born diagram om een goede benadering te geven). In Fig. 4.5d wordt hetzelfde proces gegeven als in Fig. 4.5b, maar nu via de zwakke wisselwerking, door het uitwisselen van een Z^0 deeltje. De koppeling is nu natuurlijk $g^2 \propto \alpha_W$. In Fig. 4.5e hebben we een neutron dat via β-verval in een proton vervalt onder uitzending van een electron en een antineutrino (met een W^- als een virtueel deeltje). Ten stotte laat Fig. 4.5f een voorbeeld zien van een diagram in QCD, waarbij twee quarks aan elkaar verstrooid worden via een virtueel gluon. Dit gaat via het uitwisselen van kleurlading.

5 Geometrische Verhoudingen van Kernen

Rutherford gebruikte α-verstrooiing om de kern te onderzoeken, maar voor hogere energie geeft dat problemen, omdat zowel het target als de bundel kernen zijn. Verder is de kernkracht niet goed genoeg bekend. Electronverstrooiing is veel beter begrepen. Tot nog toe heeft men in het electron geen substructuur kunnen ontdekken, en de elektromagnetisch interactie met $\alpha \approx 1/137 \ll 1$ convergeert veel beter. De grootheid $m^2 = (E^2 - \vec{p}^2c^2)/c^4$ is de invariante massa in het kwadraat. Voor voldoende hoge energie (voor electrons een paar MeV) hebben we al dat $E \approx |\vec{p}|c$.

Als we een electron (p) verstrooien aan een deeltje (P), dan geldt $p+P = p'+P'$ oftewel $p^2+2p.P+P^2 = p'^2+2p'.P'+P'^2$ (zie Fig. 5.1). Met $p^2 = p'^2 = m_e^2c^2$ en $P^2 = P'^2 = M^2c^2$ volgt $p.P = p'.P'$. Gewoonlijk detecteert men alleen het verstrooide electron, zodat $p.P = p'.(p+P-p') = p'.p+p'.P-m_e^2c^2$ gebruikt moet worden. Als we op de kern schieten die initieel in rust verkeert, dan vinden we $EMc^2 = E'E-\vec{p}.\vec{p}\,'c^2+E'Mc^2-m_e^2c^4$. Bij hoge energie, waar we $E \approx |\vec{p}|c$ kunnen nemen en m_ec^2 mogen verwaarlozen, volgt

$$E' = \frac{E}{1+(1-\cos\theta)E/Mc^2},$$

waar de hoek θ de verstrooiingshoek geeft. Electronverstrooiing aan een $A = 50$ kern bij een relatief lage energie van 0.5 GeV geeft maar 2% verschil tussen voorwaardse en achterwaardse verstrooiing. Bij 10 GeV heeft men al een variatie van 25%. Voor een proton wordt het effect sterk vergroot (zie Fig. 5.2).

We kunnen nu de Rutherford formule afleiden met Fermi's Golden rule. Als $Z\alpha \ll 1$, dan is de Born benadering voldoende nauwkeurig. De in- en uittoestanden zijn $|\psi_i\rangle = \sqrt{V}^{-1/2}\exp(i\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar)$ en $|\psi_f\rangle = \sqrt{V}^{-1/2}\exp(i\vec{p}\,'\cdot\vec{x}/\hbar)$. Het volume kiezen we veel groter dan de verstrooiingslengte en groot genoeg om de discrete energieën te benaderen door een continuum. We hebben dan

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{2\pi}{\hbar}\frac{V}{v_a}|\langle\psi_f|\mathcal{H}_{\rm int}|\psi_i\rangle|^2\frac{V|\vec{p}\,'|^2dp'}{(2\pi\hbar)^3dE_f} = \frac{V^2|\vec{p}\,'|^2}{(2\pi)^2\hbar^4vv'}|\langle\psi_f|\mathcal{H}_{\rm int}|\psi_i\rangle|^2.$$

Met de interactiepotentiaal $e\phi$ krijgen we $\langle\psi_f|\mathcal{H}_{\rm int}|\psi_i\rangle = \frac{e}{V}\int\phi(\vec{x})e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}/\hbar}d^3x$ waarin $\vec{q} = \vec{p} - \vec{p}\,'$, wat gegeven wordt door $\frac{-e\hbar^2}{V|\vec{q}|^2}\int\Delta\phi(\vec{x})e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}/\hbar}d^3x$ (hierbij gebruiken we dat $\int(u\Delta v - v\Delta u)d^3x = 0$, oftewel $e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}/\hbar} = \frac{-\hbar^2}{|\vec{q}|^2}\Delta e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}/\hbar}$ en $\Delta\phi(\vec{x}) = -\rho(\vec{x})/\epsilon_0$). We vinden derhalve $\langle\psi_f|\mathcal{H}_{\rm int}|\psi_i\rangle = \frac{e\hbar^2}{\epsilon_0 V|\vec{q}|^2}\int\rho(\vec{x})e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}/\hbar}d^3x$ $= \frac{Z4\pi\alpha\hbar^3c}{|\vec{q}|^2V}\int f(\vec{x})e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}/\hbar}d^3x$, waarbij $\int f(\vec{x})d^3x = 1$ en $F(\vec{q}) = \int e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}/\hbar}f(\vec{x})d^3x$ zijn Fourier getransformeerde vormfactor, waarvan wat later een aantal voorbeelden worden genoemd. ($\rho(\vec{x})$ is natuurlijk hier de ladingsverdeling.) De werkzame doorsnede (met $F(\vec{q}) = 1$) is bij hoge energie dus

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\rm Rutherford} = \frac{4Z^2\alpha^2(\hbar c)^2E'^2}{|\vec{q}c|^4} = \frac{Z^2\alpha^2(\hbar c)^2}{4E^2\sin^4(\theta/2)}.$$

We gebruiken dat de terugstootenergie verwaarloosd wordt, dus $E = E'$ en $|\vec{p}| = |\vec{p}\,'|$, waardoor $|\vec{q}| = 2|\vec{p}|\sin(\theta/2)$.

Dit is als de energie groot is, $E = |\vec{p}|c$, maar niet zo groot dat we de terugstootenergie niet mogen verwaarlozen. Als dat niet meer het geval is, bijv. bij relativistische correcties waar $1/|\vec{q}|^4$ vervangen wordt door $1/(Q^2)^2$, dan worden de formules anders. Het afvallen met $1/(Q^2)^2$ komt door het foton dat wordt uitgewisseld en geen massa heeft. (Met een massa valt hij af met $1/(Q^2+M^2c^2)^2$). De werkzame doorsnede van Mott verkrijgt men door de electron spins mee te nemen. In de limiet waar men de terugstootenergie (aangegeven met een asterisk) mag verwaarlozen is dit

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^*_{\rm Mott} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\rm Rutherford}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\sin^2(\frac{\theta}{2})\right).$$

De formule geeft aan dat met spin de werkzame doosnede harder afvalt voor grote hoeken, hetgeen maximaal is als $v \to c$,

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^*_{\text{Mott}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Rutherford}} \cos^2(\theta/2).$$

Deze extra factor kan begrepen worden voor het extreme geval van verstrooiing over 180^o. Voor relativistische deeltjes is in de limiet van $v \to c$ de projectie van de spinvector $\vec{s}$ in de richting $\vec{p}/|\vec{p}|$ behouden. Dit volgt uit de Dirac vergelijking en wordt behoud van heliciteit genoemd, dat gedefinieerd wordt door $h = \frac{\vec{s}\cdot\vec{p}}{|\vec{s}||\vec{p}|}$. Deeltjes met de spin in de richting van de beweging hebben $h = 1$ en deeltjes met de tegengestelde spin $h = -1$. In Fig. 5.3 staat de kinematica van verstrooiing over 180^o, waar de heliciteit eerst 1 is, en na de verstrooiing -1. Maar de spin-flip is niet mogelijk bij een target waarvan we de spin mogen verwaarlozen, of nul stellen. Immers het hoekmomentum is behouden en kan de spin niet draaien. Als de kern een spin heeft dan kan die natuurlijk in principe draaien als de spin van het electron omdraait, maar dat kost energie.

Evenals bij de Rutherford verstrooiing hebben we hier een vormfactor, $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{exp.}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^*_{\text{Mott}} |F(\vec{q})|^2$. In Fig. 5.4 staat een magnetische spectrometer, die op verschillende hoeken kan meten. Bij Stanford stond de eerste, waar begin 1950 electronen van rond de 500 MeV verstrooid werden. Voor sferisch symmetrische bronnen geldt $F(\vec{q}) = 4\pi \int r^2 f(r) \frac{\sin(|\vec{q}|r/\hbar)}{|\vec{q}|r/\hbar} dr$, met de normalizatie $1 = \int f(\vec{x}) d^3x = 4\pi \int r^2 f(r) dr$. Men kan door Fourier transformatie $f(\vec{r}) = (2\pi)^{-3} \int F(\vec{q}) e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}/\hbar} d^3x$ reconstrueren, maar meestal werkt men met modellen. In principe kan de vormfactor bepaald worden tot aan een zekere maximale waarde van $|\vec{q}|$; daarna neemt de nauwkeurigheid snel af. Verstrooiing van een bol geeft een eerste minimum bij $|\vec{q}|R/\hbar \approx 4.5$. In Fig. 5.5 vinden we voor ^{12}C het eerste minimum op $|\vec{q}|/\hbar \approx 1.8 fm^{-1}$, zodat $R = 4.5\hbar/|\vec{q}| \approx 2.5 fm$. Hieronder volgen een aantal modellen.

	Ladings verdeling $f(r)$	Vormfactor $F(\vec{q})$	
punt	$\delta(r)/4\pi$	1	constante
exponent	$(a^3/8\pi)\exp(-ar)$	$(1+\vec{q}^2/a^2\hbar^2)^{-2}$	dipool
Gaussisch	$(a^2/2\pi)^{3/2}\exp(-a^2r^2/2)$	$\exp(-\vec{q}^2/2a^2\hbar^2)$	Gaussisch
bol	$3/4\pi R^3 \quad r \le R$	$3(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)/\alpha^3$ $\alpha = \|\vec{q}\|R/\hbar$	oscillerend

In Fig 5.6 is dit grafisch weergegeven. De vormfactor die constant is geldt voor een puntdeeltje, zoals het electron. Het proton vervalt exponentieel, en ^6Li vervalt Gaussisch. Een bolvormige verdeling ziet men niet vaak, maar wel met een diffuse rand zoals Ca. In Fig. 5.7 staan de resultaten van een verstrooiings experiment aan ^{40}Ca en ^{48}Ca. De werkzame doorsnede is over een groter gebied gemeten (verschil van 7 ordes van grote) en niet een, maar drie minima zijn te onderscheiden. De minima van ^{48}Ca zijn naar iets kleiner $|\vec{q}|$ verschoven, waardoor deze iets groter is dan ^{40}Ca.

De ladingsverdeling haalt men niet alleen uit de plaats van het eerste minimum, maar ook uit het gedrag voor $|\vec{q}| \to 0$, waar $|\vec{q}|R/\hbar \ll 1$ en $F(\vec{q}) = \int f(r) \sum_{n=0}^{\infty} (i|\vec{q}||\vec{x}|cos(\theta)/\hbar)^n d^3x = 1 - |\vec{q}|^2 \langle r^2 \rangle/(6\hbar^2) + \ldots$, met $\langle r^2 \rangle = 4\pi \int_0^\infty f(r) r^4 dr$. In Fig. 5.8 worden een aantal radiele ladingsverdelingen weergegeven en die beschreven worden door de Fermi verdeling $\rho(r) = \rho(0)/(1 + e^{(r-c)/a})$. Voor grote kernen geldt dat $c = 1.07A^{1/3}$ fm en $a = 0.54$ fm. We vinden hiermee $\langle r^2 \rangle^{1/2} = r_0 A^{1/3}$, met $r_0 = 0.94$ fm. De kern wordt vaak benaderd door een homogeen geladen bol met $R^2 = 5\langle r^2 \rangle/3$. We vinden dan $R = 1.21A^{1/3}$ fm (gebruikt voor de massaformule). De dikte van het oppervlak wordt gegeven door $t = r_{\rho/\rho_0=0.1} - r_{\rho/\rho_0=0.9}$ en is $t = 2a \ln 9 \approx 2.40$ fm. Weliswaar neemt de ladingsdichtheid iets af voor toenemende massa, maar als men de neutronen meeneemt door met A/Z te vermenigvuldigen vindt men vrijwel de zelfde waarde. Voor “oneindig grote” kernmassa vindt men derhalve $\rho_n \approx 0.17$ nucleonen/fm^3, corresponderende met $c = 1.12A^{1/3}$ fm. Sommige kernen zijn vervormd in ellipsoide, zoals in Lanthaniden. De lichte kernen vormen uiteraard een uitzondering, zoals ^6Li, ^7Li, ^9Be en in het bijzonder ^4He. Er is geen ladingsplateau met een constante waarde; de lading is meer Gaussisch verdeeld.

We hebben tot nog toe alleen elastische verstrooiing besproken, maar inelastische botsingen, waarin een deel van de energie gaat zitten in de excitatie, komen natuurlijk ook voor. Fig. 5.9 is een electronbundel van 495 MeV die op 65.4^o verstrooid aan stilstaand ^{12}C. De scherpe piek bij $E' = 482$ MeV is van de elastische verstrooiing, maar de pieken hieronder zijn geexciteerde toestanden. De grootste piek bij $E' \approx 463$ MeV is een gigantische dipool resonantie. Bij nog lagere energie ziet men een brede verdeling van verstrooide nucleonen binnen de kern.

6 Elastische Verstrooiing aan Kernen

Elastische verstrooiing van electronen op lichte kernen, zoals waterstof en deuterium, geeft informatie over het neutron en proton. Een van de subtiliteiten is de terugstootenergie, die niet meer verwaarloosd kan worden. Ook de dichtheid van de faseruimte moet gecorrigeerd worden, en men vindt:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^*_{\text{Mott}} \frac{E'}{E} = \frac{4Z^2\alpha^2(\hbar c)^2 E'^3}{(q^2)^2 c^4 E}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right),$$

waarbij we voor q^2 nu het kwadraat van de vierimpuls moeten nemen, $q^2 = (p-p')^2 = 2m_e^2c^2 - 2(EE'/c^2 - |\vec{p}||\vec{p}\,'|\cos\theta)$, of voor voldoende hoge energie $Q^2 = -q^2 \approx 4EE'\sin^2(\theta/2)/c^2$.

Als we een zo grote energie hebben dat de terugstoot niet verwaarloosd kan, dan is het magnetisch moment van de kern ook te voelen. Voor een Dirac deeltje met spin 1/2 is dit $\mu = g\frac{e}{2M}\frac{\hbar}{2}$, waarbij $g = 2$ komt van relativistische correcties. De magnetische interactie hangt samen met een spin-flip van de kern, en geeft

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{spin}\,1/2} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}}\left[1 + 2\tau\tan^2\frac{\theta}{2}\right],$$

waar $\tau = Q^2/(4M^2c^2)$. Dit laat zien dat het magnetisch moment een interactie heeft die nul is voor 0^o en maximaal is voor 180^o. Dit zou in $\sin^2(\theta/2)$ resulteren, maar er moet nog $\cos^2(\theta/2) = 1 - \sin^2(\theta/2)$ uitgedeeld worden (aannemende dat $v \approx c$). De factor 2τ kan aannemelijk worden gemaakt als het kwadraat van het matrixelement van het magnetisch moment $(1/M^2)$ in interactie met het magneetveld (Q^2).

Voor de kernen is dit echter niet correct, want een proton of neutron is opgebouwd uit quarks. Men vindt $\mu_p = g_p\mu_N/2 = 2.79\mu_N$ en $\mu_n = g_n\mu_N/2 = -1.91\mu_N$, met $\mu_N = e\hbar/(2M_p) = 3.1525\cdot 10^{-14}$ MeV/T het nucleair magneton. We kunnen dit uitdrukken in de Rosenbluth formule,

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}}\left[\frac{G_E^2(Q^2) + \tau G_M^2(Q^2)}{1+\tau} + 2\tau G_M^2(Q^2)\tan^2\frac{\theta}{2}\right],$$

waarbij $G_E(Q^2)$ en $G_M(Q^2)$ de elektrische en magnetische vormfactoren zijn. In de limiet voor lage energie is G_E de lading van het target (gedeeld door

e) en G_M het magnetisch moment (gedeeld door het nucleaire magneton), $G_E^p(Q^2\!=\!0)\!=\!1$, $G_E^n(Q^2\!=\!0)\!=\!0$, $G_M^p(Q^2\!=\!0)\!=\!2.79$ en $G_M^n(Q^2\!=\!0)\!=\!-1.91$.

In Fig. 6.1 zetten we voor $Q^2 = 2.5$ GeV$^2/c^2$ de werkzame doorsnede in eenheden van $(d\sigma/d\Omega)_{\rm Mott}$ uit tegen $\tan^2(\theta/2)$, wat een mooie rechte lijn geeft. $G_M(Q^2)$ is de helling en de intercept $(G_E(Q^2)\!+\!\tau G_M(Q^2))/(1\!+\!\tau)$ geeft $G_E(Q^2)$. Het volgt dat voor proton en neutron $G_E^p(Q^2) = Q_M^p(Q^2)/2.79 = -G_M^n(Q^2)/1.91 = G^{\rm dipole}(Q^2)$, waar $G^{\rm dipole}(Q^2) = (1 + Q^2/0.71(GeV/c)^2)^{-2}$, terwijl $G_E^n(Q^2)$ vrijwel nul is, zoals aangegeven in Fig. 6.2.

De dipole vormfactor correspondeert met een exponentieel afvallende ladingsverdeling $\rho(r) = \rho(0)e^{-ar}$, waarvoor $a = 4.27$ fm^{-1}. De gemiddelde straal volgt uit $\langle r^2\rangle_{\rm dipole} = -6\hbar^2 dG^{\rm dipole}(0)/dQ^2 = 12/a^2 = 0.66$ fm^2, wat overeen komt met 0.81 fm. Beperkt tot het proton vindt men een iets grotere waarde, $\sqrt{\langle r^2\rangle_p} = 0.862$ fm. Voor het neutron is de elektrische vormfactor niet overal gelijk aan nul, bijv. $-6\hbar^2 dG_E^n(0)/dQ^2 = -0.113 \pm 0.005$ fm^2.

In het boek wordt de werkzame doorsnede zoals die nodig is in de deeltjesfysica en in het bijzonder voor de DIS (Deep Inelastic Scattering, zie chap. 7) opgebouwd in stappen. De niet-relativische quantummechanica geeft via de Golden Rule voor de Rutherford formule het klassieke resultaat, Eq.(25), vermenigvuldigd met $|F(\vec{q})|^2$ (voor puntdeeltjes $F(\vec{q}) = 1$). Voor de afleiding volgen we §5.2, maar gebruiken EqPN.(4.17), (5.22), (5.31-32), en (5.34-35) met, onder verwaarlozing van de terugstoot, $|\vec{p}| = mv' = mv_a$. Bij de Mott verstrooiing is de spin van het electron, maar niet de *mogelijke* spin van het target meegenomen (gerechtvaardigd als de terugstoot te verwaarlozen is). Hierna wordt de relativistische correctie voor de Mott verstrooiing *aannemelijk* gemaakt en wordt de correctie besproken als het target spin $\frac{1}{2}$ heeft.

In plaats van zo'n heuristische aanpak zullen we hier eerst kort de Diracvergelijking bespreken, daarna de volledig relativistische uitdrukking voor de verstrooiing van twee (verschillende) puntdeeltjes met spin $\frac{1}{2}$ geven en tenslotte de Rosenbluth formule. Door het nemen van limieten vinden we dan de juiste uitdrukkingen voor de Mott en Rutherford werkzame doorsnede.

De Diracvergelijking

Dirac stelde zich de vraag hoe een Schrödingervergelijking op te stellen die relativistisch invariant is. Gewoonlijk is de Schrödingervergelijking de quantummechanische expressie voor de niet-relativische energie, $E = E_{\rm kin}\!+\!E_{\rm pot} = \vec{p}^{\,2}/2m + V(\vec{x})$, met $E = i\hbar\partial/\partial t$ en $p_j = -i\hbar\partial/\partial x^j$. Zelfs als we een vrij deeltje nemen, $V(\vec{x}) = 0$, is dit uiteraard in tegenspraak met $E^2 = \vec{p}^2c^2 + m^2c^4$. Vasthouden aan een Schrödingervergelijking die 1e orde in de tijd is, nam Dirac daarom als ansatz $E = \alpha^i p_i c + \beta mc^2$, met α^i en β onafhankelijk van plaats en tijd (we gebruiken de sommatieconventie, waarbij Latijnse en Griekse indices resp. de waarden 1,2,3 en 0,1,2,3 aannemen). Voor $\vec{p} = \vec{0}$ geldt dat $E^2 = m^2c^4$ en vinden we $\beta^2 = 1$. Je zou verwachten dat hieruit noodzakelijkerwijze $\beta = 1$ volgt, ofwel $E = mc^2$. Het is opmerkelijk dat Dirac de moed had hiervan af te wijken, gedwongen door de eis van relativistische invariantie! Om op eenvoudige manier in te zien waarom, nemen we eerst het meest extreme geval van een massaloos deeltje, dat immers altijd met de lichtsnelheid beweegt. In dat geval volgt uit de ansatz voor de Schrödingervergelijking ($E = \alpha^i p_i c$) en de eis van relativistische invariantie ($E^2 = \vec{p}^2c^2$) dat $\frac{1}{2}(\alpha^i\alpha^j + \alpha^j\alpha^i) = \delta_{ij}$. We gebruiken hier dat α^i niet van $\vec{x}$ afhangt zodat $[\alpha^j, p_i] = 0$, evenals $[p_i, p_j] = 0$. De vergelijking voor de α^i heeft geen oplossingen in het geval dat ze onderling met elkaar commuteren. Dirac concludeerde hieruit dat de α^i matrices zijn. Een eenvoudige oplossing biedt zich meteen aan in termen van de Pauli matrices,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{35}$$

bekend van de beschrijving van deeltjes met spin $\frac{1}{2}$, immers expliciete berekening geeft $\{\sigma_i, \sigma_j\} \equiv \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\mathbb{1}_2\delta_{ij}$. De gevonden Diracvergelijking,

$$E = \vec{\sigma} \cdot \vec{p}c, \tag{36}$$

beschrijft inderdaad een massaloos deeltje met spin $\frac{1}{2}$. De Hamiltoniaan is identiek aan die voor een niet-relativistisch spin $\frac{1}{2}$ deeltje in een magneetveld, waarbij $\vec{B}$ evenredig is met $\vec{p}$. De spin van het deeltje is dus altijd langs $\pm\vec{p}$ gericht. De heliciteit, zie §5.3, is dan ± 1. Opmerkelijk is echter dat de deeltjes met heliciteit -1 een *negatieve* energie hebben!

Dit is het punt om weer terug te keren naar het geval $m \neq 0$. De Schrödingervergelijking, $E = \alpha^i p_i c + \beta mc^2$, invullen in $E^2 = \vec{p}^2c^2 + m^2c^4$ geeft nu dat naast $\frac{1}{2}\{\alpha^i, \alpha^j\} = \delta_{ij}$ en $\beta^2 = 1$, *ook* moet gelden dat $\{\beta, \alpha^i\} = \beta\alpha^i + \alpha^i\beta = 0$ (ga na). Omdat iedere 2×2 matrix te schrijven is als een (complex) lineaire combinatie van σ_i en $\mathbb{1}_2$, is eenvoudig in te zien dat we naar grotere matrices moeten om een oplossing van deze vergelijkingen te vinden. Het blijkt dat 4×4 matrices voldoen. Een oplossing in de zg. Weyl representatie luidt,

$$\alpha^i_W = \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & -\sigma_i \end{pmatrix}, \quad \beta_W = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1}_2 \\ -\mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{37}$$

Andere keuzes hangen hier altijd mee samen via een unitaire (i.e. basis) transformatie. De Weyl reprensentatie is vooral geschikt als $v \to c$, terwijl voor lage snelheden de volgende (Dirac) representatie de voorkeur heeft,

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix} \equiv \gamma^0, \quad \gamma^i \equiv \beta\alpha^i. \tag{38}$$

Met matrices γ^μ is de Diracvergelijking te schrijven als $(-i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu + \mathbb{1}_4 mc)\psi(x) = 0$. Voor een deeltje in rust, $\vec{p} = \vec{0}$, vinden we dus $E = \beta mc^2$, zodat de bovenste twee componenten (van een complexe vier-dimensionele vector waarop de Hamiltoniaan werkt) een positieve energie hebben, terwijl voor de onderste twee componenten de energie negatief is. In beide gevallen beschrijven de twee componenten uiteraard een spin op en neer toestand. In eerste instantie probeerde Dirac de negatieve energie toestanden als protonen te interpreteren, maar dat maakte het waterstofatoom zeer instabiel.

Dirac voelde zich daardoor genoodzaakt antideeltjes in te voeren, nog voordat ze waren waargenomen. Daartoe moesten alle negatieve energie toestanden bezet worden (op een manier die overeenstemde met het uitsluitingsprincipe van Pauli). Een gat in deze zogenaamde Diraczee van negatieve energie toestanden correspondeert dan met een deeltje met positieve energie en een tegengestelde elektrische lading; een positron dat 5 jaar later, in 1932 door Anderson inderdaad werd waargenomen. In Feynman diagrammen worden antideeltje beschreven door deeltjes die terugreizen in de tijd (immers tijdsomkeer is equivalent met het omkeren van het teken van de energie!)

We merken op dat kennelijk in de relativiteitstheorie het begrip van een klassiek deeltje aanpassing behoeft. De theorie wordt noodzakelijkerwijze beschreven in termen van een veel-deeltjes systeem. Deeltjesaantal is niet langer behouden (energie, impuls, lading, of iedere ander quantumgetal dat samenhangt met een symmetrie blijft natuurlijk wel behouden). Het meest dramatische voorbeeld van schending van behoud van het aantal deeltjes is uiteraard annihilatie van een electron en positron.

In het geval dat $|\vec{p}| \gg mc$, zodat βmc in de Diracvergelijking te verwaarlozen is, gedraagt een massief deeltje zich als bij de massaloze Diracvergelijking, met het verschil dat we nu vier i.p.v. twee componenten hebben. De deeltjes met een positieve energie hebben nu naast heliciteit +1 ook heliciteit -1. De koppeling tussen deze twee heliciteits toestanden vindt alleen plaats via de term βmc en kan dus verwaarloosd worden als $|\vec{p}| \gg mc$. Voor relativistische snelheden is derhalve de heliciteit van het deeltje behouden[2].

We geven tot slot de vlakke golfoplossingen van de Diracvergelijking (in de Dirac representatie),

$$\psi_{E>0}(\vec{x}) = (2\pi)^{-3/2} e^{-ip\cdot x/\hbar} u^{(a)}(\vec{p}), \quad \psi_{E<0}(\vec{x}) = (2\pi)^{-3/2} e^{-ip\cdot x/\hbar} v^{(a)}(\vec{p}), \tag{39}$$

waarbij $p \cdot x \equiv p_\mu x^\mu = p^0 x^0 - \vec{p}\cdot\vec{x} = Et - \vec{p}\cdot\vec{x}$, terwijl $u^{(a)}(\vec{p})$ en $v^{(a)}(\vec{p})$, $a = 1, 2$, de twee spin componenten voor resp. de deeltjes en antideeltjes). Expliciet worden ze gegeven door

$$\begin{aligned} u^{(a)}(\vec{p}) &= \frac{\gamma^\mu p_\mu + \mathbb{1}_4 mc}{\sqrt{2p_0(p_0 + mc)}} u_0^{(a)}, \quad p_0 = E/c = \sqrt{m^2c^2 + \vec{p}^2}, \\ v^{(a)}(-\vec{p}) &= \frac{\gamma^\mu p_\mu + \mathbb{1}_4 mc}{\sqrt{2p_0(p_0 - mc)}} v_0^{(a)}, \quad p_0 = E/c = -\sqrt{m^2c^2 + \vec{p}^2}, \end{aligned} \tag{40}$$

in termen van $u_0^{(a)}$ en $v_0^{(a)}$, de spin op en neer toestanden voor resp. het deeltje en antideeltje in het ruststelsel,

$$u_0^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_0^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_0^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_0^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{41}$$

Dit geeft een orthonormaal stelsel van vlakke golfoplossingen. We hebben er hier voor gekozen de norm van de golffunctie te definiëren als in de gewone quantummechanica.

Intermezzo: In de relativistische veldentheorie normeert men bij voorkeur t.o.v $d^3x/(2|p_0|)$ en moeten we in de bovenstaande definities voor $u^{(a)}(\vec{p})$ en $v^{(a)}(\vec{p})$ vermenigvuldigen met $\sqrt{2|p_0|}$. Hiermee kan men dan laten zien

[2]Strikt massaloze deeltjes kunnen beschreven worden door twee componenten en komen dus alleen voor met een vaste heliciteit – het antideeltje met negatieve energie heeft dan de tegengestelde heliciteit. Vaste heliciteit breekt de symmetrie onder spiegeling. Pariteit wordt inderdaad gebroken door de zwakke wisselwerking, vanwege een koppeling die afhangt van de heliciteit, en voor het neutrino in het bijzonder alleen maar aan één van de heliciteitstoestanden koppelt.

dat $J_\mu(x) = e\psi^\dagger(x)\gamma_0\gamma_\mu\psi(x)$ transformeert als een stroomdichtheid onder Lorentz transformaties. Ieder type geladen deeltje heeft zo zijn eigen stroomdichtheid en koppelt aan een elektromagnetisch veld (waarbij $A_\mu(x)$ de vectorpotentiaal is) via $\int J_\mu(x)A^\mu(x)d^4x$. Omdat we willen dat zo'n koppeling invariant is onder ijktransformaties, $A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\Lambda(x)$, volgt dat de stroomdichtheid behouden moet zijn, $\partial_\mu J^\mu(x) = 0$. Voor een deeltje met spin, als het electron, draagt ook het magnetisch moment geassocieerd met de spin bij aan de stroomdichtheid (zoals een kringstroom een magnetisch moment geeft). Dit is de reden waarom in het boek onderscheid wordt gemaakt tussen de zogenaamde elektrische en magnetische "form factors" (vormfuncties). De koppeling tussen twee geladen deeltjes verloopt via de uitwisseling van een foton en is evenredig met $\int J_\mu(x)(x-y)^{-2}J^\mu(y)d^4xd^4y$. De uitwisseling van een foton geeft zo een factor $1/Q^2 = -1/q^2$ via Fourier transformatie van $1/x^2$ (vergelijk pg. 58). Hierbij is q precies de energie-impulsoverdracht tussen de twee geladen deeltjes bij een botsing. Dit kan allemaal gegeneraliseerd worden naar andere dan elektromagnetische krachten. Iedere kracht werkt op de bij die kracht behorende lading. Als het deeltje dat de kracht overdraagt een massa heeft, wordt $-1/q^2$ vervangen door $1/(M^2c^2 - q^2) = 1/(M^2c^2+Q^2)$, zie §4.4. Naast de aangepaste normering, in feite noodzakelijk om waarschijnlijkheidsdichtheid (cq. ladingsdichtheid) op een Lorentz covariante wijze te definiëren, wordt echter tegelijkertijd in de relativistische versie van de Golden Rule d^3p voor ieder deeltje vervangen door $cd^3p/((2\pi)^3 2|E(\vec{p})|)$, zie GEP §6.2. De notatie van Griffiths volgende vindt men voor het verval van een instabiel deeltje in $n-1$ andere deeltjes, $1 \to 2 + 3 + \ldots + n$, de volgende partiële vervalsbreedte $d\Gamma$ (waar Griffiths Γ voor de "decay rate" gebruikt, volgen we het boek door te vermenigvuldigen met $\hbar$ en $\Gamma = \int d\Gamma = \hbar\tau^{-1}$ te definieren als "decay width")

$$d\Gamma = |\mathcal{M}|^2 \frac{S}{2m_1}(2\pi)^4\delta^4(p_1 - p_2 - p_3 \ldots - p_n)\frac{cd^3\vec{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2}\frac{cd^3\vec{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3}\cdots\frac{cd^3\vec{p}_n}{(2\pi)^3 2E_n}. \tag{42}$$

Het zg. invariante matrix element $\mathcal{M}$ wordt i.h.a. grafisch weergegeven door Feynman diagrammen. De factor S heet een symmetrie factor, $1/j!$ voor iedere set van j identieke deeltjes die worden geproduceerd. Merk op dat verval alleen dan kan plaatsvinden als $m_1 > m_2 + m_3 + \ldots + m_n$. Voor de werkzame doorsnede, waarbij 2 deeltjes na een botsing $(n-2)$ deeltjes geven, $1+2 \to 3+\ldots+n$, vindt men (zie GEP verg.(6.34))

$$d\sigma = |\mathcal{M}|^2 \frac{\hbar^2 cS}{v} \frac{c}{2E_1} \frac{c}{2E_2} (2\pi)^4 \delta^4(p_1+p_2-p_3\ldots-p_n) \frac{cd^3\vec{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3} \cdots \frac{cd^3\vec{p}_n}{(2\pi)^3 2E_n}. \tag{43}$$

Hierbij gebruiken we dat $v \equiv (E_1E_2)^{-1}c^3\sqrt{(p_1\cdot p_2)^2 - m_1^2m_2^2c^4}$ de Lorentz invariante uitdrukking is voor de botsingssnelheid tussen deeltje 1 en 2, relevant voor de bepaling van de flux. Voor een fixed target experiment, waarbij $p_2 = (m_2c;\vec{0}) = (E_2/c;\vec{0})$, vinden we inderdaad $v = |\vec{v}_1|$. In het algemeen kan men laten zien dat $v = |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|$, zolang de twee bundels (anti-)parallel zijn ($\vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2$).

Werkzame doorsnede voor electron-muon verstrooiing

We kiezen het voorbeeld van electron-muon verstrooiing omdat het muon veel zwaarder is dan het electron, en beide zich gedragen als deeltjes zonder interne structuur. Bij verwaarlozing van de interne structuur van het proton is deze formule ook geldig voor electron-proton verstrooiing.

Voordat we het resultaat bespreken is het nuttig wat meer inzicht te geven hoe Mott zijn formule (EqPN.(5.38) in het boek) heeft afgeleid. Hij gebruikte de (positieve energie) oplossingen van de Diracvergelijking, maar volgde voor de rest dezelfde afleiding als in §5.2 van het boek! Bij ongepolariseerde electronen moet je middelen over de spins van de ingaande electronen en sommeren over de spins van de uitgaande electronen. Bij deze berekening wordt dus ook de terugstoot van het muon (proton, of de kern) met massa M verwaarloosd ($E \ll Mc^2$), maar mag het electron wel relativistisch bewegen (indien $E \gg mc^2$). Je kunt nu in principe zelf de berekening van Mott herhalen (voor de liefhebbers); we zullen dat hier niet voordoen.

Als de terugstoot een rol gaat spelen kan de elektrische potentiaal niet meer als statisch beschouwd worden en is het noodzakelijk de veldentheorie te gebruiken. De details zullen we hier niet bespreken. Het resultaat is als volgt (zie bijv. GEP, problem 6.10)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\hbar^2}{64\pi^2 M} \frac{|\vec{p}\,'|}{|\vec{p}|} \frac{\langle|\mathcal{M}|^2\rangle}{\left(Mc^2 + E - (|\vec{p}|E'/|\vec{p}\,'|)\cos\theta\right)}, \tag{44}$$

waarbij uiteraard $|\vec{p}|c = \sqrt{E^2 - m_e^2c^4}$, $|\vec{p}\,'|c = \sqrt{E'^2 - m_e^2c^4}$, terwijl behoud van energie en impuls E' bepaald kan worden in termen van E en θ, zoals gegeven in EqPN.(5.15) van het boek. Alle *dynamica* van de verstrooiing wordt beschreven door $\mathcal{M}$, waarbij $\langle|\mathcal{M}|^2\rangle$ staat voor de middeling over de spins van de ingaande deeltjes en de sommatie over de spins van de uitgaande deeltjes. Men vindt hiervoor de volgende uitdrukking (zie bijv. GEP §8.3)

$$\langle|\mathcal{M}|^2\rangle = \frac{1}{(q^2)^2} 4\pi\alpha L_{\mu\nu}(p,p') 4\pi\alpha Z^2 L^{\mu\nu}(P,P'). \tag{45}$$

Het matrix element $\mathcal{M}$ bevat een foton (dit geeft een factor $1/q^2$) dat ontstaat bij de overgang van het ingaande naar het uitgaande electron, en weer geabsorbeerd wordt door het ingaande muon, dat daarbij overgaat in het uitgaande muon. Dus komt in $\langle|\mathcal{M}|^2\rangle$ de factor $1/(q^2)^2$ van de uitwisseling van een foton, terwijl $\alpha L_{\mu\nu}(p,p')$ komt van de interactie van het in- en uitgaande electron met het foton, en $Z^2\alpha L_{\mu\nu}(P,P')$ van de interactie van het in- en uitgaande muon ($Z=-1$) met het foton. Er geldt voor spin $\frac{1}{2}$ deeltjes zonder interne structuur dat (zie bijv. GEP §8.3)

$$L_{\mu\nu}(p,p') = 2(p_\mu p'_\nu + p_\nu p'_\mu - g_{\mu\nu}(p\cdot p' - p^2)), \quad m_e^2c^2 = p^2 = p'^2. \tag{46}$$

(vervang m_e door M voor $L_{\mu\nu}(P,P')$, immers $P^2 = P'^2 = M^2c^2$). Invullen in Eq.(45) geeft

$$\begin{aligned} \langle|\mathcal{M}|^2\rangle &= 8\frac{(4\pi Z\alpha)^2}{(q^2)^2}((P'\cdot p')(P\cdot p) + (P'\cdot p)(P\cdot p') \\ &\qquad -m_e^2c^2(P'\cdot P) - M^2c^2(p'\cdot p) + 2m_e^2M^2c^4). \end{aligned} \tag{47}$$

Als we de terugstoot verwaarlozen, $E \ll Mc^2$, is $E = E'$ en dus ook $|\vec{p}| = |\vec{p}\,'|$. Dit invullen in Eq.(44),

$$E \ll Mc^2: \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\hbar^2}{64\pi^2 M}\frac{\langle|\mathcal{M}|^2\rangle}{\big(Mc^2 + E(1-\cos\theta)\big)} = \frac{\hbar^2\langle|\mathcal{M}|^2\rangle}{64\pi^2M^2c^2}, \tag{48}$$

waar we in de laatste stap E t.o.v. Mc^2 hebben verwaarloosd. Gebruiken we verder dat bij verwaarlozing van de terugstoot $P' = P = (Mc;\vec{0})$ en $E = E'$, dan vinden we met Eq.(47)

$$\begin{aligned} E \ll Mc^2: \quad \langle|\mathcal{M}|^2\rangle &= 8\left(\frac{4\pi Z\alpha Mc}{q^2}\right)^2 \left(2E^2/c^2 + m_e^2c^2 - p'\cdot p\right) \\ &= \left(\frac{16\pi Z\alpha ME}{q^2}\right)^2 \left(1 - \beta^2\sin^2(\theta/2)\right). \end{aligned} \tag{49}$$

waarbij voor de laatste gelijkheid $E^2/c^2 = m_e^2c^2 + \vec{p}^{\,2}$ en, bij de verwaarlozing van de terugstoot, $p' \cdot p = E^2/c^2 - \vec{p}^{\,2}\cos\theta$ gebruikt mag worden (ga na). Dit invullen in Eq.(48) geeft precies Mott's resultaat, EqPN.(5.36) en (5.38) in het boek!

Anderzijds, als de terugstoot niet langer verwaarloosd kan worden, dan geldt $E \gg m_ec^2$. Dit geeft $|\vec{p}| = \frac{E}{c}$, $|\vec{p}\,'| = \frac{E'}{c}$ en $E/E' = 1 + E(1-\cos\theta)/Mc^2$ (zie EqPN.(5.15) van het boek), zodat Eq.(44) vereenvoudigt tot

$$E \gg m_ec^2: \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\hbar^2 E'^2 \langle |\mathcal{M}|^2\rangle}{64\pi^2 M^2 c^2 E^2}. \tag{50}$$

Invullen van $P' = P + p - p'$ (energie-impulsbehoud) in Eq.(47) geeft dat (ga na)

$$\begin{aligned}\langle |\mathcal{M}|^2\rangle &= 8\frac{(4\pi Z\alpha)^2}{(q^2)^2}[2(P\cdot p')(P\cdot p) + (p'\cdot p)(P\cdot p - P\cdot p' - M^2c^2) \\ &\qquad + m_e^2c^2(2P\cdot(p'-p) + M^2c^2)].\end{aligned} \tag{51}$$

De termen evenredig met $m_e^2c^2$ mogen we nu verwaarlozen, en aangezien $P = (Mc;\vec{0})$ vinden we het volgende vereenvoudigde resultaat,

$$\begin{aligned}E \gg m_ec^2: \ \langle |\mathcal{M}|^2\rangle &= 8M\left(\frac{4\pi Z\alpha}{q^2}\right)^2\Big(2MEE' + (p'\cdot p)(E - E' - Mc^2)\Big) \\ &= 16EE'\left(\frac{4\pi Z\alpha M}{q^2}\right)^2\left(\cos^2(\theta/2) - \frac{q^2\sin^2(\theta/2)}{2M^2c^2}\right).\end{aligned} \tag{52}$$

In de laatste stap gebruikten we dat $(p'\cdot p) = E'E(1-\cos(\theta))/c^2$, oftewel $(p'\cdot p) = 2E'E\sin^2(\theta/2)/c^2$, terwijl uit EqPN.(5.15) in het boek volgt dat $E - E' = EE'(1-\cos\theta)/(Mc^2)$, hetgeen met EqPN.(6.2) van het boek ook geschreven kan worden als $E - E' = -q^2/(2M)$ (ga na). De gevonden uitdrukking voor $\langle |\mathcal{M}|^2\rangle$ invullen in Eq.(50) geeft precies EqPN.(6.5) in het boek.

Om misverstanden te voorkomen geven we hier nog eens de relevante uitdrukkingen die bij het boek gebruikt moeten worden in EqPN.(6.5), en met[3] $Z = 1$ in EqPN.(6.10) en (7.7), om de juiste resultaten te verkrijgen

[3] De ladingsfactor wordt geabsorbeerd in de vorm- en structuurfuncties, anders kunnen we de formules niet gebruiken bij verstrooiing aan bijv. een neutron.

voor $E \gg m_e c^2$:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Rutherford}} = \left(\frac{2Z\alpha\hbar c E'}{c^2 q^2}\right)^2,$$
$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} = \frac{E'}{E}\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^*_{\text{Mott}} = \cos^2(\theta/2)\frac{E'}{E}\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Rutherford}}. \tag{53}$$

Merk op dat in de afleiding van de werkzame doorsnede voor de Rutherford (EqPN.(5.33)) en de Mott (EqPN.(5.39)) verstrooiing de terugstoot wordt verwaarloosd. Er kan dan geen onderscheid meer gemaakt worden tussen E' en E, een onderscheid dat wel nodig is om later tot de correcte relativistische formule te komen. Het is dit aspect dat onbevredigend is in de manier waarop het boek tot de resultaten komt voor $E \gg m_e c^2$.

Vormfuncties

We zullen nu de Rosenbluth formule voor elastische verstrooiing (EqPN. (6.10)) bespreken (we volgen GEP §8.3), waarbij het deeltje met massa M en lading Ze een interne structuur kan hebben. We moeten in Eq.(45) $L_{\mu\nu}(P, P')$ vervangen door een uitdrukking $K_{\mu\nu}(P, P')$ waarin deze interne structuur op een of andere manier verwerkt is. Om hier wat orde in te scheppen gebruiken we dat $K_{\mu\nu}$ onder Lorentz transformaties als een symmetrische tensor moet transformeren. We kunnen met P en $q = P' - P (= p - p')$ slechts de volgende drie onafhankelijke combinaties maken: $P_\mu P_\nu$, $q_\mu q_\nu$ en $P_\mu q_\nu + P_\nu q_\mu$, die samen met $g_{\mu\nu}$ gebruikt kunnen worden om $K_{\mu\nu}(P, P')$ te definiëren.

De interactie met het electron vindt plaats door de uitwisseling van een foton. Dat koppelt aan $K_{\mu\nu}$ via de elektromagnetische potentiaal $A_\mu(x)$. Maar deze koppeling mag niet afhangen van de ijk die we voor $A_\mu(x)$ gebruiken. Onder een ijktransformatie gaat $A_\mu(x)$ over $A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x)$. Voor vlakke golven $A_\mu(x) = e_\mu(q)\exp(iq \cdot x/\hbar)$ en $\Lambda(x) = \lambda \exp(iq \cdot x/\hbar)$ betekent dit dat de amplitude $e_\mu(q)$ onder een ijktransformatie vervangen wordt door $e_\mu(q) + i\lambda\hbar^{-1} q_\mu$. Dit zou aanleiding geven tot extra termen evenredig met $\lambda q^\mu K_{\mu\nu}$ en $\lambda^* \lambda q^\mu q^\nu K_{\mu\nu}$, welke niet voor mogen komen; ijkinvariantie vereist dus dat $q^\mu K_{\mu\nu} = 0$.

Er resteren dan nog maar twee onafhankelijke symmetrische Lorentztensoren,

$$K^{(1)}_{\mu\nu} \equiv \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} - g_{\mu\nu}, \qquad K^{(2)}_{\mu\nu} \equiv \left(P_\mu - \frac{q \cdot P}{q^2} q_\mu\right)\left(P_\nu - \frac{q \cdot P}{q^2} q_\nu\right). \tag{54}$$

Ieder van deze tensoren kan vermenigvuldigd worden met een Lorentz*scalar* die nog wel af kan hangen van $q^2 = (P' - P)^2$, de enige niet triviale Lorentzscalar die uit P en P' gedestileerd kan worden. Immers zowel $P^2 = M^2c^2$ als $P'^2 = M^2c^2$. Dit laatste feit (geldig voor elastische verstrooiing) impliceert ook dat

$$K^{(2)}_{\mu\nu} = (P_\mu + \tfrac{1}{2}q_\mu)(P_\nu + \tfrac{1}{2}q_\nu) \tag{55}$$

(ga dit na door te laten zien dat $q^2 = -2q \cdot P$). We kunnen dus met

$$K_{\mu\nu}(P,P') = K_1(q^2)\left(\frac{q_\mu q_\nu}{q^2} - g_{\mu\nu}\right) + \frac{K_2(q^2)}{M^2c^2}(P_\mu + \tfrac{1}{2}q_\mu)(P_\nu + \tfrac{1}{2}q_\nu), \tag{56}$$

de meest algemene parametrisatie van $K_{\mu\nu}(P,P')$ weergeven. Analoog aan Eq.(45) geldt

$$\langle|\mathcal{M}|^2\rangle = \frac{1}{(q^2)^2} 4\pi\alpha L_{\mu\nu}(p,p') 4\pi\alpha Z^2 K^{\mu\nu}(P,P'), \tag{57}$$

en voor $E \gg m_e c^2$ vinden we dan

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4M^2c^2}[2K_1(q^2)\sin^2(\theta/2) + K_2(q^2)\cos^2(\theta/2)]\frac{E'}{E}\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Rutherford}}. \tag{58}$$

Dit is precies de Rosenbluth formule, EqPN.(6.10) in het boek, waarbij $K_1(q^2)$ en $K_2(q^2)$ als volgt gerelateerd zijn aan $G_E(Q^2)$ en $G_M(Q^2)$:

$$K_1(q^2) = (2Mc)^2\tau G_M^2(Q^2), \qquad K_2(q^2) = (2Mc)^2\frac{G_E^2(Q^2) + \tau G_M^2(Q^2)}{1+\tau}, \tag{59}$$

met $Q^2 = -q^2$ en $\tau = Q^2/(2Mc)^2$.

Extra opgave: De Rosenbluth formule kan aannemelijk gemaakt worden door te laten zien dat $L_{\mu\nu}(P,P') = K_1(q^2)(-g_{\mu\nu} + q_\mu q_\nu/q^2) + K_2(q^2)(P_\mu + \frac{1}{2}q_\mu)(P_\nu + \frac{1}{2}q_\nu)/(M^2c^2)$, met $K_1(q^2) = -q^2$ en $K_2(q^2) = 4M^2c^2$ (de vormfuncties voor puntdeeltjes). Laat dit zien[4].
(Fakultatief: geef de afleiding van de Rosenbluth formule.)

[4] In plaats van uitschrijven kun je ook eerst controleren dat $q^\mu L_{\mu\nu}(P,P') = 0$, zodat $L_{\mu\nu}$ noodzakelijkerwijze de algemene vorm van Eq.(56) moet hebben. Omdat $L_{\mu\nu}(P,P')$ kwadratisch in de impulsen is, moet dus $K_1(q^2)$ linear in, en $K_2(q^2)$ onafhankelijk van q^2 zijn. Op grond van dimensies $K_1(q^2) = Aq^2$ en $K_2(q^2) = BM^2c^2$, met A en B constanten. Beredeneer tenslotte dat $A = -1$ en $B = 4$.

7 Diep-Inelastische Verstrooiing

In Fig. 7.1 staat het spectrum van electron-proton verstrooiing voor een electronenergie van $E = 4.879$ GeV bij een verstrooiingshoek $\theta = 10^o$. Naast de elastische resonantiepiek bij 4.56 GeV zijn er vele inelastische resonanties (kernresonanties) zichtbaar, zoals de Δ^+ en N^+. De invariante massa W krijgen we door $W^2c^2 = P'^2 = (P+q)^2 = M^2c^2+2P\cdot q+q^2 = M^2c^2+2M\nu-Q^2$. De Lorentz-invariante grootheid ν is gedefinieerd door $\nu = P\cdot q/M$. Als het proton in rust is voor de botsing, en $q = ((E-E')/c, \vec{q})$, dan geldt $\nu = E - E'$ als energietransport door het foton van het electron naar het proton. (In de figuren op pg. 84 en 85 is $c = 1$ gezet. Er had eigenlijk moeten staan $q = (\nu/c, \vec{q})$ en $P = (Mc, 0)$).

De $\Delta(1232)$ resonantie zit op $E' = 4.2$ GeV, wat correspondeert met $W = 1232$ GeV$/c^2$. Er zijn vier verschillende ladingen, Δ^{++}, Δ^+, Δ^0 en Δ^-, maar alleen Δ^+ wordt natuurlijk waargenomen door behoud van lading. De $\Delta(1232)$ heeft een breedte van ruwweg $\Gamma = 120$ MeV en dus een levensduur van $\tau = \hbar/\Gamma = 6.6\times10^{-22}$MeV s/120 MeV=$5.5\times10^{-24}s$. Dit is de typische tijdschaal voor sterke interacties. The Δ^+ valt uiteen in $\Delta^+ \to p + \pi^0$ en $\Delta^+ \to n + \pi^+$, waar het lichte π-meson (pion) wordt geproduceerd.

In de elastische verstrooiingen is er één vrije parameter, bijv. θ. Immers $W = M$ en $2M\nu - Q^2 = 0$, maar bij inelastische verstrooiing is er de excitatie energie van het proton, die een extra parameter toevoegd. We hebben dan twee parameters die we kunnen varieren, bijv. (E', θ) of (Q^2, ν). Omdat $W > M$ geldt $2M\nu - Q^2 > 0$ en wordt de Rosenbluth formule vervangen door

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^*_{\text{Mott}} \left[W_2(Q^2,\nu) + 2W_1(Q^2,\nu)\tan^2\frac{\theta}{2}\right],$$

waarbij de tweede term de magnetische interacties draagt. W_1 en W_2 zijn twee structuurfuncties.

De eerste diep-inelastische verstrooiingen werden uitgevoerd tegen het einde van de zestiger jaren op SLAC met een lineaire electronversneller. In Fig. 7.2 staan de resultaten voor een hoek van 4^o uitgezet als een functie van W bij verschillende bundels van 4.5 tot 20 GeV. Het spectrum gaat van $0.06 < Q^2 < 0.09$ (GeV/c)^2 voor 4.5 GeV tot $1.45 < Q^2 < 1.84$ (GeV/c)^2 voor 20 GeV. We zien hoe het als functie van Q^2 snel afneemt, terwijl het als een functie van W (bij vaste energie) minder snel afneemt.

In Fig. 7.3 wordt aangetoond dat $\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'}/\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^*_{\text{Mott}}$ veel groter is dan wat men met $|G^{\text{dipole}}|^2 \approx 1/Q^8$ zou verwachten. De structuurfuncties $W_{1,2}$ zijn vrijwel onafhankelijk van Q^2 voor verschillende W. Om dit beter te begrijpen voeren we een Lorentz invariante grootheid in, de Bjørken schaalvariabele $x = Q^2/(2P\cdot q) = Q^2/(2M\nu)$, welke voor $2M\nu - Q^2 > 0$ de waarde $0 < x < 1$ aanneemt. De structuurfuncties $W_{1,2}(Q^2, \nu)$ worden gewoonlijk vervangen door $F_1(x, Q^2) = Mc^2W_1(Q^2, \nu)$ en $F_2(x, Q^2) = \nu W_2(Q^2, \nu)$. Men vindt dat $F_{1,2}(x, Q^2)$ niet, of slechts een klein beetje afhangen van Q^2. In Fig. 7.4 is dit voor $F_2(x, Q^2)$ als functie van x weer gegeven voor $2 < Q^2 < 18$ (GeV/c)^2. Dat betekent dat de kernen een substructuur hebben van puntdeeltjes.

Extra opmerkingen over diep-inelastische verstrooiing: Als we de structuur van een deeltje op heel kleine schaal willen bestuderen hebben we bundels van bij voorkeur electronen met hoge energie nodig. Alleen bij verstrooiing over een grote hoek kan dan veel energie worden overgedragen aan het te bestuderen deeltje. Het is deze energie die de resolutie van het experiment bepaalt, zie EqPN.(5.37) van het boek. Het nadeel is dat daarbij zoveel energie wordt overgedragen, dat het te bestuderen deeltje makkelijk in een aangeslagen toestand kan komen, of secondaire deeltjes geproduceerd kunnen worden. De botsing is in zo'n geval inelastisch.

Relevant is de invariante massa W; de massa die hoort bij de 4-impuls $P' = P + q = P + p - p'$, dus $W^2c^2 = P'^2 = M^2c^2 + 2P \cdot q + q^2$. Bij elastische verstrooiing geldt uiteraard $W = M$. Als door de botsing het te bestuderen deeltje in een aangeslagen toestand komt, is W dus de massa van deze nieuwe toestand. Dit zal dus i.h.a. rond een vaste waarde liggen. Zitten we er net wat onder of boven, dan kan deze aangeslagen toestand niet gevormd worden. Dat is de verklaring voor het feit dat men als functie van (bijv.) de energie van het electron een piek ziet (waarvan de breedte omgekeerd evenredig is met de levensduur van de aangeslagen toestand), een zg. resonantie.

Daarnaast kunnen er natuurlijk ook andere deeltjes worden geproduceerd (fragmentatie van het te bestuderen deeltje), zolang maar aan de behoudswetten is voldaan. Bij inelastische verstrooiing zijn er nu dus twee Lorentz invariante parameters, Q^2 en W, die de kinematica van het verstrooiingsproces beschrijven. In de praktijk gebruikt men vaak $\nu \equiv P\cdot q/M$. Bij "fixed target" experimenten is dit precies $\nu = E - E'$, de op het targetdeeltje overgedragen energie, gelijk aan het verschil van de in- en uitgaande electronenergie, zie EqPN.(7.3). Vooral handig voor de beschrijving van de substructuur van het proton in termen van quarks is de schalingsvariabele van Bjørken, $x \equiv Q^2/(2M\nu)$. Verstrooiing is elastisch dan en slechts dan als $x = 1$.

Informatie over de structuur van het proton kunnen we verkrijgen analoog aan de bepaling van de ladingsverdeling binnen een kern op basis van de elastische verstrooiing. Hiervoor hadden we de vormfuncties $K_{1,2}(Q^2)$ ingevoerd. Ook voor inelastische verstrooiing vindt de interactie plaats door het uitwisselen van een foton. Alleen, nu mogen we bij $K_{\mu\nu}(P, P')$ in Eq.(56) niet langer aannemen dat $P'^2 = M^2c^2$. Immers, voor inelastische verstrooiing is juist $P'^2 = W^2c^2 > M^2c^2$, hetgeen een *extra* Lorentz invariante parameter geeft. Al onze onkunde wordt nu geparametriseerd door twee structuurfuncties die afhangen van *twee* Lorentz invariante parameters, Q^2 en ν, of ieder andere willekeurige combinatie van deze twee, zoals Q^2 en x. Daarnaast lag in Eq.(44) de energie van het uitgaande electron vast zodra de verstrooiingshoek en de ingaande energie van het electron bekend waren. Dat is nu niet langer het geval, omdat een deel van de energie gebruikt wordt voor de excitatie of fragmentatie van het te bestuderen deeltjes (het proton). We moeten dus integreren over E' om de totale partiële werkzame doorsnede te bepalen. Omdat juist de afhankelijkheid van E' veel nuttige informatie zal bevatten, meet men de zogenaamde dubbel-differentiële werkzame doorsnede,

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} = \left(\frac{\alpha\hbar}{q^2}\right)^2 \frac{E'}{E} L^{\mu\nu}(p, p') W_{\mu\nu}(P, P'), \tag{60}$$

waarbij in dit geval de kinematica uiteraard wat afwijkt van het elastische geval, Eq.(44) en Eq.(45). In bovenstaande uitdrukking is $W_{\mu\nu}(P, P')$ gedefinieerd analoog aan $K_{\mu\nu}(P, P')$, met alle dynamica geparametriseerd door de structuurfuncties $W_1(Q^2, \nu)$ en $W_2(Q^2, \nu)$,

$$W_{\mu\nu}(P, P') \equiv W_1(Q^2, \nu)\left(\frac{q_\mu q_\nu}{q^2} - g_{\mu\nu}\right) + \frac{W_2(Q^2, \nu)}{(Mc)^2}\left(P_\mu - \frac{q\cdot P}{q^2}q_\mu\right)\left(P_\nu - \frac{q\cdot P}{q^2}q_\nu\right), \tag{61}$$

waarbij rekening is gehouden met het feit Eq.(55) voor inelastische verstrooiing niet langer bruikbaar is. Net als bij de berekening van de Rosenbluth formule, Eq.(58), kan hieruit EqPN.(7.7) in het boek worden afgeleid[5].

[5]Voor meer details zie bijv. GEP §8.4. Een extra factor c^2 bij Griffiths wordt met de conventies die het boek hanteert geabsorbeerd in de definitie van W_a. De Bjørken schalingsfuncties $F_a(x)$ komen wel overeen (vergelijk GEP verg.(8.37-38) met EqPN.(7.12) in het boek)

De Bjørken schalingsfuncties, zie EqPN.(7.12) in het boek, kunnen uiteraard niet altijd gebruikt worden. Immers bij lage energie (en dus lage resolutie) ziet het foton alleen het proton als een puntlading (Mott verstrooiing), terwijl bij hoge energie het foton de structuur binnen het proton, i.e. de quarks, ziet. In het overgangsgebied is EqPN.(7.12) alleen geldig wanneer F_a nog van Q^2 afhangt, $F_a(x, Q^2)$. In de praktijk moeten zowel Q^2 als ν groot gekozen worden (in ieder geval $Q^2 > 1(GeV/c)^2$ en $\nu > 3.5GeV$). De afwijkingen van Bjørkenschaling nemen dan af voor toenemende Q^2, $F_a(x, Q^2) \rightarrow F_a(x)$. Het feit dat $F_a(x, Q^2)$ onafhankelijk van Q^2 wordt, is natuurlijk een zeer sterke aanwijzing dat de verstrooiing bij hoge energie door puntdeeltjes binnen het proton wordt veroorzaakt.

Dat deze puntdeeltjes spin $\frac{1}{2}$ hebben volgt uit de Callan-Gross relatie, $2xF_1(x) = F_2(x)$. Dit moet in problem 7.2 bewezen worden, maar is zo cruciaal voor een goed begrip dat we het hier behandelen. Als EqPN.(7.7) de verstrooiing aan een puntdeeltje weergeeft, moet het dus in de vorm van EqPN.(6.5) te brengen zijn. Een noodzakelijke voorwaarde is dat $W_1(Q^2, \nu)$ $= \tau W_2(Q^2, \nu)$ (ga na). Bij de definitie van $\tau = Q^2/(2mc)^2 \equiv \tau_q$ mogen we niet langer $m = M$ (de massa van het proton) gebruiken, immers we nemen aan dat de verstrooiing via een enkel quark verloopt. Derhalve moet m de massa van het quark zijn. Om redenen die samenhangen met hogere orde quantum correcties (i.h.b. voor de lichte quarks) is het moeilijk deze massa precies vast te leggen. Dat hoeft hier ook niet, omdat we aannemen dat de verstrooiing aan het quark in goede benadering elastisch is, en in dat geval vinden we met EqPN.(7.5) $m = \frac{1}{2}Q^2/\nu$. We hebben dus

$$\frac{F_2(x)}{F_1(x)} = \frac{\nu W_2(\nu, Q^2)}{Mc^2 W_1(\nu, Q^2)} = \frac{\nu}{Mc^2\tau} = \frac{4m^2\nu}{MQ^2} = \frac{Q^2}{M\nu} = 2x, \tag{62}$$

hetgeen precies de Callan-Gross relatie is! In Fig. 7.5 staat $2xF_1(x)/F_2(x)$ weergegeven als functie van $x = Q^2/(2M\nu)$ en voor grote Q^2 nadert dit naar een.

Uit de definitie van x, EqPN.(7.9), volgt dat $m = xM$. Dat x de fractie van de proton impuls is die het quark draagt geldt strikt gesproken echter alleen in het Breitstelsel, zie pg. 90 van het boek. Het is hierbij beter om van EqPN.(7.9) de definitie $x = Q_L^2/2P_L \cdot q_L = Q_B^2/2P_B \cdot q_B$ te gebruiken (de index B staat voor Breit- en L voor laboratoriumstelsel). In het Breitstelsel geldt *niet* langer $q = q_L = (\nu_L/c; \vec{q}_L) = ((E_L - E'_L)/c; \vec{q}_L)$, maar $q = q_B =$ $(0; \vec{q}_B)$. Om $\vec{q}_B$ te bepalen merken we op dat in het Breitstelsel, met $|\vec{P}_B| \gg$

Mc, de transversale component van de quarkimpuls, $\vec{P}_q$, wordt verwaarloosd, zodat $\vec{P}_q$ evenredig is met $\vec{P}_B$, zeg $\vec{P}_q = y\vec{P}_B$. Na de verstrooiing blijft $|\vec{P}_q|$ onveranderd, omdat er ook geen energieoverdracht is in het Breitstelsel: alleen de richting (het teken van y) is vrij te kiezen. Bij verstrooiing *moet* echter de quarkimpuls veranderen, en dus van richting omkeren! Derhalve geldt $\vec{q}_B = -2y\vec{P}_B$ (zie Fig. 7.6) en volgt inderdaad dat $x = Q_B^2/2P_B \cdot q_B = y$ (ga na), ofwel $\vec{P}_q = x\vec{P}_B$. (Het onderschrift van Fig. 7.6 bevat een slordigheid. Er staat "Diagram (**b**) depicts the scattering in the Breit frame in which the *momentum* transferred by the virtual photon is zero." Zoals in de tekst daaronder wordt geschreven, had er *energy* i.p.v. *momentum* moeten staan.)

Uiteraard is het zo dat de impuls van een quark binnen het proton niet een vaste waarde heeft. Tevens zijn er tegelijk quarks van verschillende smaak (flavor) en lading z_f. Voor iedere smaak wordt de verdeling van de quark-impulsfracties beschreven door $q_f(x)$ ($\bar{q}_f(x)$ voor de anti-quarks). Iedere van deze moet vermenigvuldigd worden met het kwadraat van de lading z_f^2 (i.p.v. van een overall factor Z^2) vanwege de koppeling met het foton, $F_2(x) = x\sum_f z_f^2(q_f(x) + \bar{q}_f(x))$. Merk op dat de Bjørkenschalingsfuncties gevormd worden door een *incoherente* som van deze bijdragen. Met de Callan-Gross relatie en de uitdrukking voor $F_2(x)$ volgt

$$F_1(x) = \tfrac{1}{2}\sum_f z_f^2(q_f(x) + \bar{q}_f(x)), \tag{63}$$

waarmee we de volgende vereenvoudiging afleiden[6] (ga na)

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} &= F_1(x)\left[\frac{2x}{\nu} + \frac{2\tan^2(\theta/2)}{Mc^2}\right]\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^*_{\text{Mott}} \\ &= \frac{4MF_1(x)}{Q^2}\left[x^2 + 2\tau\tan^2(\theta/2)\right]\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^*_{\text{Mott}}. \end{aligned} \tag{64}$$

Een andere bevestiging van de juistheid van het formalisme is dat EqPN. (6.5) afgeleid kan worden uit EqPN.(7.7). We moeten daartoe Eq.(64) *integreren* over E'. Echter E' is niet langer vrij: $\nu = E - E' = \frac{1}{2}Q^2/M$ en $x = 1$. Derhalve geldt voor een puntdeeltje met lading $Z = 1$ dat

[6] Voordat je denkt dat dit fout is, omdat de afleiding van de Callan-Gross relatie gebruikt dat $d^2\sigma/d\Omega dE'$ evenredig is met $1 + 2\tau\tan^2(\theta/2)$, roepen we in herinnering dat $\tau = Q^2/(2Mc)^2 = x^2Q^2/(2mc)^2 = x^2\tau_q$.

$z_f = 1$ en $q_f(x) = \delta(x-1)$ (er is nu maar één smaak en $\bar{q}_f(x) = 0$), ofwel $F_1(x) = \frac{1}{2}\delta(x-1)$. Essentieel is dat $F_1(x)$ een deltafunctie in x is, terwijl $d\sigma/d\Omega$ verkregen wordt door te integreren over E' (bij vaste θ), zodat met $f(x)$ een willekeurige functie van x

$$\int dE'\, F_1(x) f(x) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial x}{\partial E'}\right)^{-1} f(1) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial E'}\left[\frac{4EE'\sin^2(\theta/2)}{2(E-E')Mc^2}\right]\right)^{-1} f(1) = \frac{Q^2}{4M}\frac{E'}{E} f(1) \tag{65}$$

(ga na). Met Eq.(64) vinden we dan inderdaad precies EqPN.(6.5) in het boek!

Extra opgave: Laat zien dat Eq.(64) ook geschreven kan worden als

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} = \frac{F_1(x)}{2M}\left(\frac{\alpha\hbar}{E\sin(\theta/2)}\right)^2\left[1 + \frac{2EE'}{(E-E')^2}\cos^2(\theta/2)\right]. \tag{66}$$

(Fakultatief: Bewijs dat EqPN.(7.7) inderdaad volgt uit Eq.(60) en (61)).

Uiteraard is de verdeling van de quarks gegeven door $q_f(x)$ en de antiquarks door $\bar{q}_f(x)$. Dat zijn de valentiequarks, maar er zijn ook zeequarks ($q_s(x)$ en $\bar{q}_s(x)$) en gluonen ($g(x)$). Ze zijn gemeten voor waterstof, deuterium en zwaardere kernen. De structuurfuncties worden altijd gegeven per nucleon. Zo is $F_2^d \approx (F_2^p + F_2^n)/2$. Naast electronverstrooiing is ook muon- en neutrinoverstrooiing mogelijk, waarbij muonen een grotere energie hebben, en de neutrinos koppelen aan de zwakke lading. Neutrino- en antineutrinoverstrooiing geven de valentie- en zeequark distributies afzonderlijk, en staan weergegeven in Fig. 7.7. De zeequarks dragen alleen bij voor kleine waarden van x (te verwaarlozen voor ruwweg $x > 0.35$), maar de valentiequarks hebben hun maximum bij $x \approx 0.2$ en gaan naar nul voor $x \to 1$ en $x \to 0$.

Het EMC effect laat zien dat we niet eenvoudig de som van de distributies kunnen nemen bij grotere kernen. Bijv. F_2^{Ca}/F_2^d als functie van x laat een afwijking van 1 zien, maar het effect is nog niet goed begrepen.

8 Quarks, Gluonen en Sterke Wisselwerking

In diep-inelatische verstrooiing hebben we gezien dat nucleonen bestaan uit geladen quarks. Om alle grootheden, zoals massa, lading, magnetisch moment, isospin, etc. af te kunnen leiden hebben we minimaal het u (up) en

d (down) quark nodig. De spin van het quark is 1/2 en er zijn drie quarks nodig om een proton (uud) of neutron (udd) te maken.

		u	d	$p(uud)$	$n(udd)$
Lading	z	+2/3	-1/3	1	0
Isospin	I	1/2		1/2	
	I_3	+1/2	-1/2	+1/2	-1/2
Spin	s	1/2	1/2	1/2	1/2

Dat de lading van quarks -1/3 of 2/3 is volgt uit het feit dat de maximale lading twee is (voor Δ^{++}) en de minimale min een (voor Δ^{-}).

De valentiequarks dragen de quantumgetallen voor de kernen, maar we hebben ook de zeequarks, die virtuele quark-antiquark paren vormen. Ze dragen weliswaar een kleine fractie van de impuls, maar omdat ze lading hebben doen ze wel mee. Naast u en d is er het s (strange), c (charm), b (bottom) en t (top) quark, welke in 3 families gerangschikt kunnen worden,

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix} \quad ,$$

met een lading $z_f = 2/3$ voor de bovenste rij en $z_f = -1/3$ voor de onderste. De c, b en t zijn zo zwaar dat ze in het volgende verwaarloosd kunnen worden.

De structuurfuncties van het proton en neutron worden gegeven door

$$\begin{aligned} F_2^{e,p}(x) &= x[(d_v^p + d_s + \bar{d}_s)/9 + 4(u_v^p + u_s + \bar{u}_s)/9 + (s_s + \bar{s}_s)/9], \\ F_2^{e,n}(x) &= x[(d_v^n + d_s + \bar{d}_s)/9 + 4(u_v^n + u_s + \bar{u}_s)/9 + (s_s + \bar{s}_s)/9]. \end{aligned}$$

Hierin is u_v^p bijv. de verdeling van valentiequarks in het proton en u_s van zeequarks (die we gelijk veronderstellen voor het proton en neutron). We hebben ook $u_v^p(x) = d_v^n(x)$, $d_v^p(x) = u_v^n(x)$ en $u_s^p(x) = d_s^p(x) = d_s^n(x) = u_s^n(x)$, wat een gevolg is van de isospin symmetrie. De structuur van een gemiddeld nucleon is dus gegeven door $F_2^{e,N}(x) = (F_2^{e,p}(x) + F_2^{e,n}(x))/2 = (5x/18)\sum_{q=d,u}(q(x) + \bar{q}(x)) + (x/9)[s_s(x) + \bar{s}_s(x)]$.

Voor neutrinoverstrooiing zijn er geen factoren z_f^2. Door ladingsbehoud en heliciteit koppelen neutrinos en antineutrinos verschillend aan quarks en antiquarks, maar dit wordt te niet gedaan als men middelt over het nucleon, $F_2^{\nu,N}(x) = x\sum_f(q_f(x) + \bar{q}_f(x))$. In Fig. 8.1 ziet men aan geladen leptonen en neutrinos (voor $10 < Q^2 < 100$ (GeV/c)^2) dat $F_2^{\nu,N}$ en $18F_2^{e,N}/5$ inderdaad gelijk zijn. Tevens staat hierin aangegeven wat de zeequarks ($\bar{q}$)

en de valentiequarks voor een bijdrage geven. De laatste hebben een maximum voor $x \approx 0.17$ en een gemiddelde van $\langle x_v \rangle \approx 0.12$. De zeequarks zijn alleen relevant voor kleine x, met een gemiddelde van $\langle x_s \rangle \approx 0.04$. De integraal $\int_0^1 F_2^{\nu,N}(x)dx \approx (18/5)\int_0^1 F_2^{e,N}(x)dx \approx 0.5$ is een belangrijke grootheid, aangezien het ruwweg de impuls van alle quarks en antiquarks beschrijft. Dat betekent dat de andere helft door de gluonen gegeven wordt.

In Fig. 8.2 staat F_2^n/F_2^p, verkregen met muonen van een energie van 90 GeV en 280 GeV, uitgezet tegen x. De krommen liggen vrij nauwkeurig op elkaar en gaan naar 1 voor $x \to 0$, omdat de valentiequarks daar geen rol spelen. Voor $x \to 1$ verdwijnen de zeequarks, en men verwacht dan $(2z_d^2 + z_u^2)/(2z_u^2 + z_d^2)$, waarbij z^2 de ladingen zijn van de valentiequarks. Echter men vindt 1/4, ofwel z_d^2/z_u^2. Dit impliceert dat de u-quarks de grootste impulsfractie binnen het proton hebben en de d-quarks binnen het neutron.

In diep-inelastische verstrooiing heeft men het over de naakte massas, $m_u = 1.5 - 5$ MeV/c^2 en $m_d = 3 - 9$ MeV/c^2, die vaak verwaarloosd kunnen worden. Dit heet de "current quarkmassa". Dat de d-quark zwaarder is dan de u-quark komt omdat het neutron een beetje zwaarder is als het proton, wat volgt uit de isospin symmetrie. Met de elektromagnetische interactie wordt dit alleen maar verder versterkt. Soms verwaarloost men de zeequarks en gluonen. In plaats daarvan neemt men dit mee in de valentiequarks. In zo'n geval spreekt men over "constituent quarks", die een massa hebben in de orde van 300 MeV/c^2.

Hadronen kunnen geclassificeerd worden als baryonen, fermionen met halftallige spin en mesonen, gevormd uit bosonen met heeltallige spin. De hadronen zijn gaande weg ontdekt, eerst uit fotografische platen die aan kosmische straling bloot stonden en later in experimenten aan deeltjesversnellers. Vele kort levende deeltjes zijn zo ontdekt, inclusief gebonden toestanden van de nucleonen. De lichtste baryonen zijn het proton en neutron. De massas van de excitaties zijn groot en derhalve spreekt men van deeltjes. Net als het proton en neutron hebben ze drie quarks, en zijn dus fermionen. Quarks hebben een behouden grootheid, $B = 1/3$, waaruit volgt dat baryonen $B = 1$ hebben (antibaryonen hebben uiteraard $B = -1$). Als het baryongetal behouden is, dan kan het proton niet vervallen. De limiet is $\tau(p \to \pi^0 + e^+) > 5.5 \times 10^{32}$jaar. De lichtste hadronen zijn pionen, met een massa van 140 MeV/c^2, beduidend lichter dan het proton en neutron. Ze hebben geen spin en bestaan uit een quark en antiquark, $|\pi^+\rangle = |u\bar{d}\rangle$, $|\pi^-\rangle = |d\bar{u}\rangle$ en $|\pi^0\rangle = (|u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle)/\sqrt{2}$. Hadronen die gevormd worden uit een gebonden toestand van een quark en een antiquark worden mesonen genoemd en hebben heeltallige spin. Ze vervallen uiteindelijk in electronen, neutrinos en/of fotonen. Doordat de mesonen uit een quark en antiquark bestaan is er niet zoiets als behoud van baryongetal. Het is een conventie welke mesonen men deeltjes noemt en welke antideeltjes.

Dat quarks kleuren hebben kan het mooiste worden afgelezen uit het bestaan van $|\Delta^{++}\rangle = |u^\uparrow u^\uparrow u^\uparrow\rangle$, welke de kleinste massa heeft met $J = 3/2^+$ (+ staat hier voor pariteit). Ze hebben daarom baanimpulsmoment $\ell = 0$ en zonder kleuren zou dit een symmetrische golffunctie zijn. Kleur stelt ons in staat de golffunctie antisymmetrisch te maken, met rood, blauw en groen de verschillende kleuren. Voor de antiquarks heeft men natuurlijk de kleuren anti-rood, anti-blauw en anti-groen. Deze interactie van de quarks wordt de Quantum Chromodynamica (QCD) genoemd, en wordt uitgewisseld door gluonen. Het is een niet-Abelse versie van QED, waar het massaloze gluon (met $J^P = 1^-$) zelf ook een kleurlading heeft. Deze vormen een 3×3 matrix met een singlet en een octet. Het singlet zou men het foton kunnen noemen, $(r\bar{r}+g\bar{g}+b\bar{b})/\sqrt{3}$, maar wordt gewoonlijk gelijk aan nul gezet; het is invariant onder kleurtransformaties. Het octet bestaat dan uit $r\bar{g}$, $r\bar{b}$, $g\bar{b}$, $g\bar{r}$, $b\bar{r}$, $b\bar{g}$, $(r\bar{r} - g\bar{g})/\sqrt{2}$ en $(r\bar{r} + g\bar{g} - 2b\bar{b})/\sqrt{6}$. De gluonen hebben interactie onder de Quantum Chromodynamica in vorm van vertices met drie of vier lijnen (in Fig. 8.3c en 8.3d), naast de emissie en absorptie van gluonen (zie Fig. 8.3a) en de productie of annihilatie van quark-antiquark paren (zie Fig. 8.3b).

Alleen kan de kleur zich niet rechtstreeks tonen. Alle hadronen moeten in kleurloze combinaties voorkomen. Enkelvoudige quarks worden daarom niet waargenomen en men heeft dus confinement als gevolg van de kleurlading. Zo is een combinatie van een quark en antiquark mogelijk, als mede een combinatie van drie quarks. In de figuur onder aan p.105 worden de drie kleuren weergegeven door iedere keer 120^o te draaien. De anti-kleur is dan de tegenovergestelde richting. Het pion bestaat bijv. uit $|\pi_+\rangle = |u_r\bar{d}_{\bar{r}}\rangle$, $|u_b\bar{d}_{\bar{b}}\rangle$ en $|u_g\bar{d}_{\bar{g}}\rangle$ die continue in elkaar overgaan. Voor het proton geldt $|p\rangle = |u_b u_r d_g\rangle$, $|u_r u_g d_b\rangle$, $\cdots$ (zie de figuur op p.106, waarbij voor π^+ en p aangegeven wordt hoe de kleuren alteneren). Hadronen die uit $|qq\rangle$ of $|qq\bar{q}\rangle$ bestaan kunnen niet voor komen, omdat ze een netto kleur hebben.

Extra opmerking over asymtotische vrijheid: Dat de sterkte van interacties af kan hangen van de energie, is als volgt in te zien. Hoe hoger de energie hoe korter de afstand waarop we een deeltje benaderen. In de elektrodynamica wordt de kracht uitgewisseld door fotonen, die zelf geen lading hebben. Ze kunnen in virtuele processen wel heel kort even bijv. een electron-positron paar vormen. Tijdens de korte tijd dat die paren met tegengestelde lading worden gevormd kan er een kleine scheiding van lading optreden. Bijv. in het veld van een proton, bij de vorming van een electron-positron paar zal het electron aangetrokken worden door het proton, terwijl het positron juist wordt afgestoten. Hierdoor wordt de lading van het proton een beetje afschermd. Deze afscherming wordt groter naarmate we dichter bij het proton komen. Op grote afstand moeten alle bijdragen bij elkaar opgeteld worden en nemen we een kleinere lading waar dan zonder deze afscherming. De effectieve lading, die de sterkte van de interactie bepaalt, neemt dus toe met afnemende afstand, ofwel met toenemende Q^2.

In de sterke wisselwerking, waar de kracht wordt overgedragen door gluonen, vindt er evenzo afscherming van kleurlading plaats door paarcreatie van een quark en een anti-quark. Echter het gluon heeft in tegenstelling tot het foton ook een kleurlading, een combinatie van een kleur en een anti-kleur. Hierdoor zal een gluon de kleur juist proberen te verdunnen, het tegengestelde van afscherming, in het engels dan ook antiscreening genoemd. Hoe meer kleuren er zijn, des te meer verdunning; hoe meer quarks er zijn, des te meer afscherming. Dit is wat EqPN.(8.6) in het boek weergeeft, $\alpha_s(Q^2) = 12\pi/[(11n - 2n_f)\ln(Q^2/\Lambda^2)]$, waarbij $n = 3$ het aantal kleuren is. Het aantal quarks is gegeven door n_f, wat afhangt van Q^2 ($n_f \approx 3 - 6$). Λ is de enige vrije parameter in deze vergelijking. Uit het experiment volgt $\Lambda \approx 250$MeV/c. In onze wereld wint de verdunning het van de afscherming. Dat is een hele gelukkige samenloop van omstandigheden, want daardoor kunnen we bij grote Q^2 bepaalde processen in de quantum chromodynamica op betrouwbare wijze berekenen en de theorie vergelijken met het experiment. Voor lage energie is storingstheorie niet langer mogelijk en is de theorie dus veel moeilijker. Men gebruikt dan bijv. een discrete benadering voor de ruimte en de tijd en doet numerieke berekeningen. Hiermee heeft men inderdaad kunnen laten zien dat quarks niet vrij kunnen voorkomen. Een wiskundig bewijs ontbreekt echter nog steeds.

Extra opgave: Uitgaande van het feit dat *alle* quarks (in eenheden van e) een lading $-1/3 (\mathrm{mod}\ 1)$ hebben (bedenk dat het up quark een lading $2/3 = -1/3 + 1$ heeft), bewijs dat heeltallige lading van de baryonen impliceert dat ze bestaan uit clusters van drie quarks (hadronen) en/of een quark en een anti-quark (mesonen).

Intermezzo: Het is mogelijk om de formule voor $\alpha_s(Q^2)$ af te leiden zonder ingewikkelde veldentheorie te gebruiken. Deze berekening vraagt echter net wat meer voorkennis dan wat voor dit college verondersteld kan worden, en ik zal dus voor de liefhebbers volstaan met het geven van een referentie: "Asymtotic freedom as a spin effect", N.K. Nielsen, American Journal of Physics 49 (1981) 1171. **Abstract**: "*It is shown how both the qualitative and the quantitative features of the asymptotic freedom of quantum chromodynamics can be understood in a rather intuitive way. The starting point is the spin of the gluon, which because of the gluon self-coupling makes the vacuum behave like a paramagnetic substance. Combining this result with the Lorentz invariance, we conclude that the vacuum exhibits dielectric antiscreening and hence asymtotic freedom. The calculational techniques are with some minor modifications those of the Landau theory on the diamagnetic properties of a free-electron gas.*" Het tijdschrift is in de bibliotheek aanwezig.

De Q^2 afhankelijkheid van $F_2(x, Q^2)$ zorgt er voor dat er schalingsviolaties zijn. In Fig. 8.4 staan bijv. de resultaten voor F_2^d als functie van Q^2 bij verschillende waarden van x, gebaseerd op muon- en electronverstrooiing. In Fig. 8.5 staat dit nogmaals schematisch weergegeven. De structuurfunctie neemt toe met Q^2 bij kleine x en neemt af bij grote x. Dit betekent dat er voor toenemende waarde van Q^2 minder quarks zijn met een grote impulsfractie binnen het nucleon. Deze schalingsviolaties worden veroorzaakt doordat een quark een gluon uitzendt of absorbeert, of doordat een gluon een $q\bar{q}$ paar of nieuwe gluonen produceert. Er is een gekoppelde integraal-differentiaal vergelijking waardoor quarks en gluonen bepaald worden.

In Fig. 8.7 staat een drie dimensionaal plaatje voor $G(x, Q^2) \equiv xg(x, Q^2)$ en $xq(x, Q^2) \equiv \sum_f x(q_f(x, Q^2) + \bar{q}_f(x, Q^2))$ (hetgeen ruwweg $18F_2/5$ is). Terwijl $q(x, Q^2)$ en $g(x, Q^2)$ de waarschijnlijkheid meten, zijn $xq(x, Q^2)$ en $xg(x, Q^2)$ een maat voor de impuls die de quarks en gluonen krijgen. Bij kleine waarden van x groeit F_2 met Q^2, maar bij kleine Q^2 is de verdeling die van de valentiequarks, omdat de zeequarks afnemen. Voor de gluonen ziet men een toename met Q^2 voor kleine x, maar voor grote waarden van Q^2 nemen ze snel weer af als $x \to 1$. De *verandering* van de distributiefuncties met Q^2 kan berekend worden, maar de x-afhankelijkheid van $F_2(x, Q_0^2)$ kan tot nog toe alleen experimenteel gevonden worden.

9 Deeltjesproductie in e^+e^- Verstrooiing

Tot nog toe hebben we naar verstrooiing in het zogenaamde laboratoriumstelsel gekeken, waarin het target in rust is. Vaak is echter verstrooiing in het zwaartepuntstelsel nodig, zoals bijvoorbeeld bij botsing van twee tegengesteld bewegende bundels van electronen of van protonen. Nog beter is om deeltjesproductie te bestuderen via annihilatie, zoals bij electron-positron of proton-antiproton botsingen. In het zwaartepuntstelsel voor twee deeltjes met 4-impulsen $p_1 = (E_1/c; \vec{p}_1)$ en $p_2 = (E_2/c; \vec{p}_2)$ geldt uiteraard dat $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 \equiv \vec{p}$. Als we vervolgens ons beperken tot die processen waarbij er na de botsing twee (mogelijk nieuwe) deeltjes worden geproduceerd dan geldt eveneens in dit zwaartepuntstelsel dat $\vec{p}_1' = -\vec{p}_2' \equiv \vec{p}'$. In deze situatie heeft men de volgende uitdrukking voor de werkzame doorsnede (zie GEP verg.(6.42))

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\hbar^2 c^2}{64\pi^2} \frac{|\vec{p}'|}{|\vec{p}|} \frac{S\langle|\mathcal{M}|^2\rangle}{(E_1 + E_2)^2}, \tag{67}$$

analoog aan Eq.(44). (Fig. 9.1 geeft een e^+e^- versneller, waar de muonen het verst komen.) Bijna altijd geldt $S = 1$, behalve in het geval dat de uitgaande deeltjes indentiek zijn, waarvoor $S = \frac{1}{2}$. Deze formule geldt ook voor de verstrooiingsprocessen die we eerder in het laboratoriumstelsel hebben bestudeerd met, vanwege de Lorentzinvariantie, *dezelfde* uitdrukkingen voor $\langle|\mathcal{M}|^2\rangle$ in termen van de 4-impulsen (ter herinnering: $\langle\rangle$ staat hier voor de middeling over de ingaande en de sommatie over de uitgaande spin polarisaties), dus met $p_1 = p$, $p_2 = P$, $p_1' = p'$ en $p_2' = P'$. Hier zijn de massas van de twee ingaande deeltjes i.h.a. natuurlijk niet gelijk, terwijl dat bij de annihilatieprocessen wel het geval is.

Opmerkelijk genoeg kunnen we voor $e^+ + e^- \to \mu^+ + \mu^-$ verstrooiing *bijna* dezelfde uitdrukking voor $\langle|\mathcal{M}|^2\rangle$ gebruiken als voor $e^- + \mu^- \to e^- + \mu^-$ (zie Eq.(45) en Eq.(46)),

$$\langle|\mathcal{M}|^2\rangle = \frac{1}{(q^2)^2} 4\pi\alpha L_{\mu\nu}(p_1, -p_2) 4\pi\alpha Z^2 L^{\mu\nu}(p_1', -p_2'). \tag{68}$$

waarbij nu $q = p_1 + p_2 = p_1' + p_2'$ en $p_1 \cdot p_1 = p_2 \cdot p_2 = m_e^2 c^2$, $p_1' \cdot p_1' = p_2' \cdot p_2' = M^2 c^2$, met m_e, resp. M, de massa van het electron en muon (hier is $Z = 1$). Wat opvalt is natuurlijk het minteken voor p_2 en p_2', geassocieerd met de 4-impuls van de antideeltjes. Zoals al eerder opgemerkt, kunnen we antideeltjes interpreteren als deeltjes die terugreizen in de tijd, zie de richting van de pijl voor antideeltjes in de Feynman diagrammen, bijv. op pg. 113 in het boek. Dit minteken voor de 4-impuls zie je ook duidelijk terug in de uitdrukking voor de golffunctie van de antideeltjes, zoals gegeven in Eq.(40)! Voor $\langle|\mathcal{M}|^2\rangle$ vinden we (ga na)

$$\begin{aligned}\langle|\mathcal{M}|^2\rangle &= 8\frac{(4\pi Z\alpha)^2}{(q^2)^2}((p_2\cdot p_2')(p_1\cdot p_1') + (p_2'\cdot p_1)(p_1'\cdot p_2)+ \\ &\qquad m_e^2c^2(p_2'\cdot p_1') + M^2c^2(p_2\cdot p_1) + 2m_e^2M^2c^4), \qquad (69)\end{aligned}$$

ook te verkrijgen door $\{p, p', P, P'\} \rightarrow \{p_1, -p_2, p_1', -p_2'\}$ in Eq.(47) te substitueren.

Merk op dat in het zwaartepuntstelsel $E_1 = E_2 = E_1' = E_2' \equiv E$ en $s = c^2q^2 = 4E^2$. Voor voldoende grote energie, waar massas verwaarloosd kunnen worden, geldt $\langle|\mathcal{M}|^2\rangle = 8(\pi Z\alpha)^2c^4E^{-4}\left((p_2\cdot p_2')(p_1\cdot p_1') + (p_2'\cdot p_1)(p_1'\cdot p_2)\right)$ $(E \gg Mc^2)$. Dit is verder te vereenvoudigen tot $\langle|\mathcal{M}|^2\rangle = 8(\pi Z\alpha)^2c^4E^{-4}\times$ $((E^2/c^2 - \vec{p}\cdot\vec{p}')^2 + (E^2/c^2 + \vec{p}\cdot\vec{p}')^2)$ en tenslotte met $|\vec{p}| = |\vec{p}'| = E/c$ tot een wel heel eenvoudige uitdrukking, $\langle|\mathcal{M}|^2\rangle = 16(\pi Z\alpha)^2(1+\cos^2\theta)$. Samen met Eq.(67) geeft dit dus precies EqPN.(9.4) van het boek,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4s}(\hbar c)^2(1+\cos^2\theta) \qquad \text{EqPN.(9.4)}$$

(voor de uitdrukking bij willekeurige energie, waarbij we de massas niet kunnen verwaarlozen, zie GEP §8.2). Dit integreren over de hoeken geeft

$$\sigma = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}(\hbar c)^2, \qquad \text{EqPN.(9.5)}$$

ofwel $\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = 21.7/(E^2/\mathrm{GeV}^2)$ nbarn.

Het muon weegt 105.7 MeV en heeft een levensduur van $\tau_\mu = 2\mu s = 2\times 10^{-6}s$ (alleen het neutron leeft langer). De massas hebben we in bovenstaande vergelijking verwaarloosd, en het zelfde resultaat is geldig voor $\tau^+\tau^-$, al moet hier de energie nog groter zijn om $m_\tau = 1.777$ GeV te verwaarlozen. Het τ-lepton werd voor het eerst ontdekt in de SPEAR e^+e^- versneller in SLAC (zie Fig. 9.2). De levensduur van het τ-lepton is veel kleiner, $\tau_\tau = 3\times 10^{-13}s$. We spreken van lepton universaliteit, m.a.w. de electronen, muonen en taus gedragen zich identiek (zolang de massa maar kan worden verwaarloosd, zie Fig. 9.3).

We zien dus hoe flexibel $L_{\mu\nu}(p,p')$ ingezet kan worden voor de berekening van werkzame doorsnedes. Niet alle verstrooiingsprocessen kunnen aldus berekend worden. Een belangrijke uitzondering is het geval van verstrooiing voor identieke deeltjes, zoals electron-positron ($e^-+e^+\to e^-+e^+$, Bhabha) of electron-electron ($e^-+e^-\to e^-+e^-$, Møller) verstrooiing, waarbij $\mathcal{M}$ bepaald is door de som van twee diagrammen (zie onderaan pg. 116 van het boek). De kruistermen kunnen niet langer gevormd worden met behulp van $L_{\mu\nu}(p,p')$. Vooral bij de electron-electron verstrooiing is dit effect dramatisch, omdat het aantoont dat verwisseling van twee electronen (zeg de uitgaande electronen) aanleiding geeft tot een minteken in de amplitude, in tegenstelling tot een plusteken bij verwisseling van twee identieke deeltjes met heeltallige spin.

Kruistermen komen natuurlijk veel vaker voor, zoals bij de berekening van hogere orde correcties, of doordat naast het foton bij annihilatieprocessen ook het Z^0 deeltje kan worden uitgewisseld, zoals aangegeven op pg. 113. Echter, omdat het Z^0 deeltje zwaar is, zal bij lage energie deze bijdrage te verwaarlozen zijn. Als een neutrino-antineutrino paar wordt geproduceerd kan echter geen foton uitgewisseld worden en moeten we in $\mathcal{M}$ de $-1/q^2=-c^2/s=-c^2/(2E)^2$ t.g.v. de uitwisseling van foton vervangen door $1/(M_{Z^0}^2c^2-q^2)=c^2/(M_{Z^0}^2c^4-s)=c^2/(M_{Z^0}^2c^4-4E^2)$. De koppeling van het Z^0 deeltje aan electronen en neutrinos wordt in goede benadering[7] gegeven door resp. $e/\sqrt{3}$ en $e\sqrt{2/3}$ in vergelijking met een koppeling e van het foton aan het electron. De totale werkzame doorsnede voor $e^++e^-\to\nu+\bar{\nu}$ verstrooiing is daarom in laagste orde

$$\sigma\approx\frac{8\pi\alpha^2}{27s}\frac{(\hbar c)^2s^2}{(M_{Z^0}^2c^4-s)^2},\tag{70}$$

hetgeen vergeleken moet worden met EqPN.(9.5) in het boek. Vooruitlopend op wat later in meer detail zal worden besproken, zien we dat bij *lage energie* de zwakke wisselwerking niet zo zeer zwak is vanwege een kleine koppeling, maar vanwege de grote massa van het Z^0 deeltje (91.2 GeV/c^2). Als de energie veel groter is dan de rustenergie van het Z^0 deeltje worden de zwakke en elektromagnetische krachten vergelijkbaar in sterkte.

[7]De koppelingen worden gegeven in hoofdstuk 11 van het boek. Hier gebruiken we $\sin^2\theta_W\approx 0.25$ als benadering voor de gemeten waarde, $\sin^2\theta_W=0.23$.

We zien verder dat de werkzame doorsnede dreigt te divergeren voor $\sqrt{s} = M_{Z^0}c^2$. Dit is waar de resonante productie van Z^0 deeltjes plaats zal vinden. Doordat deeltjes die geproduceerd kunnen worden (bijv. in electron-positron botsingen), omgekeerd ook uiteen kunnen vallen (in bijv. electron-positron paren) en dus instabiel zijn, wordt de singulariteit altijd vermeden doordat in de buurt van een resonantie de vervalsbreedte Γ meegenomen moet worden,

$$\sigma \approx \frac{8\pi\alpha^2}{27s}\frac{(\hbar c)^2 s^2}{(M_{Z^0}^2 c^4 - s)^2 + M_{Z^0}^2 c^4 \Gamma^2}. \tag{71}$$

We kunnen dit resultaat vergelijken met de Breit-Wigner formule in §9.2 van het boek, welke geldig is in de buurt van een resonantie, dus voor dit specifieke geval

$$\sigma \approx \frac{3\pi\hbar^2}{4|\vec{p}|^2}\frac{\Gamma_e\Gamma_\nu}{(M_{Z^0}c^2 - E_{tot})^2 + \Gamma^2/4}. \tag{72}$$

Merk op dat we voor E in EqPN.(9.7) (J, s_a en s_b geven de spin) en (9.8) (Γ_i en Γ_f geven de partiele breedte),

$$\begin{aligned} \sigma(E) &= \frac{\pi\lambda\!\!\!^{-2}(2J+1)}{(2s_a+1)(2s_b+1)}\frac{\Gamma^2}{(E-E_0)^2+\Gamma^2/4}, && \text{EqPN.(9.7)} \\ \sigma_f(E) &= \frac{3\pi\lambda\!\!\!^{-2}}{4}\frac{\Gamma_i\Gamma_f}{(E-E_0)^2+\Gamma_{\text{tot}}^2/4}, && \text{EqPN.(9.8)} \end{aligned}$$

de totale energie moeten gebruiken, $E_{tot} = 2E_{bundel} = \sqrt{s}$, dat de gereduceerde golflengte $\hbar/|\vec{p}| = \lambda\!\!\!^{-}$ voor de relativistische electronenergie $E \approx \frac{1}{2}M_{Z^0}c^2 \gg m_e c^2$ gegeven wordt door $\hbar c/E_{bundel} = 2\hbar c/\sqrt{s}$, en dat uiteraard $E_0 = M_{Z^0}c^2$. Dit geeft dus voor de Breit-Wigner formule

$$\sigma \approx \frac{3\pi(\hbar c)^2\Gamma_e\Gamma_\nu/s}{(M_{Z^0}c^2 - \sqrt{s})^2 + \Gamma^2/4} = \frac{3\pi(\hbar c)^2(M_{Z^0}c^2 + \sqrt{s})^2\Gamma_e\Gamma_\nu/s}{(M_{Z^0}^2c^4 - s)^2 + (M_{Z^0}c^2 + \sqrt{s})^2\Gamma^2/4}. \tag{73}$$

In de buurt van de resonantie, waar $s \approx M_{Z^0}^2 c^4$, is dit dus ook te schrijven als

$$\sigma \approx 12\pi(\hbar c)^2\frac{\Gamma_e\Gamma_\nu}{(M_{Z^0}^2c^4 - s)^2 + M_{Z^0}^2c^4\Gamma^2} \approx \frac{12\pi\Gamma_e\Gamma_\nu}{sM_{Z^0}^2c^4}\frac{(\hbar c)^2 s^2}{(M_{Z^0}^2c^4 - s)^2 + M_{Z^0}^2c^4\Gamma^2}. \tag{74}$$

De eerste identiteit geven we omdat dit precies EqPN.(11.9) in het boek is. Uit de tweede identiteit lezen we, na vergelijking met Eq.(71), af dat

$\Gamma_e\Gamma_\nu \approx 2\alpha^2 M_{Z^0}^2 c^4/81$. Omdat, t.o.v. het electron, de koppeling van het neutrino aan het Z^0 deeltje (in benadering) een factor $\sqrt{2}$ groter is, geldt dat[8]

$$\Gamma_e \approx \tfrac{1}{2}\Gamma_\nu, \qquad \Gamma_\nu \approx \frac{2\alpha}{9} M_{Z^0} c^2. \tag{75}$$

Tot slot is het nog nuttig om iets meer te zeggen over de Breit-Wigner formule. Deze kan op een mooie manier afgeleid worden uit algemene principes, op basis van behoud van waarschijnlijkheid (de unitariteit van de verstrooiingsmatrix), hetgeen verklaart waarom de resonante bijdrage aan de werkzame doorsnede altijd uitgedrukt kan worden in termen van de totale vervalsbreedte en die voor het ingaande en uitgaande kanaal, $\Gamma_{i,f}$ (zie EqPN.(9.8)). Als in het boek, kunnen we er hier niet veel verder op ingaan, maar de spinafhankelijkheid is wel eenvoudig te verklaren (zie EqPN.(9.7)). Een vervalsbreedte Γ beschrijft het proces van een deeltje met spin J dat vervalt in twee deeltjes met spin s_a en s_b. Zoals altijd moeten we daarbij sommeren over de uitgaande spins (s_a en s_b) en middelen over de ingaande spin (J). Echter, bij de vorming van de resonantie loopt het proces in omgekeerde richting. Wat betreft de bijdrage van Γ_i moeten we dan eigenlijk sommeren over de spin van de resonantie en middelen over de spins van de ingaande deeltjes; $(2J+1)/((2s_a+1)(2s_b+1))$ geeft precies de noodzakelijke correctie.

In Fig. 9.4 wordt getoond hoe de resonanties aanleiding geven tot pieken in de e^+e^--verstrooiing, boven op de $1/s$ bijdrage van de muonen (de onderbroken lijn) en de taus (EqPN.(9.5)). Ze hebben een vaste massa, hoekmomentum en andere quantumgetallen. Voor lage massas is de breedte Γ tussen 4 en 150 MeV, corresponderende met een levensduur van 10^{-22} tot 10^{-24} s. Het zijn mesonen die bestaan uit een quark-aniquark systeem dat uit een foton ontstaat en dus $J = 1$ en negatieve pariteit heeft. Ze worden dan ook vectormesonen genoemd en vervallen in lichtere mesonen. De eeste twee resonanties zijn ρ^0 ($m_{\rho^0} = 770$ MeV/c^2) en ω ($m_\omega = 782$ MeV/c^2) mesonen, welke geproduceerd worden door $u\bar{u}$ en $d\bar{d}$. Ze vervallen in verschillende toestanden, $\rho^0 \to \pi^+\pi^-$ en $\omega \to \pi^+\pi^0\pi^-$, omdat ze verschillende G pariteit hebben ($I^G(J^{PC}) = 1^-(0^-)\ \pi^\pm$, $1^-(0^{-+})\ \pi^0$, $1^+(1^{--})\ \rho^0$ en $0^-(1^{--})\ \omega$).

De ϕ-resonantie heeft een massa van 1019 MeV/c^2 en een vervalsbreedte $\Gamma = 4.4$ MeV, die voor 85% vervalt in kaonen, $\phi \to K^+ + K^-$ en $\phi \to K^0 + \bar{K}^0$.

[8] In §11.2 van het boek wordt gegeven dat $\Gamma_\nu = \alpha M_{Z^0} c^2/(6\sin^2(2\theta_W))$ (gebruik EqPN.(11.17-22)). Met $\sin^2\theta_W \approx 1/4$ volgt inderdaad het resultaat voor Γ_ν in Eq.(75).

Kaonen hebben een s-quark en zijn dus deeltjes met *strangeness*. Ze worden gevormd door $|K^+\rangle = |u\bar{s}\rangle$, $|K^-\rangle = |\bar{u}s\rangle$, $|K^0\rangle = |d\bar{s}\rangle$ en $|\bar{K}^0\rangle = |\bar{d}s\rangle$, waar het s-quark ongeveer 450 MeV/c^2 aan de massa bijdraagt (de naakte massa is ongeveer 60 tot 170 MeV/c^2), $m_{K^\pm} = 494$ MeV/c^2 en $m_{K^0} = 498$ MeV/c^2. Het quantumgetal S drukt de strangeness uit, welke behouden is onder sterke wisselwerking. Het kleine verschil in massa tussen m_ϕ en $2m_K$ verklaart de lange levensduur van ϕ.

Op pg. 121 wordt de Zweig rule uitgelegd aan de hand van het verval van het ϕ deeltje. Voor het verval in pionen (2.5%) zijn er géén quarklijnen die de in- en uitgaande toestanden verbinden en is meervoudige gluon uitwisseling nodig, in tegenstelling tot het verval in kaonen, waar slechts één gluon uitgewisseld hoeft te worden. Voor het verval in kaonen is dit gluon niet getekend in de figuur boven aan pg. 121 en voor het verval in pionen zijn de drie gluonen niet geheel juist weergegeven in de figuur onderaan die pagina. Het uitgangspunt is dat de nodige quark-antiquark paren gevormd worden door gluonen. Bij het verval in kaonen beginnen we bijvoorbeeld met een groen s quark, dat overgaat door gluon emissie in een rood s quark. Dit $g\bar{r}$ gluon vormt dan een groen up quark en een anti-rood up anti-quark paar. Het K^- bestaat zo uit een rood s quark en een anti-rood up anti-quark, terwijl het K^+ wordt gevormd door het groene up quark en het anti-groene s anti-quark (dat dus niet van kleur verandert). Bij het verval in pionen vormt uiteraard ieder van de drie gluonen een van de drie quarkparen, dus twee van de gluonen zijn in het boek niet goed weergegeven[9].

Het deeltje J/ψ, met een vervalsbreedte van $\Gamma = 87$ keV en een massa van 3087 MeV/c^2, vormde een verrassing. Omdat dit bestond uit een $c\bar{c}$ systeem, weliswaar door theoreten voorspeld, was het extra stabiel door dat het niet uit een kon vallen in een (later ontdekte) $D^+ + D^-$ (doordat deze D-mesonen te zwaar zijn ($c\bar{u}$, $c\bar{d}$, etc.)). Men vond ook ψ', ψ'', etc. als geexciteerde toestanden van de J/ψ. (Een lichtere vorm, η_c, koppelt niet rechtstreeks aan het foton. Het heeft 0^- en kan niet worden waargenomen met e^+e^- verstrooiing.) Voor $b\bar{b}$ geldt iets vergelijkbaars, met $m_\Upsilon = 9.46$ GeV/c^2 het lichtste exemplaar, met een vervalsbreedte van $\Gamma = 52$ keV. De naakte (of "current") en de "constituent" quarkmassa voor de c- en b-quarks wijken

[9]Bij verval in $\rho^+ + \pi^-$ via de uitwisseling van drie gluonen is één van de gluonlijnen niet goed getekend.

niet al te veel van elkaar af (1100-1400 MeV/c^2 en 4100-4400 MeV/c^2). Het t-quark werd gevonden op Fermilab (1994), en wordt momenteel geschat op 174.2 ± 4.6 GeV/c^2. De top is te instabiel om een gebonden toestand te geven. Tenslotte is er de Z^0-resonantie met een massa van 91.2 GeV/c^2 en een vervalsbreedte van $\Gamma = 2.49$ GeV, welke vervalt in lepton- en quarkparen.

Voor de vorming van hadronen moet men de werkzame doorsnede aanpassen aan de kleuren en ladingen, $\sigma(e^+e^- \to q_f\bar{q}_f) = 3z_f^2\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)$, zodat de verhouding van de werkzame doorsnede wordt

$$R := \frac{\sigma(e^+e^- \to \text{hadronen})}{\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)} = \frac{\sum_f \sigma(e^+e^- \to q_f\bar{q}_f)}{\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)} = 3\sum_f z_f^2.$$

Hier doen natuurlijk alleen de quarks mee waarvoor de energie groot genoeg is. In Fig. 9.5 is dit weergegeven, met elke keer een verhoging als er weer een quark meedoet,

$$R = 3\sum_f z_f^2 = 3\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{-1}{3}\right)^2 + \left(\frac{-1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{-1}{3}\right)^2\right].$$

De quarkmassa (t/m b) neemt toe en voor uds geldt $R = 2$, c geeft $R = 10/3$ en b, tenslotte, geeft $R = 11/3$. Dit levert ook een ondubbelzinnig bewijs dat er drie kleuren zijn.

Tensotte volgt het bestaan van de gluonen uit enerzijds F_2, waar men vond dat er neutrale deeltjes zijn, die ook geen zwakke wisselwerking hebben en die ongeveer de helft bijdroeg aan de integraal. Anderzijds heeft men de gluonen meer rechtstreeks waargenomen als jets in PETRA (DESY). Deze derde jets werden geproduceerd door een gluon (harde foton zijn relatief onderdrukt, omdat de koppelingsconstante α kleiner is). Zie Fig. 9.6 voor e^+e^- verstrooiing met twee en drie jets (men kan hieruit destileren welke er van het gluon komt).

Extra opgaven: i) Gebruik de lepton universaliteit (§9.1) om te laten zien dat de Z^0-resonante bijdrage aan de werkzame doorsnede voor $e^+ + e^- \to \mu^+ + \mu^-$ ongeveer de helft is van die voor $e^+ + e^- \to \nu + \bar{\nu}$.
ii) Bij het verval van het ϕ deeltje in twee kaonen kan men het gluon ook laten uitwisselen door het s anti-quark. Teken hiervoor zelf een van de mogelijke processen onder vermelding van de kleuren. Werk ook voor het verval in pionen een voorbeeld uit waarin alle kleuren en de gluonen correct zijn weergegeven.

10 Fenomenologie van Zwakke Interacties

Zwakke wisselwerking heeft geen gebonden toestanden, in tegenstelling tot alle andere krachten (inclusief gravitatie)! Maar anderzijds is de zwakke wisselwerking verantwoordelijk voor het verval van quarks en leptonen. Ze zijn moeilijk te meten en vooral de neutrinos, die alleen de zwakke kracht voelen, hebben een uitermate kleine werkzame doorsnede. De eerste beschrijving was in de vorm van Fermi's β-verval, wat voor lage energie nog steeds een goede benadering is.

Voor de geladen leptonen hebben we drie families, e^-, μ^- en τ^-. De antideeltjes hebben dezelfde massa en tegengestelde lading (e^+, μ^+ en τ^+). Het electron en muon zijn de lichtste geladen deeltjes. Ladingsbehoud geeft dan dat het electron stabiel is en dat een muon vervalt in een electron, $\mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$. Soms komt een extra foton vrij, of een e^+e^- paar, maar $\mu^- \not\to e^- + \gamma$ is niet waargenomen, en het muon is dus geen gebonden toestand van het electron. Het τ-lepton is veel zwaarder en naast het verval $\tau^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\tau$, komt ook voor $\tau^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu + \nu_\tau$ en (voor meer dan de helft) $\tau^- \to \pi^- + \nu_\tau$.

De neutrinos zijn niet waar te nemen, en kunnen alleen gezien worden door ontbrekende energie en impuls. Bijv. het antineutrino dat vrij komt bij verval van een neutron, $n \to p + e^- + \bar{\nu}_e$, reageert weer met een proton, $p + \bar{\nu}_e \to n + e^+$, maar de reaktie $n + \bar{\nu}_e \not\to p + e^-$ komt niet voor. Ook het verval van $\pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ en $\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$ komen voor, maar vervallen bijna niet in een electron en electron-neutrino, $\pi^- \to e^- + \bar{\nu}_e$ en $\pi^+ \to e^+ + \nu_e$. Met de τ ziet men iets vergelijkbaars. We hebben dus ook 3 families voor de neutrinos. Het verval van $\pi^\pm$ laat ook zien dat $\bar{\nu}_\mu$ verschillend is van ν_μ: Een Majorama fermion, die zijn eigen antideeltje is, wordt uitgesloten.

Als alle neutrinos massaloos waren, dan hadden we geen oscillaties gehad. Oscillaties bewijzen dat in ieder geval twee van de drie neutrinos een massa hebben. De gemeten flux van neutrinos van de zon is ongeveer de helft van wat het had moeten zijn als er geen oscillaties waren. Men heeft dit in 2001 nogmaals bevestigd door de flux te meten ten gevolge van neutrinos die gevormd worden door Z^0, onafhankelijk van het type.

De Sudbury Neutrino Observatory in Canada is 1 kton aan zwaar water op 2 km diepte, uitgerust met Cherenkov detectoren. De volgende drie reacties zijn gemeten, $\nu_e + d \to p + p + e^-$, $\nu_x + d \to p + n + \nu_x$ en $\nu_x + e \to e + \nu_x$, waarbij in de laatste twee (resp. "Neutral Current" en "Elastic Scattering") het niet uitmaakt welk neutrino men neemt, $\nu_x = \nu_e$, ν_μ of ν_τ. Uit de metingen volgde ook dat de flux ongeveer drie maal zo hoog was dan als men alleen ν_e gemeten had.

De super-Kamiokande in Japan, met 50 kton water op 1 km diepte (2.7 km water equivalent), heeft ook gevonden dat de neutrinos geproduceerd in $\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$ en $\mu^+ \to \bar{\nu}_\mu + e^+ + \nu_e$ oscilleren. Deze reakties vinden in de atmosfeer plaats. De hoekafhankelijkheid voor de muonen geeft de oscillatielengte. (Het electron-neutrino ondervindt op deze afstanden geen oscillaties.) Met een verhouding die begint bij $[n(\nu_\mu)+n(\bar{\nu}_\mu)]/[n(\nu_e)+n(\bar{\nu}_e)] = 2$ (tot aan 1 GeV) zien we dat ν_μ afneemt voor toenemende afstand. Deze verandert in een derde neutrino (dit is vrijwel zeker ν_τ, maar wordt strikt gesproken niet waargenomen).

Het leptongetal is een behouden grootheid, $L = L_e + L_\mu + L_\tau$, waar $L_\ell = N(\ell) - N(\bar{\ell}) + N(\nu_\ell) - N(\bar{\nu}_\ell)$. Door de oscillaties kan men niet meer spreken van een leptongetal voor iedere familie. Zo zijn toegestaan $p + \mu^- \to \nu_\mu + n$, $e^+ + e^- \to \nu_\mu + \bar{\nu}_\mu$, $\pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu$, $\mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$ en $\tau^- \to \pi^- + \nu_\tau$. Verboden zijn $p + \mu^- \not\to \pi^0 + n$, $e^+ + e^- \not\to \nu_e + \nu_\mu$, $\pi^- \not\to e^- + \nu_e$, $\mu^- \not\to e^- + \bar{\nu}_\mu + \nu_e$ en $\tau^- \not\to \pi^- + \nu_e$. Hier noemen we een tweetal experimentele bovengrenzen als voorbeeld, $\Gamma(\mu^\pm \to e^\pm\gamma)/\Gamma(\mu^\pm \to \text{all channels}) < 5 \times 10^{-11}$ en $\Gamma(\mu^\pm \to e^\pm e^+ e^-)/\Gamma(\mu^\pm \to \text{all channels}) < 1 \times 10^{-12}$.

Voor een lange tijd waren alleen "charged current" interacties (die door $W^\pm$ worden uitgewisseld) bekend. Een lepton en anti-neutrino of een quark en anti-quark waren op deze wijze gekoppeld, bijv. in $\mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$ of $n \to p + e^- + \bar{\nu}_e$. Fig. 10.1 geeft de mogelijkheden weer voor W^- verstrooiing in een lepton en anti-neutrino door een ander lepton en anti-neutrino (een leptonisch proces) of een quark en anti-quark (een semi-leptonisch proces), of men heeft een niet-leptonisch proces waarbij een quark en anti-quark verstrooid aan een andere quark en anti-quark door uitwisseling van $W^\pm$. De semi-leptonische processen beschrijft men in termen van hadronen. Behalve $n \to p + e^- + \bar{\nu}_e$, heeft men ook $\pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ en $K^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu$, hetgeen we naar de quarks vertalen als $d \to u + e^- + \bar{\nu}_e$ (twee quarks veranderen niet), $d + \bar{u} \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ en $s + \bar{u} \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu$. Voor de niet-leptonische processen hebben we bijv. $\Lambda^0(= |uds\rangle)$ dat vervalt in $p + \pi^-$ of $n + \pi^0$, en K^+ dat vervalt in $\pi^0 + \pi^+$ (zie de figuur op pg. 134). Tegenwoordige zijn ook "neutral current" interacties bekend, die uitgewisseld worden door Z^0. De $W^\pm$ (80 GeV/c^2) en Z^0 (92 GeV/c^2) hebben spin 1.

De zwakke interactie kunnen we benaderen door alleen de fermionen mee te nemen, in bijv. het verval van $\mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$ of $\mu^+ \to e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$. Voor lage impuls geldt namelijk $\mathcal{M}_{fi} \propto g^2/(Q^2c^2 + M_W^2c^4) \to g^2/(M_W^2c^4)$. De Fermi constante G_F is dan

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2(\hbar c)^3}{8\epsilon_0 M_W^2 c^4} = \frac{\pi\alpha}{2}\frac{g^2}{e^2}\frac{(\hbar c)^3}{M_W^2 c^4}, \qquad \text{EqPN.(10.4)}$$

zo genormaliseerd dat $G_F/(\hbar c)^3$ de dimensie [1/energie^2] heeft. Dit was nog voordat Fermi het bestaan van een vectorboson had aangenomen. We kunnen hiermee de levensduur van het muon uitrekenen door de Golden Rule te gebruiken en in de Diracvergelijking de faseruimte mee te nemen voor de drie uitgaande fermionen,

$$\Gamma_\mu = \frac{\hbar}{\tau_\mu} = \frac{G_F^2(m_\mu c^2)^5}{192\pi^3(\hbar c)^6}(1+\varepsilon),$$

waar ε corrigeert voor de eindige massa van het electron en andere effecten. De massa en levensduur van het muon zijn nauwkeurig bekend. We hebben $m_\mu = 105.658389 \pm 0.000034$ MeV/c^2 en $\tau_\mu = (2.197035 \pm 0.000040) \times 10^{-6}$ s en de Fermi constante is $G_F/(\hbar c)^3 = (1.16639 \pm 0.00001) \times 10^{-5}$ GeV^{-2}.

Neutrino en electron verstrooiing vindt alleen plaats door de zwakke wisselwerking. Als we het beperken tot bijv. $\nu_\mu + e^- \to \mu^- + \nu_e$, dan komt het alleen van de uitwisseling van een W-boson. De werkzame doorsnede is voor lage energie gelijk aan

$$\sigma = \frac{G_F^2}{\pi(\hbar c)^4}s, \qquad \text{EqPN.(10.8)}$$

maar men moet in dat geval de muonmassa ook verwaarlozen. Als we het electron in rust veronderstellen, dan geldt $s = 2m_e c^2 E_\nu$. Met de bovenstaande waarde voor G_F ingevuld krijgen we $\sigma_{\rm lab} = 1.7 \times 10^{-41}cm^2 E_\nu$/GeV, wat een ongelofelijk kleine werkzame doorsnede is. Bijv. als we de electrondichtheid in ijzer nemen, $n_e = Z\rho N_A/A \approx 2.2 \times 10^{24}$cm^{-3}, dan nog is voor neutrinos van 1 MeV (die in de zon gemaakt worden) de vrije weglengte gelijk aan $L = (n_e\sigma)^{-1} = 2.6 \times 10^{17}$m, wat ongeveer 30 lichtjaren is!

We zullen nu de werkzame doorsnede afleiden, inclusief de uitwisseling van het W-deeltje. Voor dit proces geldt dat (met $\alpha_W \equiv g^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c) = \alpha g^2/e^2$)

$$\langle|\mathcal{M}|^2\rangle = 2\frac{(4\pi\alpha_W)^2}{(q^2 - M_W^2c^2)^2}(p_{\nu_\mu}\cdot p_{e^-})(p_{\nu_e}\cdot p_{\mu^-}), \quad q = p_{e^-} - p_{\nu_e} = p_{\nu_\mu} - p_{\mu^-} \qquad (76)$$

(zie bijv. GEP §10.1). Aangezien verondersteld wordt dat $-q^2 = Q^2 \gg m_\mu^2 c^2$, kunnen we gebruiken dat (ga na) $p_{\nu_\mu} = (E/c; \vec{p}) = (|\vec{p}|; \vec{p})$, $p_{e^-} = (E/c; -\vec{p})$, $p_{\nu_e} = (E/c; \vec{p}\,')$, $p_{\mu^-} = (E/c; -\vec{p}\,')$ en dus $q^2 = -(\vec{p}-\vec{p}\,')^2 = -2(1-\cos\theta)E^2/c^2$. In het zwaartepuntstelsel volgt met Eq.(67) dat

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\hbar^2 c^2 \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle}{64\pi^2 s} = \frac{(4\pi\alpha_W \hbar c)^2 s}{128\pi^2 (M_W^2 c^4 + \frac{1}{2}(1-\cos\theta)s)^2} \tag{77}$$

(ga na[10]). De totale werkzame doorsnede wordt nu gevonden door te integreren over de ruimtehoek,

$$\sigma = \int_0^\pi d\theta \, \sin\theta \frac{(4\pi\alpha_W \hbar c)^2 s}{64\pi (M_W^2 c^4 + \frac{1}{2}(1-\cos\theta)s)^2} = \frac{2(4\pi\alpha_W \hbar c)^2 s}{64\pi M_W^2 c^4 (M_W^2 c^4 + s)}. \tag{78}$$

Gebruiken we tenslotte de definitie van G_F, dan vinden we inderdaad het resultaat

$$\sigma = \frac{G_F^2}{\pi(\hbar c)^4} \frac{M_W^2 c^4}{s + M_W^2 c^4} s, \qquad \text{EqPN.(10.11)}$$

geldig zolang $s \gg m_\mu^2 c^4$. De werkzame doorsnede neemt niet toe met s, maar gaat naar een constante.

In het boek wordt in EqPN.(10.8) de lage energie benadering voor EqPN.(10.11) gegeven. De afleiding was gebaseerd op dimensie overwegingen. Echter, bij lage energie zou je verwachten dat de massas van het electron en muon voor correcties zorgen (er geldt niet langer dat $E = |\vec{p}|c$). Het in EqPN.(10.8) gegeven resultaat is daarom alleen geldig als voldaan is aan $m_\mu \ll \sqrt{s}/c^2 \ll M_W$. In de extra opgave moet je laten zien dat

$$\sigma = \frac{G_F^2}{\pi(\hbar c)^4} s \cdot \left(1 - \frac{m_\mu^2 c^4}{s}\right)^2, \qquad m_e^2 c^4 \ll s \ll M_W^2 c^4, \tag{79}$$

in de limiet waar *niet* de muon massa (maar *wel* de electron massa) wordt verwaarloosd. Met andere woorden, dat EqPN.(10.8) met de correctiefactor $(1 - m_\mu^2 c^4/s)^2$ vermenigvuldigd moet worden.

Extra opgave: Waarom geldt bij lage energie dat Eq.(76) over gaat in $\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = 2\frac{(4\pi\alpha_W)^2}{M_W^4 c^4}(p_{\nu_\mu} \cdot p_{e^-})(p_{\nu_e} \cdot p_{\mu^-})$. Als we de massas van het electron en

[10]Bedenk dat uit $|\vec{p}| = |\vec{p}\,'| \gg m_\mu$ volgt dat $p_{\nu_\mu} \cdot p_{e^-} = p_{\nu_e} \cdot p_{\mu^-} = E^2/c^2 + \vec{p}^2 = 2E^2/c^2 = \frac{1}{2}s/c^2$.

de neutrinos verwaarlozen geldt als eerder $p_{\nu_\mu} \cdot p_{e^-} = 2E^2/c^2 = \frac{1}{2}s/c^2$, maar dit is niet langer gelijk aan $p_{\nu_e} \cdot p_{\mu^-}$. Laat eerst zien dat $\vec{p}\,' = \vec{p}_{\mu^-} = -\vec{p}_{\nu_e}$ en $|\vec{p}\,'| = E_{\nu_e}/c$, terwijl $E_\mu^2 = E_{\nu_e}^2 + m_\mu^2 c^4$. Waarom geldt $E_{\nu_e} + E_\mu = |\vec{p}_{\nu_\mu}|c + |\vec{p}_{e^-}|c = 2|\vec{p}|c = 2E$. Laat hiermee nu zien dat $p_{\nu_e} \cdot p_{\mu^-} = 2EE_{\nu_e}/c^2$ en dat $E_{\nu_e} = E(1-(\frac{1}{2}m_\mu c^2/E)^2) = E(1-m_\mu^2 c^4/s)$. Gebruik tenslotte Eq.(67) om het resultaat uit Eq.(79) te vinden.

De "neutral currents" wordt veroorzaakt door Z^0, zoals $\nu_\mu + e^- \to \nu_\mu + e^-$. Dit kan niet door een andere interactie worden gegeven en was het bewijs dat Z^0 bestond (1973 op CERN), ruim voor dat hij werd aangetoond.

De zwakke koppelingsconstante is dus gelijk voor alle quarks en leptonen. Alle vervalskanalen dragen dezelfde bijdrage, op een faseruimte correctie voor de massas na. Als voorbeeld nemen we $\tau^- \to \nu_\tau + \bar{\nu}_e + e^-$, $\tau^- \to \nu_\tau + \bar{\nu}_\mu + \mu^-$ en $\tau^- \to \nu_\tau + \bar{u} + d$ als de belangrijkste kanalen die openstaan voor verval, maar het is verstandig ook $\tau^- \to \nu_\tau + \bar{u} + s$ mee te nemen. Men heeft $\Gamma_{\tau e} \approx \Gamma_{\tau\mu}$ en $\Gamma_{\tau d\bar{u}} + \Gamma_{\tau s\bar{u}} \approx 3\Gamma_{\tau\mu}$ (de eerste is evenredig met $\cos^2\theta_C \approx 0.96$ en de tweede met $\sin^2\theta_C$, wat weliswaar klein is maar wel precies optelt tot 1). De factor 3 komt van de kleuren $(r\bar{r}, b\bar{b}, g\bar{g})$. Derhalve geldt $\tau_\tau = \hbar/(\Gamma_{\tau e} + \Gamma_{\tau\mu} + \Gamma_{\tau d\bar{u}} + \Gamma_{\tau s\bar{u}}) \approx \hbar/(5\Gamma_{\tau e}) \approx \frac{1}{5}\tau_\mu(m_\mu/m_\tau)^5 \approx 3.1 \times 10^{-13}$s, wat aardig klopt met wat is waargenomen, $\tau_\tau^{\exp} = (2.900 \pm 0.012) \times 10^{-13}$s. Dat is wederom een bewijs dat er drie kleuren zijn en dat de zwakke wisselwerking universeel is.

Echter, Cabibbo en Cabibbo-Kobayashi-Maskawa hoeken gooien roet in het eten (bijv. Λ^0, waarbij een s-quark getransformeerd wordt in een u-quark, en derhalve het verval geeft in $p+\pi^-$. Dit geeft $\sin\theta_C\cos\theta_C \approx 0.2$). Ze meten hoe de quarks afwijken van een diagonale koppeling, $|d'\rangle = \cos\theta_C|d\rangle + \sin\theta_C|s\rangle$ en $|s'\rangle = \cos\theta_C|s\rangle - \sin\theta_C|d\rangle$. Of de $|u\rangle$ en $|c\rangle$ ook gedraaid kunnen worden is niet relevant, want men kan het terugbrengen naar alleen een draaiing in $|d\rangle$ en $|s\rangle$. De hoek θ_C wordt gegeven door $\sin\theta_C \approx 0.22$ en $\cos\theta_C \approx 0.98$, met $\cot^2\theta_C \approx 20$. Uitbreiden naar de zes quarks geeft een unitaire 3×3 matrix (de CKM matrix)

$$\begin{pmatrix} |d'\rangle \\ |s'\rangle \\ |b'\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |d\rangle \\ |s\rangle \\ |b\rangle \end{pmatrix}$$

met 4 onbekende, drie hoeken en een imaginaire fase welke verantwoordelijk is voor CP violatie. Hij is bijna diagonaal, maar de verschillen zijn belangrijk. De waarde van V_{cb} en V_{ts} zijn bijna een orde kleiner dan V_{us} en V_{cd}. De verandering van de derde naar de tweede generatie ($t \to s, b \to c$) zijn dus onderdrukt ten opzichte van de verandering van de tweede naar de eerste generatie. Het effect is nog sterker voor de verandering van de derde naar de eerste generatie. De verandering van $b \to u$ werd gevonden in semi-leptonisch verval van B mesonen. (De "neutral currents" die de quarks van smaak veranderen, zoals $c \to u$, zijn tot nu toe niet waargenomen en worden nul verondersteld.)

Voor de neutrinos wordt het nu duidelijk dat we ook een leptonische mixing matrix hebben die $|\nu_e\rangle$, $|\nu_\mu\rangle$ en $|\nu_\tau\rangle$ mengen,

$$\begin{pmatrix} |\nu_e\rangle \\ |\nu_\mu\rangle \\ |\nu_\tau\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu 1} & U_{\mu 2} & U_{\mu 3} \\ U_{\tau 1} & U_{\tau 2} & U_{\tau 3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\nu_1\rangle \\ |\nu_2\rangle \\ |\nu_3\rangle \end{pmatrix}.$$

(In het boek stond op pg.141 voor $|\nu_1\rangle$ per ongeluk $|\mu_1\rangle$, maar dat is inmiddels al verbeterd.) De tijdsafhankelijke golffunctie is voor het electron-neutrino bijv. gegeven door $|\nu_e(t)\rangle = U_{e1}e^{-iE_{\nu_1}t/\hbar}|\nu_1\rangle + U_{e2}e^{-iE_{\nu_2}t/\hbar}|\nu_2\rangle$. Neutrinos zijn relativistisch en hun energie kan benadert worden door $E_{\nu_i} = \sqrt{p^2c^2 + m_{\nu_i}^2 c^4} \approx pc(1 + \frac{1}{2}m_{\nu_i}^2 c^2/p^2)$ (in het boek op pg.141 moest $\hbar c$ vervangen worden door p, maar ook dat is inmiddels verbeterd). Hiermee vinden we dan de waarschijnlijkheid om het electron-neutrino nog steeds te zien, $P_{\nu_e \to \nu_e} = \langle \nu_e(t)|\nu_e(t)\rangle = |U_{e1}|^2 + |U_{e2}|^2 + 2|U_{e1}U_{e2}|\cos\big((m_{\nu_1}^2 - m_{\nu_2}^2)c^4 t/(2\hbar pc)\big)$. Van de waargenomen oscillaties kan men $\Delta m^2 = m_{\nu_1}^2 - m_{\nu_2}^2$ bepalen als men ook de oscillatielengte L bepaalt. Dit is de afstand waar de cosinus zijn periode heeft, $L = 4\pi\hbar pc/(\Delta m^2 c^4)$. Voor de electron-neutrino oscillaties vindt men $\Delta m^2 = 7.1^{+1.2}_{-0.6} \times 10^{-5}\mathrm{eV}^2/\mathrm{c}^4$ (en $\theta = 32.5^{+1.4}_{-2.3}$ graden, PRL 92 (2004) 181301), wat bevestigd is door KamLAND ($\Delta m^2 = 7.9^{+0.6}_{-0.5} \times 10^{-5}\mathrm{eV}^2/\mathrm{c}^4$, PRL 94 (2005) 081801). Ook de neutrino oscillaties voor het muon zijn nu bekend. Aannemende dat dit oscillaties zijn met ν_τ volgt hieruit dat $1.5 \times 10^{-3} < \Delta m^2 < 3.4 \times 10^{-3}$ (in $\mathrm{eV}^2/\mathrm{c}^4$, PRD 71 (2005) 12005). De reden waarom we hier zo veel aandacht aan besteden is dat de rechtshandige component van het neutrino anders is dan de linkshandige component. Dit is fysica voorbij het standaard model!

Iets dat speciaal is voor de zwakke wisselwerking is pariteitsviolatie. De heliciteit, $h = \vec{s}\cdot\vec{p}/(|\vec{s}||\vec{p}|)$, is een maat voor gebroken pariteit. De interactie met een spin 1 veld kan een vector (c_V) of axiale vector (c_A) zijn. De pariteit wordt alleen behouden als de koppeling c_V of c_A is, maar voor de zwakke wisselwerking is deze koppeling $c_V = -c_A$ $(V - A)$. Dit is het geval van maximale pariteitsviolatie. De heliciteit is alleen goed gedefinieerd voor het geval van massaloze fermionen. Als er een massa is, dan wordt voor kleine $\beta = v/c$ het mogelijk een systeem te kiezen waarvan de richting wordt omgedraaid. Het is eenvoudig in te zien dat als de heliciteit van het neutrino vast ligt, dat dan ook de C-pariteit ("ladingsconjugatie") gebroken is. Maar over het algemeen is CP behouden. Alleen in het geval van de CKM matrix kan het gebroken worden, en is voor K^0-$\bar{K}^0$, en recentelijk in 1987 voor B^0-$\bar{B}^0$, waargenomen.

Een voorbeeld van P-violatie is het verval van het muon, $\mu^- \to e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$. In het ruststelsel van het muon wordt het electron uitgezonden met de spin tegengesteld aan zijn impuls (omdat de spins van het ν_μ en $\bar{\nu}_e$ elkaar opheffen). De amplitude voor het electron met de spin in de richting van de impuls is onderdrukt (zie de figuur op pg.144). Een ander voorbeeld is $\pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ en het onderdrukte (1:8000) $\pi^- \to e^- + \bar{\nu}_e$. Ook hier speelt de pariteit een belangrijke rol: Als het electron en muon massaloos zijn (en er geen neutrino oscillaties zijn) dan had dit verval niet kunnen plaats vinden. Doordat het pion $J = 0$ heeft, is de spin van het lepton tegengesteld aan de spin van het anti-neutrino, en dat is verboden. Maar met de massa van het electron en muon koppelt een deel met de "verkeerde" spin, wat voor het muon een veel groter effect heeft dan voor het electron.

Extra opmerking over diep-inelastische neutrino verstrooiing (§10.6). De essentie is dat in de zwakke wisselwerking de koppeling aan het quark afhangt van de heliciteit, en dat daardoor in neutrino en anti-neutrino verstrooiing op slinkse wijze onderscheid gemaakt kan worden tussen de quark $(q_f(x))$ en anti-quark $(\bar{q}_f(x))$ impulsfractie-verdelingsfuncties. Dit is duidelijk uit fig.10.2 en EqPN.(10.29-30) af te lezen, maar het zou ons te ver voeren de formules hier verder toe te lichten.

11 Bosonen in de Zwakke Wisselwerking

De theorie van de Zwakke Wisselwerking wordt gegeven door het Weinberg-Salam model (begin jaren '70), inclusief Z^0 die een menging geeft met het elektromagnetisme. Omdat de vertorbosonen zo een grote massa hebben is de productie van Z^0 en $W^\pm$ pas in 1983 mogelijk geworden. Voor Z^0 is een energie $\sqrt{s} = M_{Z^0}c^2$ voldoende, maar dat is pas in 1989 mogelijk geworden met een electronversneller van voldoende hoge energie ($e^- + e^+ \to Z_0$), die op CERN (LEP) en SLAC (SLC) werden gebouwd. (In 1996 is LEP verhoogd naar 86 GeV om de $W^\pm$ te kunnen zien in $e^- + e^+ \to W^- + W^+$. Uiteindelijk heeft men 114 GeV kunnen bereiken). In 1983 moest men het nog doen met $p + \bar{p}$ botsingen in de SPS, of ook wel $Sp\bar{p}S$ (Super Proton Antiproton Storage ring), door de volgende reakties te bestuderen, $u + \bar{u} \to Z^0$, $d + \bar{d} \to Z^0$, $d + \bar{u} \to W^-$ en $u + \bar{d} \to W^+$. In dit geval moet de energie van de protonen voldoende groot zijn. De helft van de impuls wordt gedragen door gluonen, zodat men voor de quarks slechts $\langle x_v \rangle \approx 0.12$ heeft (het strange quark heeft ongeveer $\langle x_s \rangle \approx 0.04$). De UA1 en UA2 experimenten hebben ze gevonden in ondermeer $Z^0 \to e^- + e^+$, $Z^0 \to \mu^- + \mu^+$, $W^+ \to e^+ + \nu_e$ en $W^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$.

In Fig. 11.1 staat een "lego diagram" voor $Z^0 \to e^- + e^+$, maar voor $W^\pm$ wordt het wat lastiger, omdat men de positie van het neutrino alleen via de missende impuls kan reconstrueren. In Fig. 11.2 staat de "transversale massa" $m_t = 2p_t/c$ (de massa van e^+ of e^- in de reactie $q_1 + \bar{q}_2 \to e^\pm +$ "niets") weergegeven voor UA2. Ruwweg is $p_t^{e^\pm} \approx \frac{1}{2} M_W c \sin\theta$, waarbij θ de hoek is waaronder $e^\pm$ uitgezonden wordt t.o.v. de bundel. De afhankelijkheid van $\cos\theta$ volgt nu uit

$$\frac{d\sigma}{dp_t} = \frac{d\sigma}{d\cos\theta}\frac{d\cos\theta}{dp_t} = \frac{d\sigma}{d\cos\theta}\frac{2p_t}{M_W c\sqrt{(M_W c/2)^2 - p_t^2}}.$$

De werkzame doorsnede heeft een maximum bij $p_t = M_W c/2$ en valt daarna snel af. We vinden zo $M_W = 80.41 \pm 0.10$ GeV/c^2 en $\Gamma_W = 2.06 \pm 0.07$ GeV. De informatie voor Z^0 is veel beter bekend, $M_{Z^0} = 91.187 \pm 0.007$ GeV/c^2 en $\Gamma_{Z^0} = 2.490 \pm 0.007$ GeV.

De koppeling van $W^\pm$ is alleen met betrekking tot de linkshandige fermionen (maximale pariteitsviolatie) en is atijd hetzelfde (universaliteit), met dien verstande dat er menging optreedt tussen de quarksmaken (de CKM matrix). Zo is er gelijke productie van $e^+\nu_e$, $\mu^+\nu_\mu$, $\tau^+\nu_\tau$, $u\bar{d}'$ en $c\bar{s}'$ (de laatste twee per kleur gemeten, en t.o.v. de Cabibbo-geroteerde $\bar{d}'$ en $\bar{s}'$. Het topquark is te zwaar). De quark-antiquark toestanden (2×3) zijn niet altijd te onderscheiden, maar voor de leptonen verwacht men (onder verwaarlozing van de massa) per soort 1/9, wat goed overeen komt met de metingen, $W^+ \to e^+ + \nu_e$ $10.9 \pm 0.4\%$, $\mu^+ + \nu_\mu$ $10.2 \pm 0.5\%$ en $\tau^+ + \nu_\tau$ $11.3 \pm 0.8\%$.

De koppeling van de Z^0 is wat ingewikkelder. Het kan vervallen in de 6 leptonen en neutrinos en in de 5 quarktoestanden. De vervalsbreedte is gegeven door $\sigma_{i\to f}(s) = 12\pi(\hbar c)^2\Gamma_i\Gamma_f/\left((s-M_{Z^0}^2c^4)^2 + M_{Z^0}^2c^4\Gamma_{\rm tot}^2\right)$, waar Γ_i staat voor $e^- + e^+ \to Z^0$ en Γ_f voor alle uitgaande toestanden, $\Gamma_{\rm tot}(Z^0) = \sum_f \Gamma(Z^0 \to f\bar{f})$. De quark-antiquark toestanden kunnen niet altijd onderscheiden worden, maar dat is niet zo erg. De neutrinos kunnen echter niet waargenomen worden. Zij worden bepaald uit de totale werkzame doorsnede, omdat van ieder ander deeltje de werkzame doorsnede bekend is. Met LEP en SLC vond men de experimentele waarden, $Z^0 \to e^+ + e^-$ $3.366 \pm 0.008\%$, $\mu^+ + \mu^-$ $3.367 \pm 0.013\%$, $\tau^+ + \tau^-$ $3.360 \pm 0.015\%$, $\nu_{e,\mu,\tau} + \bar{\nu}_{e,\mu,\tau}$ $20.01 \pm 0.16\%$ en hadronen $69.90 \pm 0.15\%$. We zullen zo meteen zien welke koppelingen daarvoor nodig zijn.

Om de zwakke wisselwerking beter te begrijpen voeren we de zwakke isospin in. Iedere familie van linkshandige quarks en leptonen vormt een doublet van fermionen die in elkaar over kunnen gaan door een W boson uit te zenden of te absorberen. De elektrische lading $z_f e$ van de twee fermionen verschillen in een doublet altijd precies een eenheid. De zwakke isospin is $T = 1/2$ en de derde component is $T_3 = \pm 1/2$. De rechtshandige componenten van de fermionen koppelen niet aan het W boson en zijn singlets ($T = T_3 = 0$). We hebben derhalve de volgende verdeling (tabel 11.1):

			T	T_3	z_f
$\binom{\nu_e}{e}_L$	$\binom{\nu_\mu}{\mu}_L$	$\binom{\nu_\tau}{\tau}_L$	$1/2$	$+1/2$ $-1/2$	0 -1
e_R	μ_R	τ_R	0	0	-1
$\binom{u}{d'}_L$	$\binom{c}{s'}_L$	$\binom{t}{b'}_L$	$1/2$	$+1/2$ $-1/2$	$+2/3$ $-1/3$
u_R	c_R	t_R	0	0	$+2/3$
d_R	s_R	b_R	0	0	$-1/3$

Het W-boson heeft $T = 1$, met $T_3(W^-) = -1$, $T_3(W^+) = 1$ en $T_3(W^0) = 0$. De koppelinsconstante is g, maar W^0 is niet hetzelfde als Z^0. Men veronderstelt een singlet B^0 ($T = T_3 = 0$) met een zwakke koppelingsconstante gegeven door g', die als W^0 koppelt aan de fermionen zonder de zwakke isospin te veranderen. Het foton γ en Z^0 zijn dan kennelijk twee lineaire combinaties van deze W^0 en B^0,

$$
\begin{aligned}
|\gamma\rangle &= \sin\theta_W |W^0\rangle + \cos\theta_W |B^0\rangle, \\
|Z^0\rangle &= \cos\theta_W |W^0\rangle - \sin\theta_W |B^0\rangle,
\end{aligned}
$$

waar θ_W de elektrozwakke mixingshoek is (ook bekend als Weinberghoek).

Met kan laten zien dat de Weinberghoek voldoet aan $\tan\theta_W = g'/g$, $\sin\theta_W = g'/(g^2 + g'^2)^{1/2}$ en $\cos\theta_W = g/(g^2 + g'^2)^{1/2}$. Op die manier is elektrische lading gegeven door de eis dat de electronen wel, maar de neutrinos niet lading voelen. De elektrische lading is dus $e = g\sin\theta_W$. De waarde van de Weinberghoek (uit ν-e en Z^0 verstrooiing, of M_W/M_Z) is $\sin^2\theta_W = 0.23124 \pm 0.00024$. De zwakke koppeling α_W is dus ongeveer vier keer zo sterk als α, maar de zwakte komt vooral door de grote massas van $W^\pm$ en Z^0. Bij Z^0 spelen de ladingen een specifieke rol, $g_Z(f) = g\hat{g}(f)/\cos\theta_W$, waar $\hat{g}(f) = T_3 - z_f\sin^2\theta_W$ en z_f de lading (in eenheden van e) is.

De massas van $W^\pm$ and Z^0 konden al voldoende nauwkeurig voorspeld worden voordat ze waargenomen waren. Volgens EqPN.(10.4) hebben we

$$M_W^2 c^4 = \frac{\sqrt{2}\pi\alpha(\hbar c)^3}{2G_F\sin^2\theta_W}, \tag{80}$$

waar we $\alpha \approx 1/128$ en $\sin^2\theta_W \approx 0.231$ moeten invullen. Voor de massa van Z^0 gebruiken we $M_W/M_Z = \cos\theta_W$, wat goed overeenkomt met de rechtstreeks waarde, $M_W/M_Z = 0.8818 \pm 0.0011$.

De breedte van Z^0 kunnen we nu ook bepalen. Ieder fermion draagt $\Gamma_f = \Gamma_0[\hat{g}_L^2(f) + \hat{g}_R^2(f)]$ bij, waar

$$\Gamma_0 = \frac{G_F M_Z^3 c^6}{3\pi\sqrt{2}(\hbar c)^3} = \frac{\alpha g^2 M_Z^3 c^2}{6e^2 M_W^2} = \frac{\alpha M_Z c^2}{6\sin^2\theta_W\cos^2\theta_W} \approx 663\text{MeV}. \tag{81}$$

Voor de linkshandige neutrinos hebben we $\hat{g}_L(\nu) = \frac{1}{2}$ ($T_3 = \frac{1}{2}$ en $z_f = 0$). In het boek wordt gezegd dat men gelooft dat er geen rechtshandige neutrinos in de natuur voorkomen. Dat was de situatie voordat men heeft ontdekt dat neutrinos een massa hebben (de mogelijkheid dat het electron neutrino massaloos is kan nog niet worden uitgesloten). Voor deeltjes met massa is de heliciteit niet behouden, zodat er naast het linkshandig neutrino dat koppelt aan de $W^\pm$ en Z^0 deeltjes, er ook een rechtshandig neutrino moet zijn. Zulke rechtshandige neutrinos koppelen echter niet (rechtstreeks) aan de $W^\pm$ en Z^0 deeltjes, en de conclusie in het boek dat $T_3 = z_f = \hat{g}_R = 0$ is dus nog steeds correct, m.a.w. $\hat{g}_R(\nu) = 0$. Dat betekent dat $\Gamma_\nu \approx 165.8$ MeV. Voor de d, s en b quarks geldt voor linkshandige flavors $T_3 = -\frac{1}{2}$ en voor rechtshandige $T_3 = 0$. Samen met $z_f = -\frac{1}{3}$, heeft men dan $\hat{g}_L(d,s,b) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\sin^2\theta_W$ en $\hat{g}_R(d,s,b) = \frac{1}{3}\sin^2\theta_W$. Een factor 3 voor de kleuren geeft tenslotte $\Gamma_{d,s,b} \approx 3 \times 122.4$ MeV. Voor het u en c quark (t is te zwaar) vindt men $\hat{g}_L(u,c) = \frac{1}{2} - \frac{2}{3}\sin^2\theta_W$ en

$\hat{g}_R(u,c) = -\frac{2}{3}\sin^2\theta_W$, oftewel $\Gamma_{u,c} \approx 3\times 94.9$ MeV. Tenslotte, voor de geladen leptonen vindt met $\hat{g}_L(e,\mu,\tau) = -\frac{1}{2} + \sin^2\theta_W$ en $\hat{g}_R(e,\mu,\tau) = \sin^2\theta_W$, wat $\Gamma_{e,\mu,\tau} \approx 83.8$ MeV geeft (voor $\sin^2\theta_W = \frac{1}{4}$ is er een symmetrie tussen $\hat{g}_L^2$ and $\hat{g}_R^2$). Verval in $\nu\bar{\nu}$ kan men alleen halen uit de totale werkzame doorsnede, $\Gamma_{\rm tot} = 2418$ MeV, of na correcties $\Gamma_{\rm tot}^{\rm theor.} = 2497 \pm 6$ MeV. Voor 3 families is dit in goede overeenstemming met $\Gamma_{\rm tot}^{\rm exp.} = 2490 \pm 7$ MeV. In Fig. 11.3 vindt men de werkzame doorsnede zoals gemeten door OPAL (CERN). Hiermee kan men het aantal neutrinos uitrekenen dat een massa heeft die kleiner is dan de helft van de Z^0 massa (probleem 11.1).

Het standaard model is nu compleet op de Higgs na. In eerste instantie willen we de Higgs gebruiken voor spontane symmetriebreking. Dit is analoog aan het Meissner effect in ferromagnetisme. Boven de Curie temperatuur is de spin massaloos, m.a.w. de draaiing heeft hier geen massa. Bij de Curie temperatuur vindt een faseovergang plaats, en de ferromagneet heeft nou bij lagere temperatuur een voorkeursrichting. In deze richting is er dan een massa. Het Meissner effect, d.w.z. de afwezigheid van externe magnetische velden, is een goede analogie voor de Higgs. In het Higgs model, voorgestelde onafhankelijk door Englert en Brout, en door Higgs, wordt de massa van $W^\pm$ en Z^0 gegeven door spontane symmetriebreking. De Higgs moet een scalar wezen, vier vrijheids graden in totaal vanwege de symmetriebreking. Drie daarvan geven de massas van $W^\pm$ en Z^0. Het foton blijft massaloos en er blijft dus een vrijheidsgraad voor de Higgs over. Deze is nu begrensd, mits het model klopt, tot 114 GeV $< m_H <$ 241 GeV en moet met de Large Hadron Collider (LHC) gevonden worden.

12 Het Standaard Model

Het standaard model bestaat uit electrozwakke wisselwerking en quantum chromodynamica. De gravitatie buiten beschouwing gelaten, hebben we dus drie interacties (waar we electromagnetisme los zien van de zwakke kracht):

Interactie	koppelt met	vectordeeltjes	Massa (GeV/c^2)	J^P
Sterke	kleurlading	8 gluonen (g)	0	1^-
Elektromagn.	elektrische lading	foton (γ)	0	1^-
Zwakke	zwakke lading	$W^\pm$, Z^0	$\approx 10^2$	1

Gluonen met kleurlading hebben interactie met elkaar. Ook de bosonen van de zwakke interactie hebben wisselwerking met elkaar, omdat ze zwakke lading hebben. Spin 1/2 deeltjes zijn ingedeeld naar hun families,

Fermionen	Families	Lading	Kleur	T_3^L	T_3^R	Spin
Leptonen	ν_e ν_μ ν_τ	0		+1/2		1/2
	e μ τ	-1		-1/2	0	1/2
Quarks	u c t	+2/3	r,b,g	+1/2	0	1/2
	d s b	-1/3	r,b,g	-1/2	0	1/2

Ieder fermion heeft een antifermion met dezelfde massa, maar alle ladingen zijn tegengesteld. Door de gemeten waarde van de Z^0 resonantie heeft men nu het aantal neutrinos (dat lichter is als $Z^0/2$) bepaald.

De elektromagnetische interactie heeft fotonen die massaloos zijn, maar de bosonen uit de zwakke wisselwerking hebben een reikwijdte van ongeveer 10^{-3}fm. Gluonen hebben een massa gelijk aan nul, maar door de zelfinteracties wordt de energie steeds groter bij toenemende afstand. Bij een afstand die van de orde van 1 fm is, worden quark-antiquark paren gemaakt. Vrije deeltje hebben altijd een neutrale kleur (de kleur is wit). De electromagnetische en zwakke interactie kunnen onder een noemer worden gebracht, de elektrozwakke interactie. De ladingen worden gegeven door de Weinberghoek.

Behouden is energie (E), impuls ($\vec{p}$), hoekmomentum ($\vec{L}$), lading (Q), kleur, baryongetal (B) en leptonnummer (L). Dat is zo voor alle interacties. Pariteit (P) en ladingsconjugatie (C) is behouden onder de sterke kracht en het elekromagnetisme, maar wordt gebroken door de zwakke wisselwerking. De charged current koppelt alleen aan linkshandige deeltjes en rechtshandige antideeltjes. De neutrale current is deels pariteitsbehoudend, maar koppelt links- en rechtshandig met verschillende sterkte. CP is over het algemeen behouden, maar in de CKM matrix zit een kleine afwijking die CP schendt.

In Fig. 21.1 staan de overgangen weergeven voor leptonen t.g.v. de charged currents en in Fig. 12.2 de overgangen tussen de quarks. Het t quark is zo zwaar dat hij kan vervallen in een reële W^+. Het Higgs deeltje wordt wellicht gevonden met de LHC, maar er blijven nog een heleboel vragen onbeantwoordt. Zoals de vraag wat de 21 (of meer) constanten zijn die het model definieren, zoals de massas, de koppelingsconstanten en de coefficienten voor de CKM en leptonische mixing matrix. Ook is de interactie van het Higgs triviaal, maar het feit dat de koppeling ongelijk aan nul is bewijst dat het geen fundamentele theorie is. Als het Higgs echter gevonden wordt met $m_H < 241$ GeV dan is de cutoff groter dan de Planckmassa.

19 Nucleaire Thermodynamica

Zware ionen reakties zijn de favoriete manier om een hoge temperatuur te bereiken. Als ze elkaar net raken dan wordt temperatuur gemeten door de Maxwellverdeling. De energie van alle vervalsproducten is ook eenvoudig te meten. We kunnen zo ook een onderscheid maken tussen de energie van de twee voorwaartse fragmenten en de energie verloren door botsingen (zie Fig. 19.5).

Als voorbeeld gebruiken we goud dat met 600 MeV/nucleon op een stilstaand trefplaatje (ook van goud) wordt geschoten. Voor een energie die kleiner is dan ongeveer 4 MeV/nucleon heeft men, als functie van deze energie, een snel toenemende temperatuur (zie Fig. 19.6). Dat is de vloeibare fase. Maar bij een energie die ruwweg ligt tussen 4 en 10 MeV/nucleon neemt de temperatuur slechts een heel klein beetje toe. Voorbij 10 MeV/nucleon neemt dan weer de temperatuur toe, en deze fase noemen we de gastoestand. We kunnen dat vergelijken met de vorming van een gasfase, waar de temperatuur pas weer kan stijgen als alle vloeistof is omgezet in gas. Het kookpunt ligt dan bij ongeveer $kT \approx 4$ MeV.

Als we de centrale botsingen willen bestuderen waarbij grote hoeveelheden geladen en neutrale pionen worden gecreëerd (zie Fig. 19.7), dan richten we ons op die projectielen die geproduceerd wordt met tenminste 10 GeV/nucleon. Bij deze hoge energie hebben de kernexcitaties $N + N \to \Delta + N$ een werkzame doorsnede van $\sigma = 40$ mb. De bijbehorende weglengte is $\lambda \approx 1/(\sigma\rho_N) \approx 1$ fm, wat betekent dat dit een of meerdere keren gebeurd. Een nieuwe vrijheidsgraad is derhalve gecreëerd. Via $\pi N \leftrightarrow \Delta$ wordt het dan thermodynanisch in stand gehouden. Deze mix van nucleonen, Δ baryonen, pionen en in veel kleiner mate andere mesonen, vormt de hadronische materie.

De pionen zijn veel lichter dan de andere hadronen en zorgen dus voor de uitwisseling van energie. De temperatuur wordt gevonden door de verdeling van de energie loodrecht op de bundel te meten, $dN/dE_{\text{kin}} \propto \exp(-E_{\text{kin}}/kT)$, waarin E_{kin} de kinetische energie is van de pionen. De temperatuur komt nooit boven $kT \approx 150$ MeV, de hoogste temperatuur die men kennelijk kan bereiken voor hadronische materie. Men zegt dat de pionen uitvriezen.

In Fig. 19.8 staat het fasediagram. Koude kernen hebben een dichtheid ρ_N en een temperatuur $kT = 0$. Een neutronenster heeft nog steeds (ruwweg) $kT = 0$, maar een dichtheid die 3-10 keer zo groot is als de kernen. Dat ligt nog (net) in de hadronische fase. Als men de kernen opwarmt, worden er voornamelijk α deeltjes gecreëerd. Als men echter de kernen tot een klein gebied beperkt houdt dan zijn het meer de resonantie $\Delta(1232)$, of nog hoger, die een rol spelen.

Het quark-gluon plasma is de fase voorbij 10 ρ_N of 200 kT. Als men eerst de temperatuur op 0 kT houdt, maar de dichtheid laat toenemen, dan overlappen ze zoveel dat men niet kan beslissen welk quark of gluon waarbij hoort. Bij $\rho = 0$ maar kT 200 MeV worden zoveel pionen uitgezonden dat ze beginnen te overlappen, en op een gegeven moment weten de quarks en gluonen niet meer bij welk pion ze horen. Wederom hebben we zo een overgang naar deconfinment. Er zijn pogingen om het quark-gluon plasma via elektromagnetische straling waar te nemen, aangezien ze met een factor van ongeveer 1/100 van de sterke wisselwerking koppelen, en dus niet afkoelen (vergelijk de neutrinos die uit het centrum van de zon komen zonder af te koelen). De interesse in het quark-gluon plasma is mede bepaald doordat men de evolutie van het heelal veel verder zal kunnen terugrekenen.

De thermodynamica van het vroege heelal heeft een enorme impuls gekregen van de deeltjesfysica. Maar ook voor de deeltjesfysica is de kosmologie een belangrijke constraint. Ons huidige begrip van het vroege heelal is gebaseerd op twee belangrijk experimenten, namelijk de continue uitbrijding en de kosmische achtergrondstraling. De veronderstelling is dat het begonnen is met een singulariteit die zich in het Big Bang model uitgebreid heeft en door verschillende faseovergangen is gegaan. Het grootste deel van de zichtbare materie bevindt zich in de melkwegstelsels die een massa hebben van 10^7 tot 10^{13} zonsmassas (er zijn er $\approx 10^{23}$).

De snelheid van de melkwegstelsels kan uit de Dobblerverschuiving worden gehaald, waar verder weg een grotere roodverschuiving met zich meebrengt. We vinden dan dat in alle richtingen de melkwegstelsels wegbewegen met een snelheid $v = H_0 d$, waar we de afstand ruwweg schatten met de afnamen van de lichtintensiteit. De Hubbleconstante is in de orde van 75 km s^{-1}/MPc, waar 1 Pc=3.1×10^{13} km=3.26 lichtjaren (de vroegere waarde was 50 tot 100 km s^{-1}/MPc, maar de fout is behoorlijk afgenomen). Hubble concludeerde een isotrope expansie van het heelal. Volgens de Big Bang is het hete plasma afgekoeld en op het moment dat de elektromagnetische straling ontkoppelde, is het zonder interactie met de materie waargenomen. Dit is door Penzias en Wilson als kosmische achtergrond straling met een temperatuur van 2.73 K (met slechts hele kleine variaties) gemeten.

Het Friedman model geeft de tijdsevolutie als functie van de gemiddelde dichtheid. Is deze dichtheid te groot, dan wordt op een gegeven moment de uitdijing omgezet in een inkrimping. Maar bij een te kleine waarde gaat de uitdijing altijd door. Het heelal kan ook de kritische dichtheid aannemen, waarbij de snelheid naar nul gaat, maar het is fout te stellen dat het een begrenzende afmeting heeft. Deze gaat nog steeds naar oneindig als $R(t)$ (:) $t^{2/3}$. In dit eenvoudige model wordt de leeftijd van het heelal gegeven door $t_0 = 2/(3H_0)$, i.p.v. EqPN.(19.4). Toch geeft $t_0 = 1/H_0$ op basis van de recente metingen met o.a. de WMAP satelliet *effectief* de juiste leeftijd, $t_0 = 13.7$ miljard jaar en $H_0 = 71$ km s^{-1}/MPc. Dat komt omdat naast de donkere materie (we kunnen bijv. dan denken aan massieve neutrinos) ook het effect van de zogenaamde donkere energie (cq. cosmologische constante) meegenomen moet worden.

Toen het heelal werd gevormd was er zo veel thermische interacties tussen de verschillende deeltjes dat er geen verschil was tussen de quarks en de leptonen. Na 10^{-35}s was de temperatuur al zozeer afgenomen dat er een faseovergang plaats vond in de sterke wisselwerking, waar de quarks niet meer reageerde met de leptonen. Op dat moment is het aantal fotonen ongeveer 10^9 maal het aantal quarks, en kan niet meer veranderen. Na ongeveer 10^{-11}s, bij een temperatuur van 100 GeV/k, vindt een faseovergang plaats waar de zwakke wisselwerking ontkoppeld. Bij ca. 10^{-6}s is de energie gedaald naar $kT \approx 100$ MeV, de typische schaal voor hadronische interacties. Dit is waar de quarks opgesloten worden in baryonen en mesonen. De protonen en neutronen zijn in thermisch evenwicht door de zwakke interacties. Maar bij ongeveer 1 s, d.w.z. bij $kT \approx 1$ MeV, ontkoppelt het proton en neutron. Het proton komt dan ongeveer 7 maal zo vaak voor als het neutron. Na ongeveer 3 minuten is $kT \approx 100$ keV, op welk moment er een faseovergang plaats vindt tussen de kernen en fotonen. De energie van de fotonen is dan te klein om de (lichte) kernen af te breken. In deze fase wordt deuterium, helium en lithium gevormd.

In Fig. 19.9 is schematisch aangegeven wat de evolutie van het heelal is vanaf de elektrozwakke faseovergang ($T \approx 10^{15}$) door de energiedichtheid van straling en materie te plotten als functie van de temperatuur (of de tijd). Bij een temperatuur van 10^{13} K zien we dat de hadronen ontkoppelen, en wat later ook de leptonen. Bij $T \approx 10^4$ K gaat de materie domineren. De huidige temperatuur van de aldus gevormde kosmische achtergrond straling is 2.73 K. In het volgende gaan we kort in op een aantal belangrijke themas.

Allereerst is er de materie-antimaterie asymmetrie, die volgt uit het feit dat zonder zo'n asymmetrie er net zoveel materie als antimaterie moet zijn. Bijv. zouden er evenveel baryonen als antibaryonen zijn. Dat is niet het geval en men kan uitrekenen wat deze asymmetrie is, uitgaande van het aantal fotonen dat door de expansie en koeling van het heelal het omgekeerde proces niet meer heeft kunnen uitvoeren. Er zijn 3×10^{-10} baryonen tegen een foton en als ze allemaal konden annihileren dan had men aan $\Delta q = (q - \bar{q})/(q + \bar{q}) = 3 \times 10^{-10}$ genoeg gehad om de asymmetrie te begrijpen.

Dit kan gegenereerd worden door CP en baryongetal violatie, en een thermische niet-evenwicht situatie. In Grand Unification (GUT) kan dit eenvoudig gerealiseerd worden. Als $t < 10^{-35}$s dan zijn alle (anti)fermionen gelijkwaardig en een kleine asymmetrie in het baryongetal is mogelijk. Men denkt daarbij aan het X boson met een massa van ongeveer 10^{14} GeV/c^2. X en $\bar{X}$ worden niet in gelijke hoeveelheden gemaakt: X vervalt in een quark en electron met een ietwat andere snelheid als waarmee $\bar{X}$ vervalt in een antiquark en positron. Het moet dan wel gecreëerd worden in niet-evenwicht, waarbij CP violatie een belangrijke rol speelt. Men heeft echter nog geen model gevonden dat aan alle voorwaarden voldoet.

Men veronderstelt dat men terug kan rekenen tot 10^{-11}s, wanneer de temperatuur ongeveer $kT \approx 100$ GeV was. Alles dat eerder was is weliswaar gebaseerd op plausibele veronderstellingen, maar is nog niet bewezen. Bij ruwweg 100 GeV weet men dat de elektrozwakke faseovergang plaats vindt, waar het overgaat van geen merkbaar verschil tussen zwakke en elektromagnetische interacties tot het geval waar de W en Z een massa krijgen door interactie met het Higgs deeltje. Hoewel de energie nu een paar maal 100 GeV is, kunnen we niet de dichtheden bereiken die in de elektrozwakke faseovergang speelt (10^8 maal de kerndichtheid).

Bij ruwweg 1 μs, d.w.z. bij $kT \approx 100$ MeV, was er een volgende overgang waar het quark-gluon plasma plaats maakte voor kernen. Omdat de massas van de u- en d-quarks vrijwel identiek zijn, is het proton en neutron in eerste instantie in evenwicht. Als de temperatuur daalt dan wordt op een gegeven moment de reatiesnelheid van het neutron (bijv. $\bar{\nu}p \to e^+n$) veel kleiner dan het omgekeerde proces (bijv. $e^+n \to \bar{\nu}p$), omdat het neutron iets zwaarder weegt. Het aantal neutronen neemt hier door af (tot 1/7 van het aantal protonen). Er wordt wel getracht dit te bereiken in zware ionenbotsingen, maar de dichtheid is in feite te groot in zulke botsingen.

Ten slotte willen we nog beschrijven wat er rond $t = 200$ s gebeurt als we 88% protonen en 12% neutronen hebben. Ten eerste was de levensduur van het deuterium door fotodissociatie vrij kort, maar als de temperatuur voldoende afneemt kan het door $n + p \rightarrow d + \gamma + 2.22$ MeV ontstaan. Het kan dan alleen maar afnemen door een proton of neutron te absorberen, $p + d \rightarrow {}^3He + \gamma + 5.49$ MeV en $n + d \rightarrow {}^3H + \gamma + 6.26$ MeV. Tenslotte worden hieruit de stabiele ${}^4He$ kernen gemaakt via ${}^3He+n$, ${}^3He+d$ en $d+d$. De Li kernen die gecreëerd werden door ${}^4He + {}^3H \rightarrow {}^7Li + \gamma + 2.47$ MeV zijn allemaal verdwenen in de reactie ${}^7Li + p \rightarrow 2{}^4He + 17.35$ MeV. Alle neutronen zijn derhalve in ${}^4He$ gaan zitten en bevat derhalve 24% van de massa, met de overige 76% in de vorm van protonen.

Alleen heeft men daarnaast een heel klein beetje deuterium, ${}^3He$ en ${}^7Li$ kunnen maken, te meer omdat stabiele kernen met $A = 5$ en $A = 8$ niet voorkomen. We kunnen alle hogere massas alleen met behulp van sterren maken. De Big Bang nucleosynthese hield op bij ongeveer 30 minuten, waar de temperatuur onder de Coulomb barrier viel van andere kernreacties. De sterren hebben dit niet veel verandert en de massaverhouding ${}^4He/p$ is nog dichtbij de Big Bang waarde. Dit alles is in goede overeenstemming met wat men berekende.

We willen de sterevolutie nu in wat meer detail bekijken. Eddington was in 1920 de eerste die door had dat kernfusie de bron van energie in sterren is. Bethe, Weizsäcker en anderen hebben in de jaren dertig het verband gelegd tussen de zon en nucleare reacties. Fred Hoyle is in de jaren veertig begonnen met de systematische studie van stellaire abundanties. Hij combineerde daarbij de werkzame doorsnede van kernreacties (gemeten in het lab) met de stellaire dynamica.

Een ster wordt gevormd uit een contractie van gas, en bestaat voor het grootste deel uit waterstof en Helium. In het centrum loopt de temperatuur zo hoog op dat er kernfusie mogelijk wordt. Er is niet veel menging van verschillende lagen en het transport is door straling. De druk is zo groot dat de ster min of meer in evenwicht is (de viriaalstelling voor een gravitationele kracht zegt dat de temperatuur af moet nemen naar de rand toe en de gemiddelde kinetische energie is dan de helft van de potentiele energie). De chemische compositie wordt maar langzaam veranderd door de kernreakties ter plekke. In het bijzonder wordt alleen de kern van de ster veranderd. Een ster in evenwicht straalt even veel uit als het met kernreacties aanmaakt.

Om fusie van kernen tot stand te brengen moet de temperatuur hoog genoeg zijn om de Coulomb barriere te beslechten. Als de Gamowfactor

$G \approx \pi\alpha Z_1 Z_2 c/v$ is, moet de amplitude e^{-2G} voldoende groot zijn om de reactie plaats te laten vinden. Ook in fusiereacties is de energie iets onder de Coulomb barriere en vindt het door tunneling plaats. De waarschijnlijkheid per eenheid van volume is $dN/dt = n_1 n_2 \langle\sigma v\rangle$, waar n_1 en n_2 de dichtheden zijn van de twee fusieproducten. We hebben $\langle\sigma v\rangle$ tussen twee haakje gezet, omdat het gemiddeld moet worden met de Maxwell-Boltzmann verdeling, $n(v) \propto \exp(-mv^2/2kT) = \exp(-E/kT)$. De verdeling $n(v)$ is sterk afnemend, terwijl σv een sterk toenemend gedrag heeft. Fig. 19.10 geeft dit weer als een kromme in E, waarbij $\exp(-E/kT)$ vermenigvuldigd moet worden met de Gamowfactor, $\exp(-b/\sqrt{E})$. Fusie is dan everredig met het product, $\exp(-E/kT - b/\sqrt{E})$, dat een zeer nauwe functie is van E met een halfwaardebreedte die met ΔE_0 wordt weergeven.

Het eerst verbranden we het waterstof, waar het eindproduct ^4He is. Een massa van ongeveer 1/10 van de zonsmassa geeft al een temperatuur van $T > 10^7 K$ en is voldoende om de proton-proton cycles gaande te houden: $p + p \to d + e^+ + \nu_e + 0.42$ MeV, $p + d \to {}^3He + \gamma + 5.49$ MeV, ${}^3He + {}^3He \to p + p + \alpha + 12.8$ MeV en $e^+ + e^- \to 2\gamma + 1.02$ MeV. Netto geeft dat $4p \to \alpha + 2e^+ + 2\nu_e$ met 26.72 MeV aan energie, waarvan gemiddeld 0.52 MeV gebruik wordt door het neutrino en verloren gaat. De eerste reaktie is het langzaamste omdat de zwakke wisselwerking er bij betrokken is. In het eerste begin branden alle sterren via de proton-proton cycles. In de zon duurt deze fase 10^{10} jaar, waarvan de helft verstreken is. Als ^{12}C aanwezig is, dan kan het via de koolstof cyclus, ${}^{12}_{6}C \xrightarrow{p} {}^{13}_{7}N \xrightarrow{\beta^+} {}^{13}_{6}C \xrightarrow{p} {}^{14}_{7}N \xrightarrow{p} {}^{15}_{8}O \xrightarrow{\beta^+} {}^{15}_{7}N \xrightarrow{p} {}^{12}_{6}C + \alpha$, gemaakt worden. Het koolstof komt hierna weer vrij voor verdere reakties, maar het vergt hogere temperaturen. Ze hebben het zelfde effect als de proton-proton cyclus ($4p \to \alpha + 2e^+ + 2\nu_e$ en een energie van 26.72 MeV), maar het loopt sneller.

Als al het waterstof in de kern op is moet de ster eerst behoorlijk opwarmen om het ^4He te kunnen verbranden. Voor sterren die veel lichter zijn dan de zon zijn zulke hoge temperaturen niet mogelijk en de ster wordt een witte dwerg, d.w.z. de Fermidruk is het eerste dat de ster weer stabiliseert, al is de afmeting dan die van planeten. Zwaardere sterren kunnen een temperatuur bereiken van ongeveer 10^8 K met een dichtheid van 10^8 kg/m^3, waar het helium begint te branden. Omdat de temperatuur toeneemt kan nu ook het waterstof dat iets verder naar buiten ligt gaan ontbranden. Maar als gevolg daarvan wordt de ster veel groter en wordt een rode reus.

Op het eerste gezicht lijkt het niet mogelijk om ^4He te verbranden, want

^{8}Be heeft een levensduur van 10^{-16}s. Echter, in 1952 liet E. Salpeter zien hoe we het ^{4}He konden verbranden. In Fig. 19.11 staat het zg. 3 α-proces beschreven. Hoewel er maar een ^{8}Be op 10^{9} α's is (bij een dichtheid van 10^{8} kg/m^{3}) is dat toch voldoende om de reaktie bij 10^{8} K te laten verlopen. Maar het ^{8}Be is 92 keV zwaarder dan 2α's, en vervolgens is $^{12}C^{*}$ weer 287 keV zwaarder dan $^{4}He + {}^{8}Be$, waarbij $^{12}C^{*}$ een 0^{+} geëxiteerde toestand is die via verval in 2γ's eindelijk $3^{4}He \rightarrow {}^{12}C + 2\gamma + 7.37$ MeV geeft. De geëxciteerde toestand vervalt maar voor 0.04% in de grondtoestand van ^{12}C (en die toestand is pas nadat Salpeter hierover schreef gevonden). Het 3 α-proces speelt een zeer belangrijke rol voor de vorming van hogere elementen en ruwweg 1% van alle kernen wordt aldus gemaakt.

Als alle koolstof op is, dan worden de sterren met ruwweg de massa van de zon witte dwergen. Meer massieve sterren kunnen vervolgens ^{12}C, ^{16}O, ^{20}Ne, etc. verbranden. Als voorbeeld noemen we $^{12}C + {}^{12}C \rightarrow {}^{20}_{10}Ne + \alpha +$ 4.62 MeV, $^{23}_{11}Na + p + 2.24$ MeV, $^{23}_{12}Mg + n - 2.61$ MeV, $^{16}_{8}O + 2\alpha - 0.11$ MeV, etc. Het verbranden van silicium in ijzer is het laatste wat de ster nog kan doen (voor maar een paar dagen). De ster vormt dan een supernova, waar in een korte tijd ontzettend veel energie wordt uitgezonden. De kern wordt hierbij een witte dwerg (als de massa van de kern kleiner is dan een zonsmassa), een neutronen ster (als de massa van de kern tussen een à twee zonsmassa is) of een zwart gat.

Zwaardere kernen worden gemaakt door accumulatie van neutronen. Men kan dat doen door met het langzame proces (s-proces) gebruik te maken van $^{22}_{10}Ne + \alpha \rightarrow {}^{25}_{12}Mg + n - 0.48$ MeV of $^{13}_{6}C + \alpha \rightarrow {}^{16}_{8}O + n - 0.91$ MeV. Door herhaalde vangst van neutronen vormen zich isotopen die door β-verval stabiele kernen vormen. Maar vanaf lood moet men werken met α-verval. Voor het snellere proces (r-proces) is men aangewezen op de supernova explosies, tengevolge van de hoge flux van 10^{23}m^{-2}s^{-1} neutronen. Vooral kernen die zwaarder zijn dan lood worden hiermee geproduceerd.

Alle kernen worden zo gemaakt in de sterren. Alleen waterstof en helium wordt gemaakt in de Big Bang. Elke keer wordt het vrij gegeven door de supernova explosies, zodat de samenstelling langzaam verandert. De resultaten zijn hiemee goed in overeenstemming en het is een van de grootste triomfen van de astro- en kernfysica.

EINDE